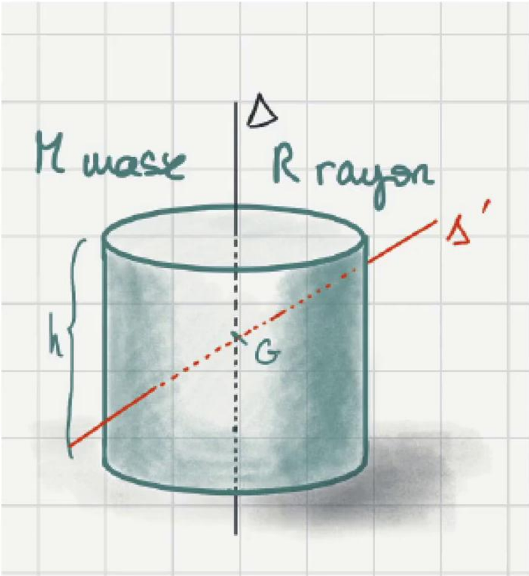
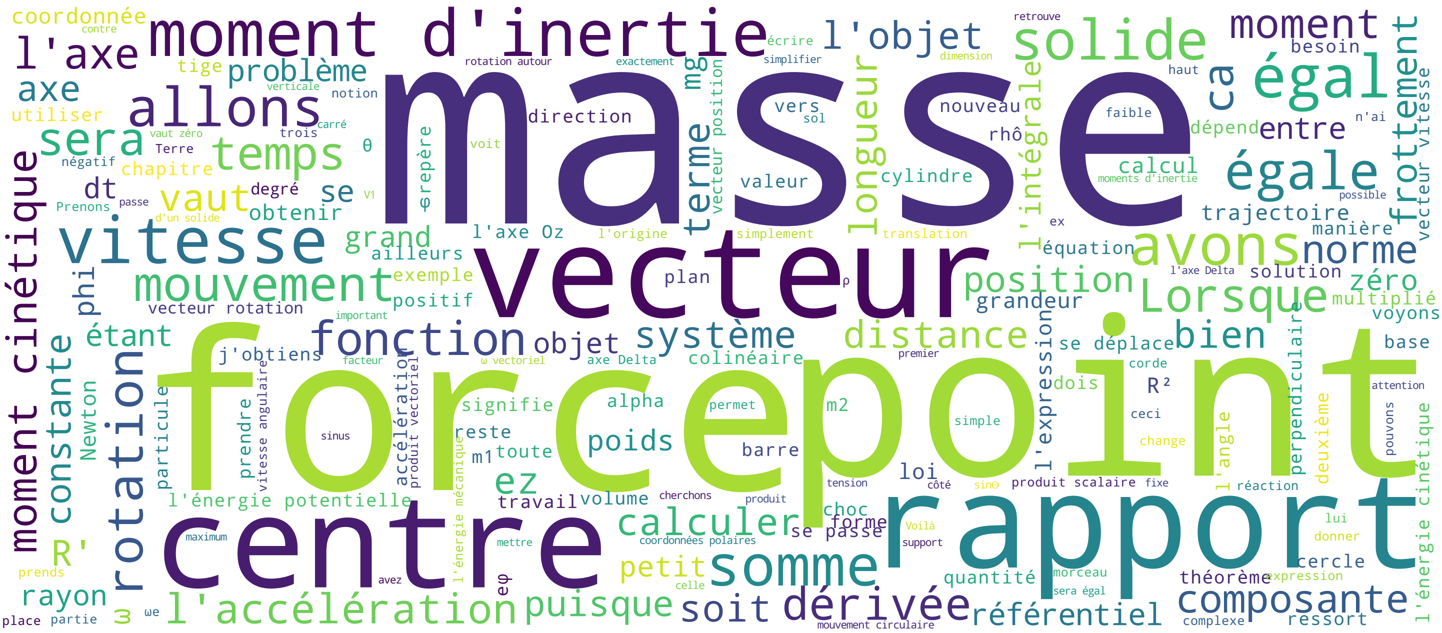


Moment d'inertie d'un solide

Partie1: théorie

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

Le calcul de l'énergie de rotation nous a amené à la définition du moment d'inertie. Nous commencerons par calculer le moment d'inertie dans quelques cas simples, ne demandant pas d'utiliser les intégrales triples. Puis, je vous donnerai l'expression des moments d'inertie de solide usuel par rapport à un axe passant par le centre de masse, et enfin, nous verrons quelques outils pour calculer le moment d'inertie de solide composé ou lorsqu'on a un axe qui ne passe pas par le centre de masse.

Notes

Summary

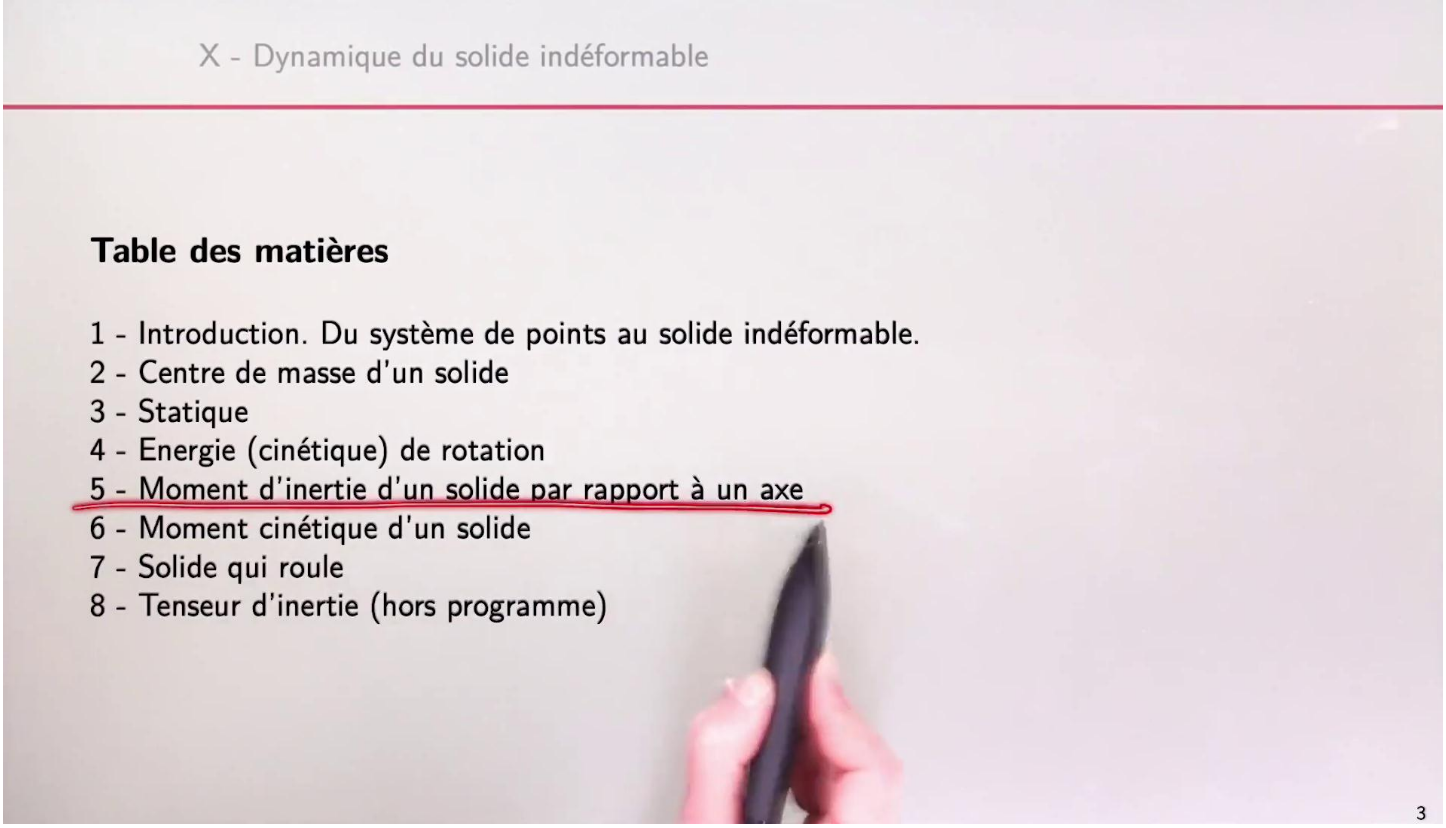
0m 05s

Plan du cours

Notes

Summary

0m 35s

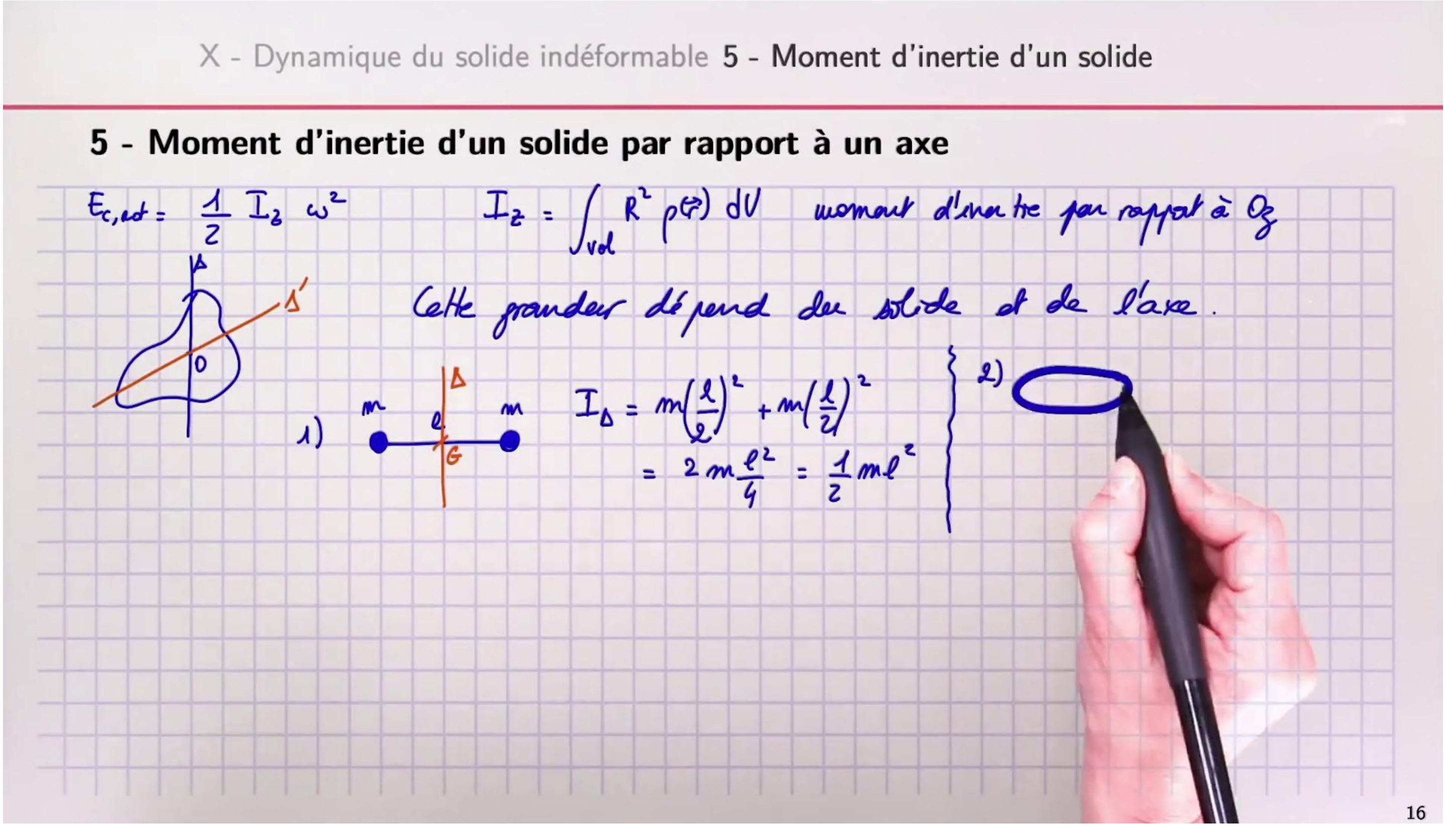


Nous sommes dans le chapitre 10 sur le solide indéformable et nous allons maintenant voir comment obtenir les moments d'inertie d'un solide par rapport à un axe.

Notes

Summary

0m 36s

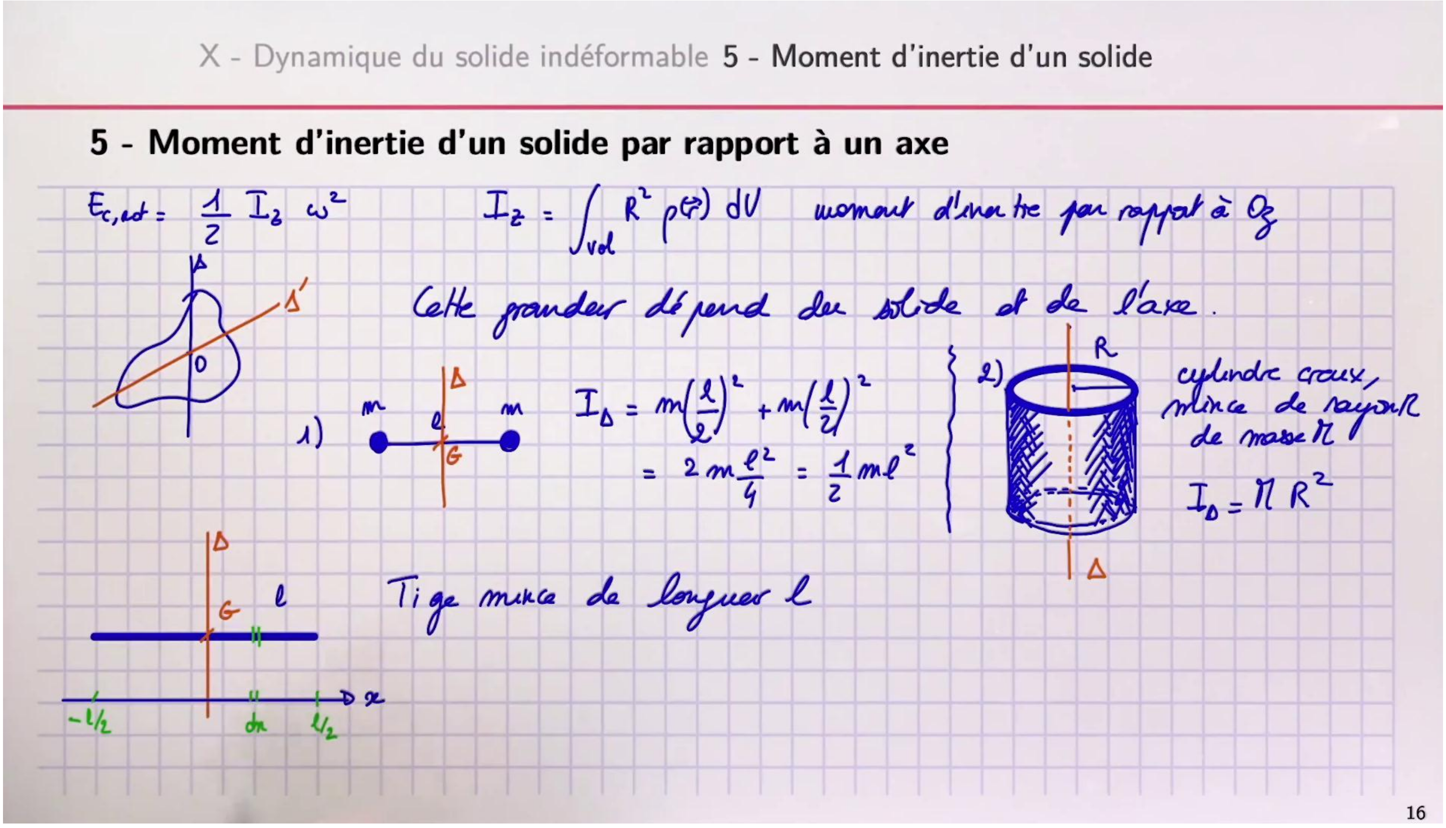


Nous avons donc vu que l'énergie cinétique de rotation s'obtient comme étant un et demi de Iz ω², avec Iz le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. C'est l'intégrale sur le volume de R² ρ(r) dV. Si j'ai un solide quelconque, le calcul sera complexe. Le résultat dépend, non seulement de la géométrie du solide, mais aussi de l'axe de rotation. Il ne sera pas le même pour un axe de rotation Delta prime ou pour un axe de rotation Delta, même si les deux passent par l'origine O. Nous allons commencer par regarder ce qui se passe pour des solides très simples. Considérons le solide le plus simple possible. J'ai une tige sans masse de longueur l, et aux deux extrémités, j'accroche deux masses identiques m. Je prends comme axe de rotation Delta un axe perpendiculaire à la tige passant par son centre, qui est aussi le centre de masse. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Delta sera le moment d'inertie de chacune des masses prises individuellement, comme la distance est R qui vaut ici l sur deux, je vais obtenir IΔ égal à m(l/2)² pour la première masse, plus m(l/2)² pour la deuxième, ce qui va me donner comme résultat 2m l²/4, soit 1/2ml². Si je considère comme deuxième exemple un cylindre creux extrêmement mince.

Notes

Summary

0m 45s

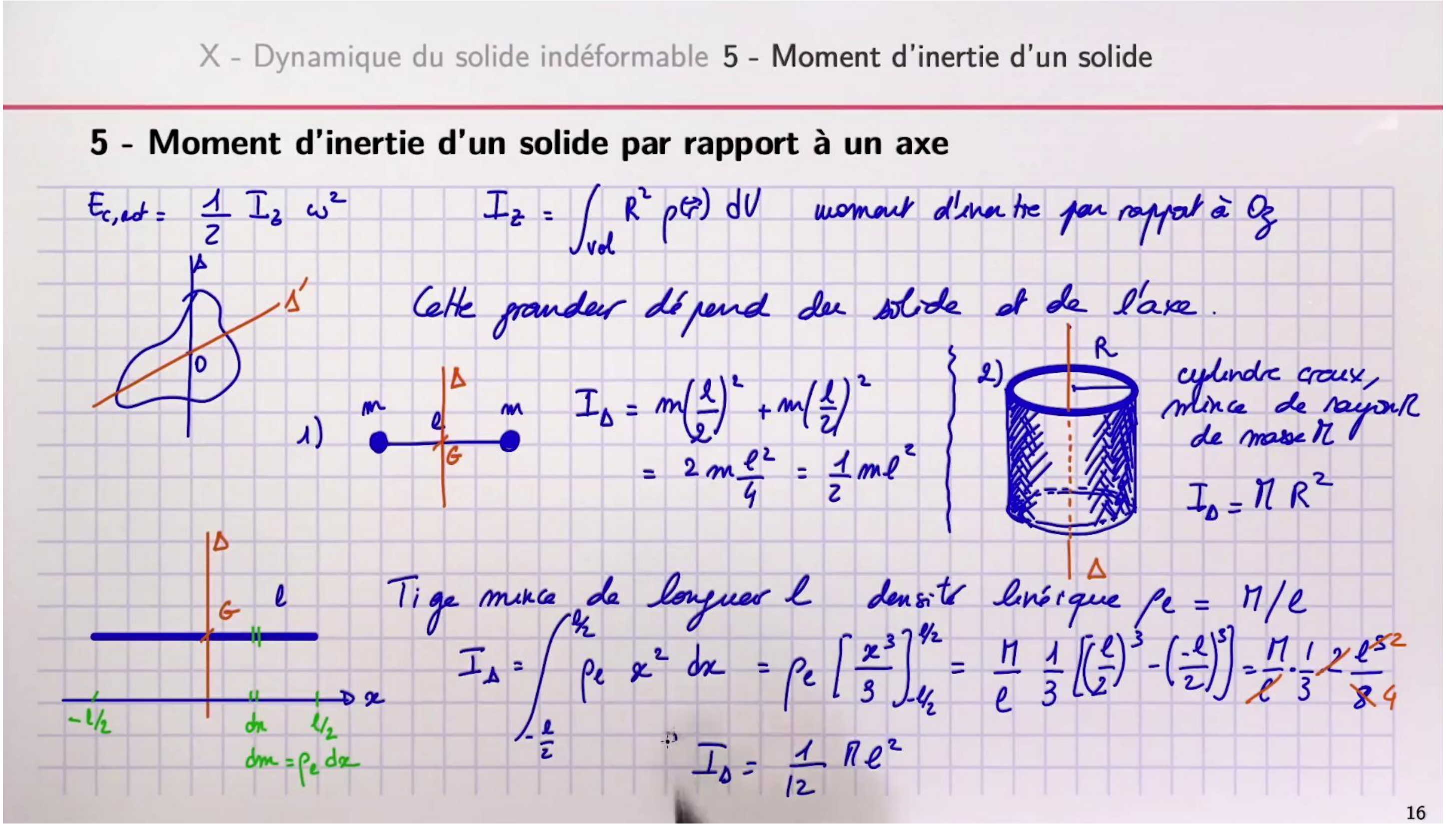


Il n'y a pas de matière à l'intérieur. Toute la masse est à la distance r rayon du cylindre. Il a une masse m. Puisque toute la masse est à la distance R, quelle que soit la portion du cylindre que je prends, la distance à l'axe de mon petit élément de masse sera R. Je pourrais donc sortir ce R de l'intégrale qui sera le même partout, et je n'aurai que l'intégrale sur le volume de la masse volumique multipliée par le volume, ce qui est la masse. Le IΔ va donc être égal à M R². Le moment d'inertie de ce cylindre creux par rapport à son axe de symétrie Delta est donc égal à M R². C'est le même que si toute la masse était répartie en un point à la distance R. Cherchons maintenant le moment d'inertie d'une tige mince de longueur l par rapport à un axe Delta perpendiculaire à la tige et passant par son centre. Je vais me placer dans le repère Gx, en appelant x l'axe colinéaire à la tige. Lorsque je vais faire l'intégrale, je vais devoir aller de −l/2 à +l/2, prendre un petit élément de longueur de tige dx. Cet élément de longueur aura une masse dm, et la masse dm sera égale à la masse linérique ρl multipliée par dx.

Notes

Summary

2m 51s

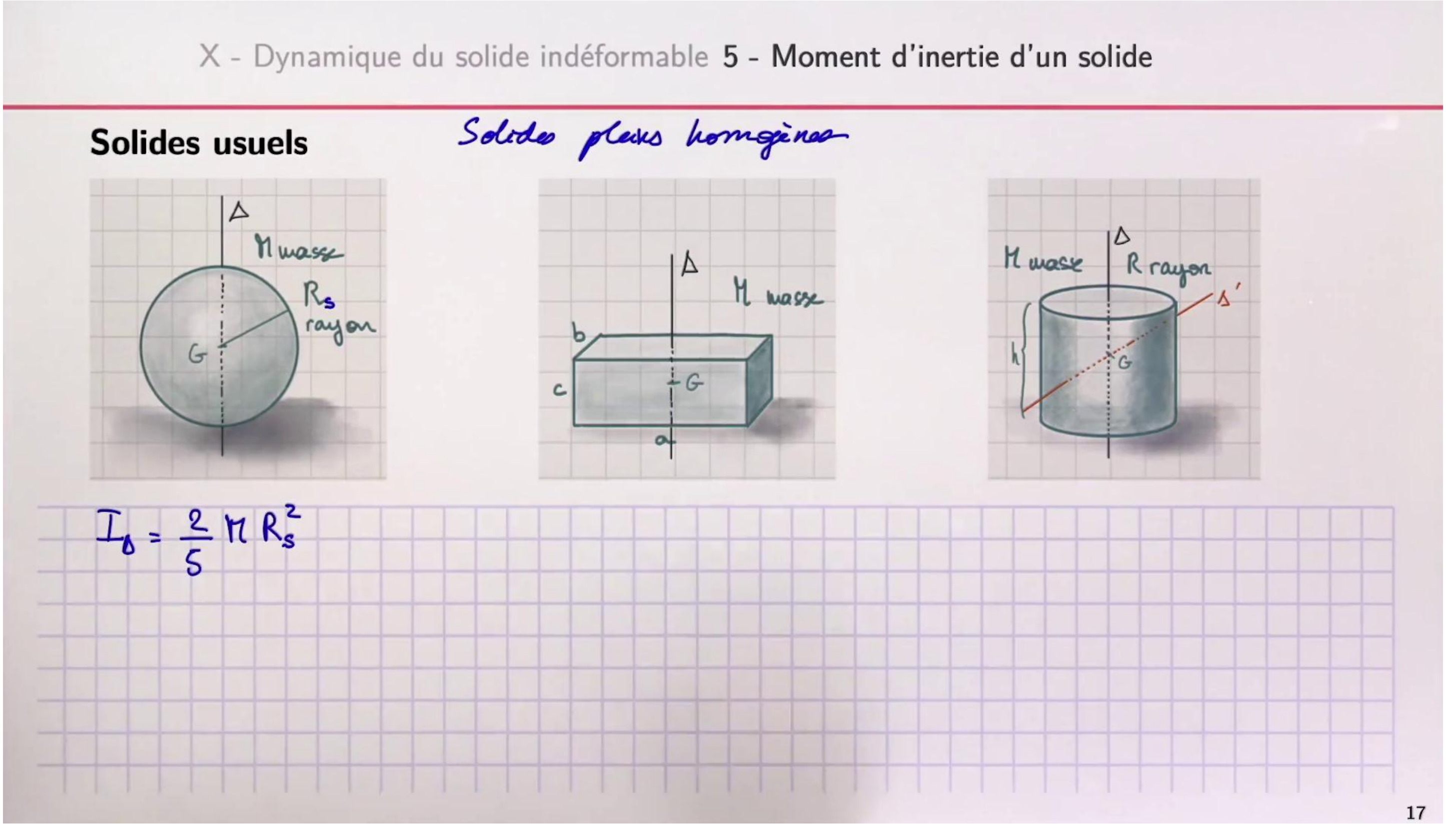


Lorsque je vais calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Delta, je n'aurai pas besoin de faire une intégrale sur le volume puisque c'est un objet à une dimension, ce sera l'intégrale de -l/2 à l/2, de ρl, qui est la densité linérique, la distance donnée par la position x, donc x^2 à la place de r^2, et puisque j'ai une densité linérique, je n'ai pas un dv mais un dx. Je peux sortir le ρl de l'intégrale. C'est ρl intégrale de −l/2 à l/2 de x^2 dx. La primitive de x^2, c'est $x^3/3$, pris entre −l/2 et l/2. ρl n'est rien d'autre que la masse de la tige M divisée par sa longueur. Je sors le 1/3 et j'ai $l/2^3-(-l/2)^3$, soit 2 $l/2^3$. Cela me fait donc M/l multiplié par 1/3, multiplié par 2, multiplié par l^3 et 2^3, c'est 8. Je peux simplifier un l en haut, j'aurai un l^2, le 2 avec le 8 qui va me donner un 4, 3 fois 4, 12. J'obtiens comme IΔ pour cet objet 1/12M l^2.

Notes

Summary

4m 36s

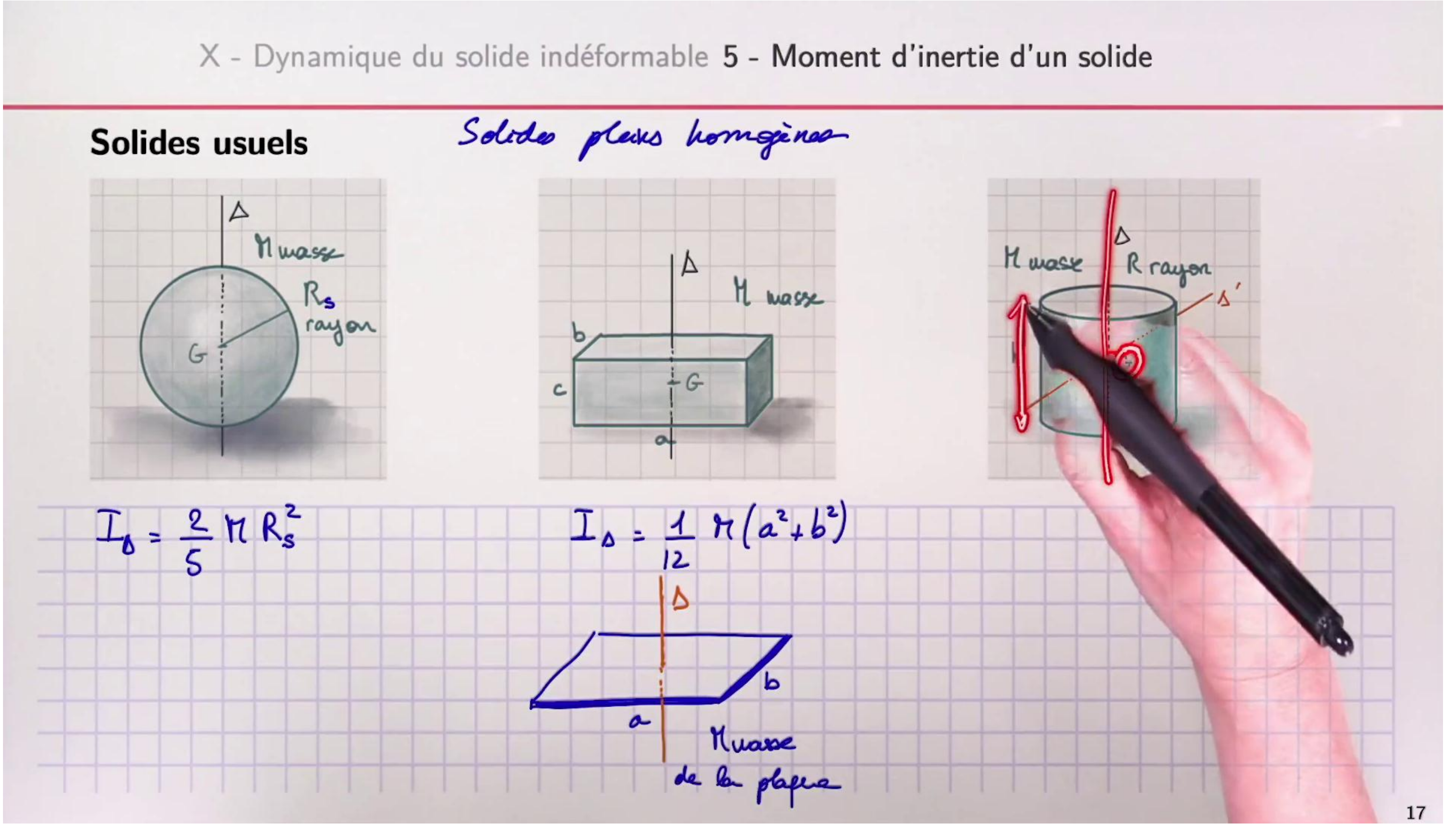


Nous allons maintenant nous intéresser aux solides usuels : sphères, parallélépipèdes rectangles et cylindres pleins. Puisque vous n'avez pas vu les intégrales triples sur les volumes, je vais vous donner les moments d'inertie de ces solides. Pour une sphère pleine, homogène, de masse M, de rayon R, et pour un axe Delta passant par le centre de masse G, le moment d'inertie IΔ est égal à 2/5 de M r². Faites attention dans les notations, car nous appelons ici R le rayon de la sphère. C'est aussi la grandeur que nous avions utilisée pour caractériser la distance à l'axe dans le système. Je suis désolée, c'est souvent le cas. On peut éventuellement s'assurer qu'on ne mélange pas en appelant le rayon de la sphère Rs. Dans les livres, vous verrez souvent ce R tout seul, utilisé soit pour un rayon, soit pour la distance à l'axe. Prenons maintenant un parallélépipède rectangle de masse M, de côtés a, b et c. Considérons un axe Delta parallèle à l'arête de longueur c et passant par le centre de masse grand G. À nouveau, c'est un solide plein homogène. Tous ces solides, d'ailleurs, sont pleins homogènes. Le moment d'inertie par rapport à cet axe Delta vaut 1/12 de M a² plus b².

Notes

Summary

6m 27s

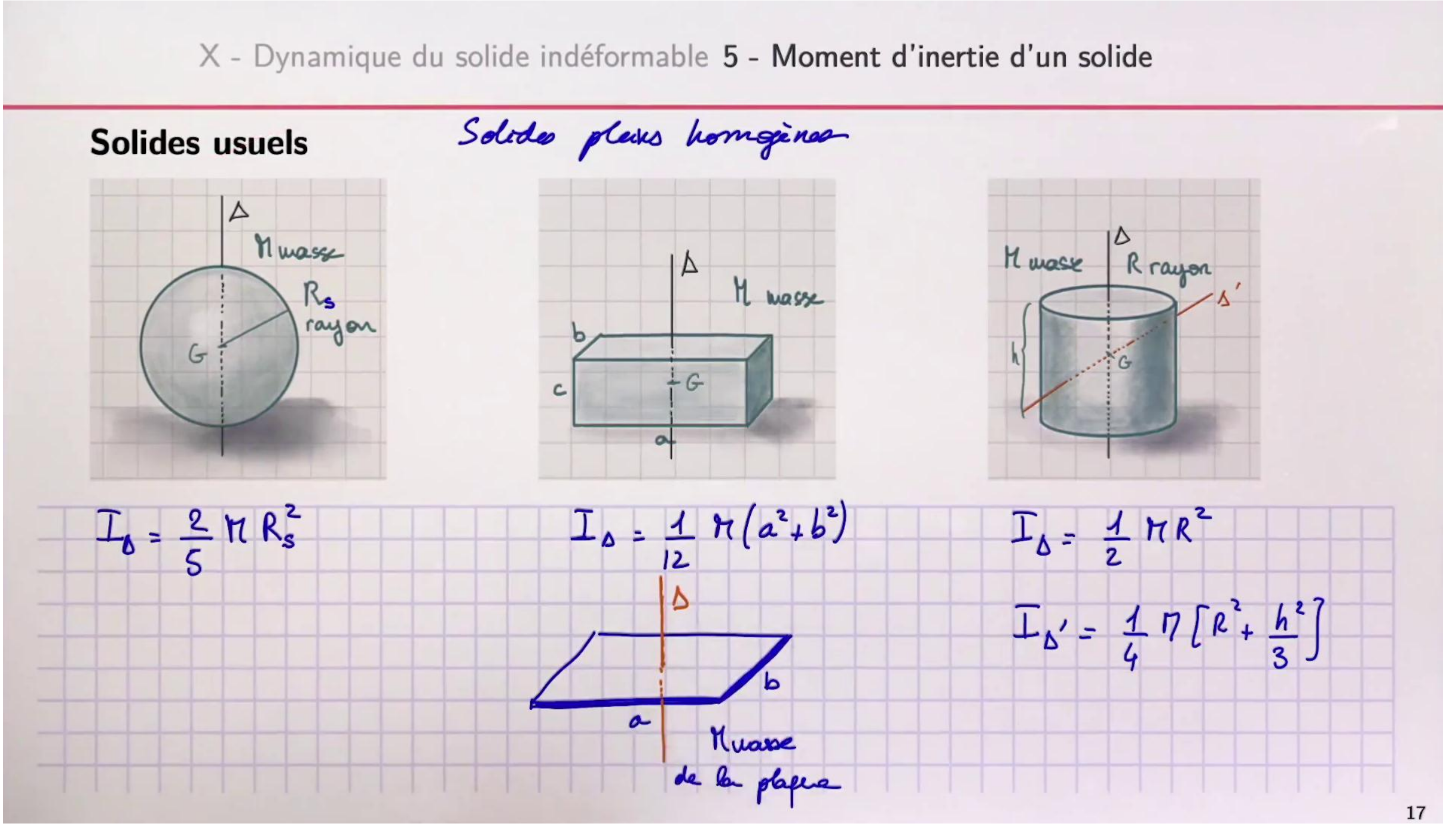


On remarque au passage que la grandeur c n'intervient pas dans le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à cette arête. C'est normal, car ce qui est important, c'est la répartition de masse par rapport à l'axe Delta. Si j'étale cette masse de manière plus importante avec un objet qui aura une longueur c plus grande pour la même masse, donc, une densité plus faible, mais les mêmes grandeurs a et b, le moment d'inertie restera le même. Cela signifie que si je considère une plaque rectangulaire infiniment mince de côtés a et b, donc, un objet à deux dimensions, le moment d'inertie par rapport à un axe Delta passant par le centre de cette plaque sera également 1/12 de M a² plus b², si M est la masse de la plaque. Dans le cas où cette plaque devient une tige cela se revient à dire que nous n'avons plus la grandeur b qui est maintenant condensée sur une ligne, b devient égal à 0 et on retrouve bien 1/12 de M (a²) comme pour la tige de longueur l. Pour un cylindre plein homogène de rayon R et de hauteur h, prenons Delta, l'axe du cylindre, passant donc par le centre de masse. À nouveau, la hauteur h n'aura pas l'influence. Elle ne change pas la répartition de masse par rapport à l'axe.

Notes

Summary

7m 59s

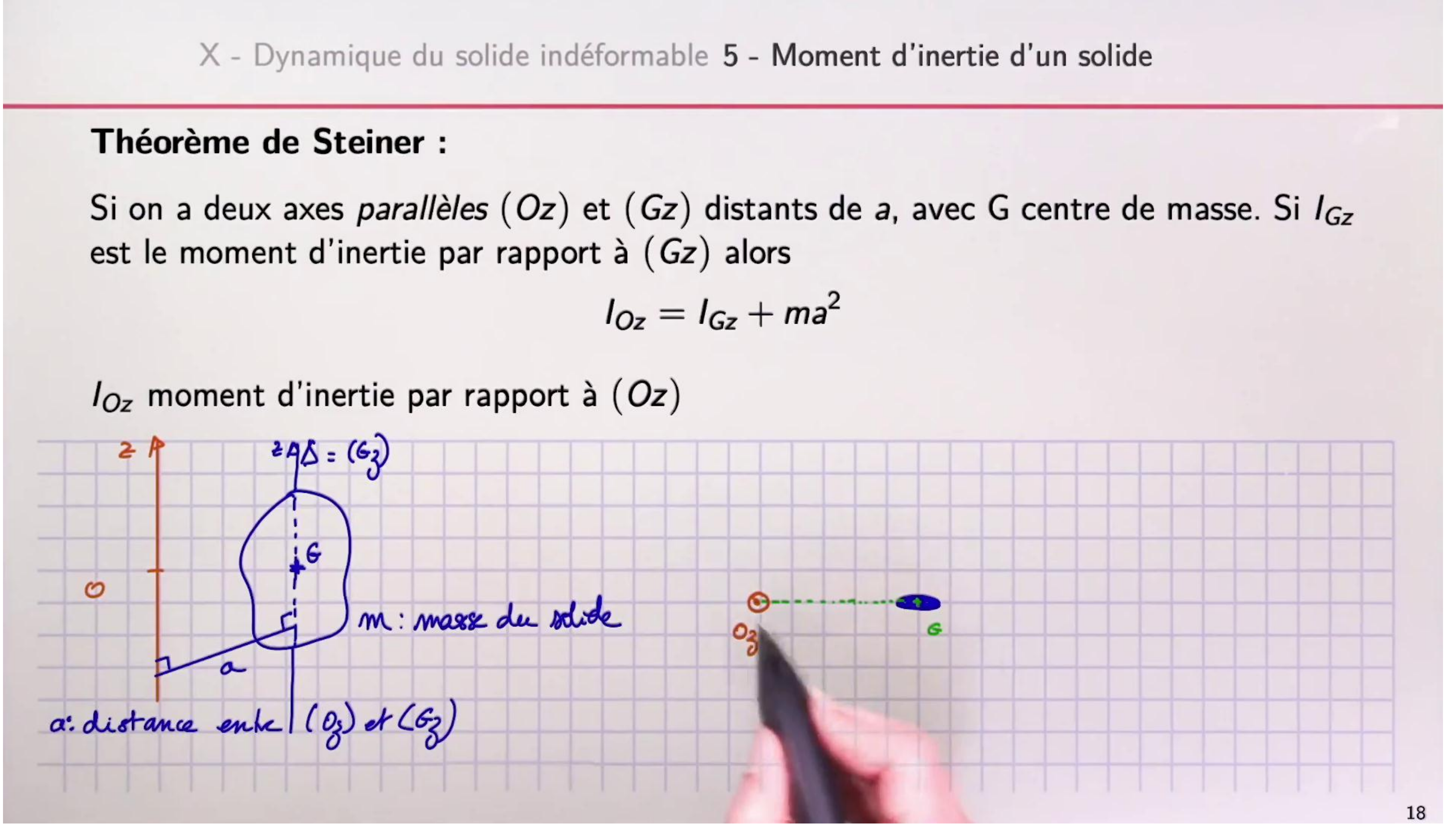


Le moment d'inertie par rapport à Delta est ici égal à 1/2 de M R². Pour le cylindre creux, nous avions M R², pour le cylindre plein, c'est 1/2 de M R², donc plus faible que le cylindre creux de même masse. Si je considère maintenant un axe Delta prime, qui est un autre axe de symétrie du cylindre, passant par le centre de masse et perpendiculaire à l'axe du cylindre. Ici, aussi bien h que R auront une influence, IΔ' sera égal à 1/4 de M multiplié par R² plus h²/3. Vous devez connaître les moments d'inertie de ces solides.

Notes

Summary

9m 30s



Le théorème de Steiner nous permet de calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à axe, parallèle à un axe passant par le centre de masse, mais distant d'une certaine distance. Supposons que nous ayons un solide S. Nous connaissons le moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe Delta qui passe par le centre de masse. Delta est donc l'axe Gz. Prenons un axe Oz parallèle à Delta. Cet axe Oz est à la distance D de distance de l'axe Delta. Pour connaître la distance D, nous tracons une droite qui est perpendiculaire à ces deux axes et nous regardons la longueur du segment entre le premier et le deuxième axe. Appelons cette longueur a. À ce moment-là, le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz, IOz, est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe Gz plus ma² si m est la masse du solide. On peut intuitivement comprendre cette relation de la manière suivante. Supposons que le solide ait une forme allongée, un peu comme une tige. Son centre de masse G est ici, mais il tourne autour d'un axe de rotation qui est l'axe OZ. Lorsque le solide tourne d'un angle Thêta, je vais le retrouver pour un temps avec sa forme allongée en direction de Oz.

Notes

Summary

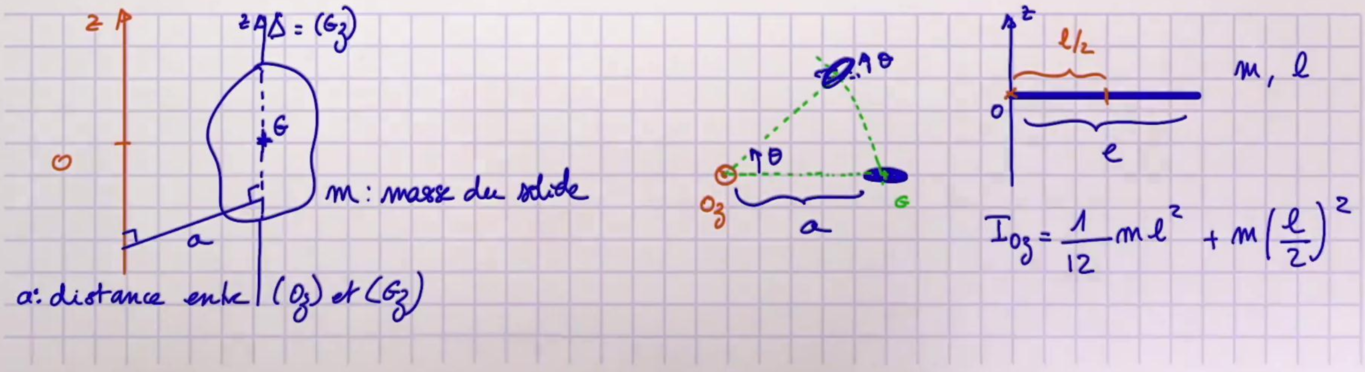
10m 23s

Théorème de Steiner :

Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a, avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors

$$I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2$$

I_{Oz} moment d'inertie par rapport à (Oz)



18

Par rapport à sa position initiale, il a également tourné autour de son centre de masse d'un angle Thêta. J'ai donc à la fois une rotation de l'ensemble de cette masse autour de l'axe Oz, ce qui, dans ce mouvement, pour cette géométrie, me donne un moment d'inertie ma^2, et j'ai en plus, la rotation avec la même vitesse angulaire autour du centre de masse. Pour cette rotation, le moment d'inertie est IGz. Le moment d'inertie du solide dans la rotation autour de Oz sera donc la somme des deux. Un exemple d'application est celui d'une tige mince tournant autour d'une de ses extrémités. Cette tige a une masse m et une longueur l. Le centre de masse, puisqu'elle est homogène, est à l/2. La distance entre l'axe de rotation et le centre de masse est donc l/2. Appelons Oz l'axe de rotation. Le moment d'inertie par rapport à Oz sera égal, d'après le théorème de Steiner, au moment d'inertie par rapport au centre de masse, or le moment d'inertie d'une tige mince par rapport à son centre de masse est 1/12 de ml^2, plus le moment d'inertie correspondant à la distance l/2 et j'ai toujours la masse m, donc, j'aurai $ml/2^2$. Je peux mettre le ml^2 en facteur.

Notes

Summary

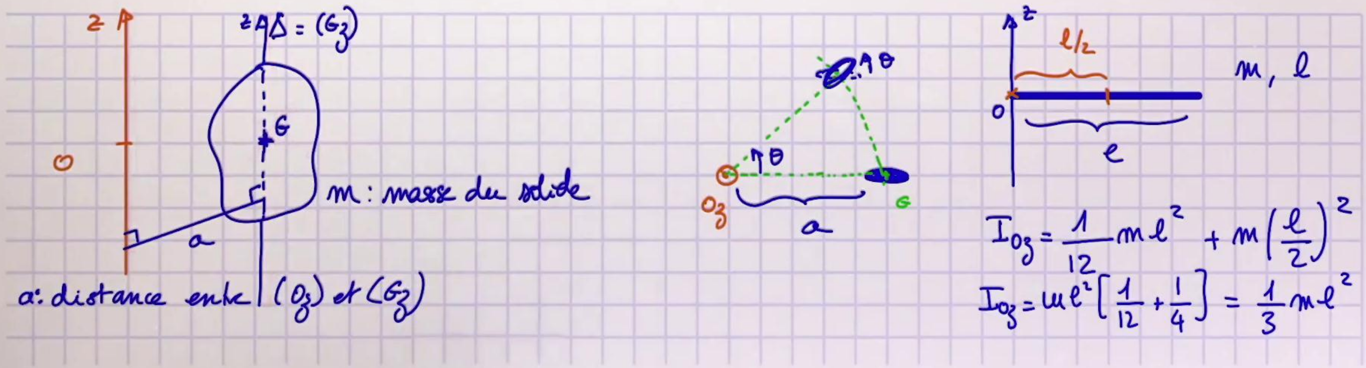
12m 05s

Théorème de Steiner :

Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a, avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors

$$I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2$$

I_{Oz} moment d'inertie par rapport à (Oz)



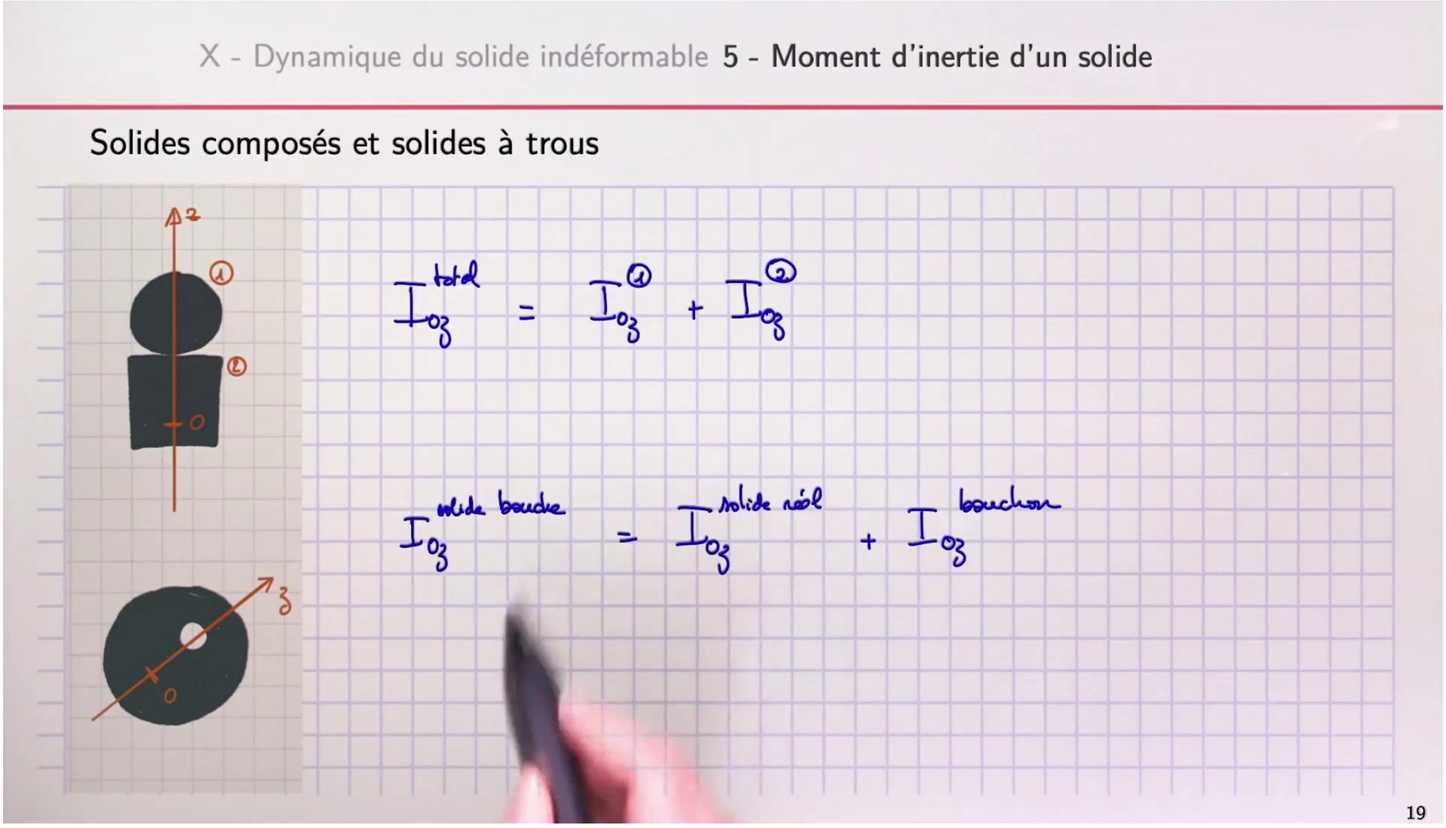
18

ml² facteur de 1/12 + 1/4 cela va me donner un douzième plus trois douzième trois et un quart, quatre douzième, c'est un tiers. Un tiers de ml². J'ai donc pu recalculer facilement le moment d'inertie de cette tige par rapport à un autre axe, sans avoir besoin de refaire l'intégration. Ce théorème de Steiner vous permettra de calculer les moments d'inertie des solides vus précédemment, lorsque leur axe de rotation ne passe pas par le centre de masse.

Notes

Summary

13m 52s

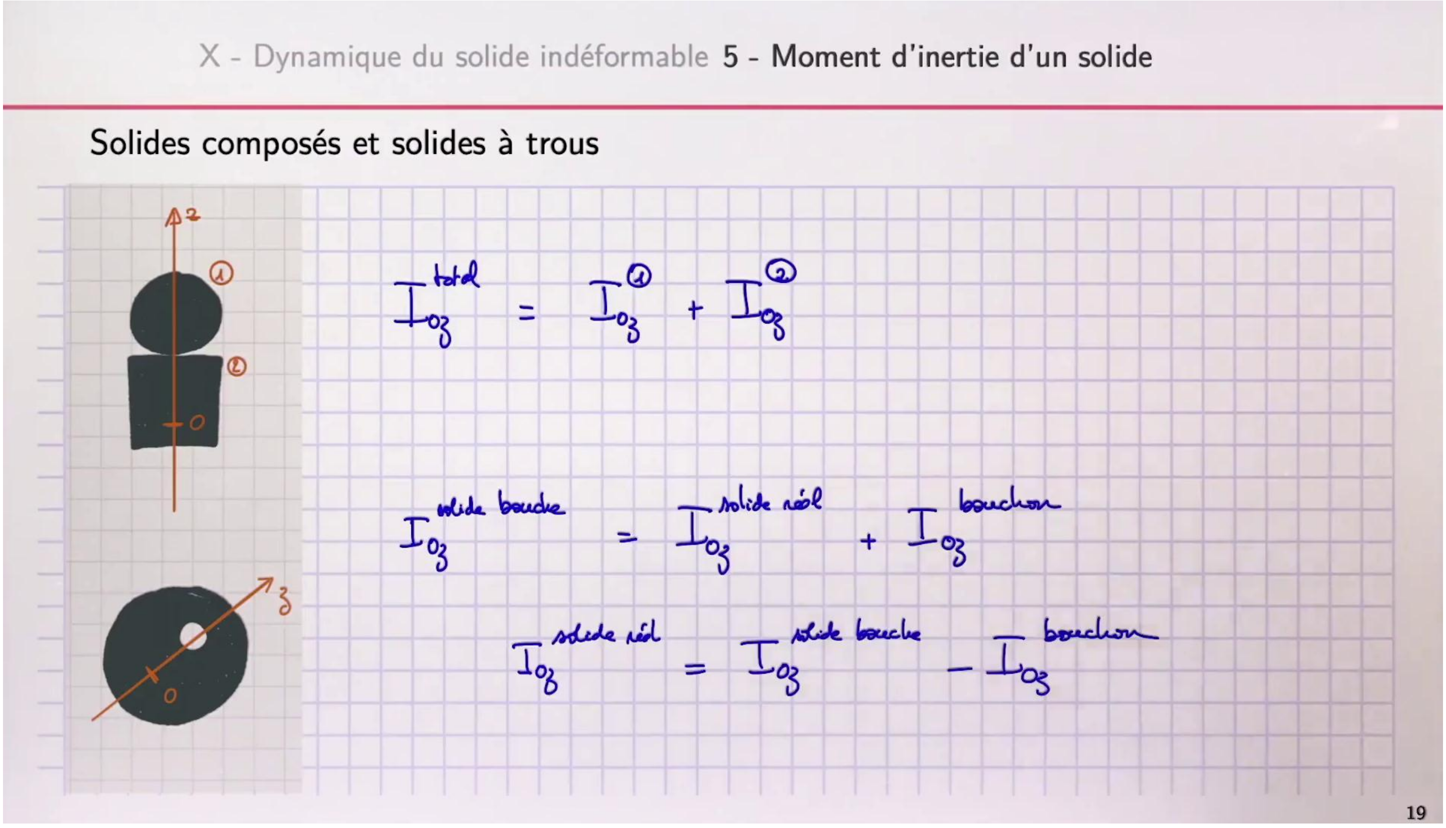


Si nous avons maintenant des solides composés et des solides à trous. Le solide composé ici de deux morceaux 1 et 2. Je cherche le moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe Oz. Comme le moment d'inertie est l'intégrale sur le volume, je peux séparer mon intégrale en deux morceaux, calculer le moment d'inertie du premier, le moment d'inertie du second, et nous voyons tout de suite que le moment d'inertie Oz du solide total va être égal au moment d'inertie par rapport à Oz du solide 1 plus le moment d'inertie par rapport à Oz du solide 2. Si nous avons un solide à trou et que nous cherchons le moment d'inertie par rapport à un axe Oz. La logique est la même que pour le calcul du centre de masse d'un solide à trou. Nous allons boucher le trou avec un bouchon et utiliser le théorème de superposition de tout à l'heure. Le moment d'inertie par rapport à Oz du solide bouché est égal au moment d'inertie par rapport à Oz du solide réel, plus le moment d'inertie par rapport à Oz du bouchon. Ce que nous cherchons ici, c'est le moment d'inertie du solide réel. Je vais passer ce morceau de l'autre côté et obtenir le moment d'inertie du solide réel qui est égal au moment d'inertie du solide bouché moins le moment d'inertie du bouchon.

Notes

Summary

14m 32s



Le truc important auquel il faut faire attention, c'est que c'est bien toujours le même axe. Donc, c'est bien Oz, Oz, Oz. Je ne peux pas mélanger les axes.

Notes

Summary

16m 13s

Voilà, avec le contenu de cette vidéo, vous avez les outils nécessaires pour calculer le moment d'inertie des solides que vous pourriez rencontrer en exercices.

Notes

Summary

16m 24s