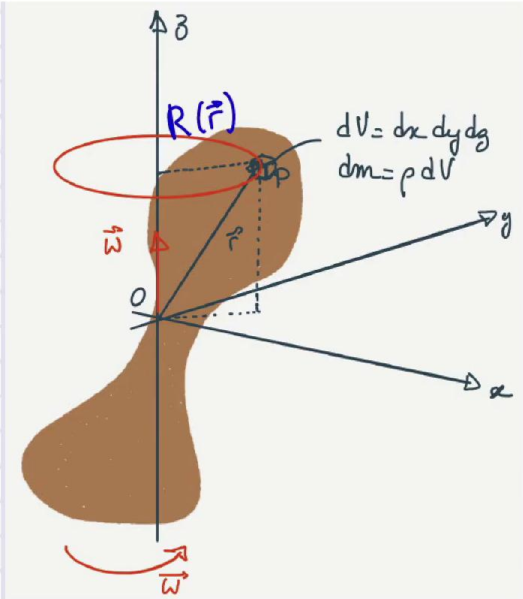
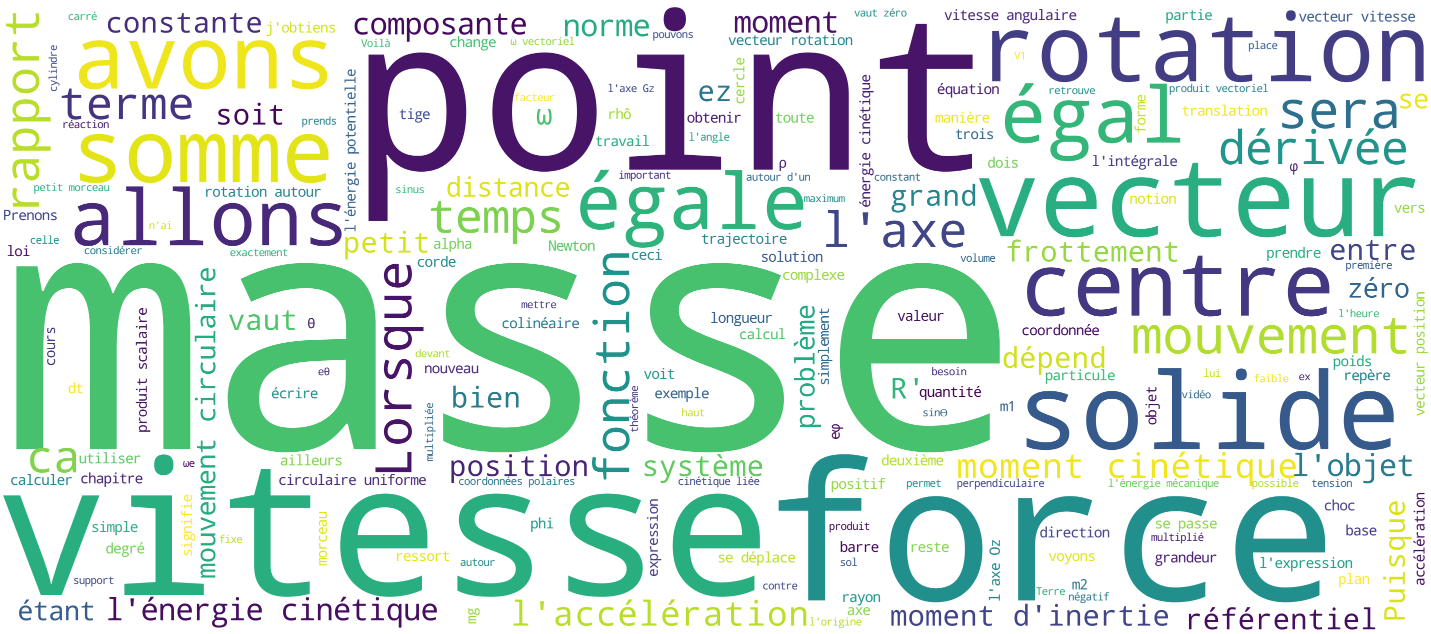


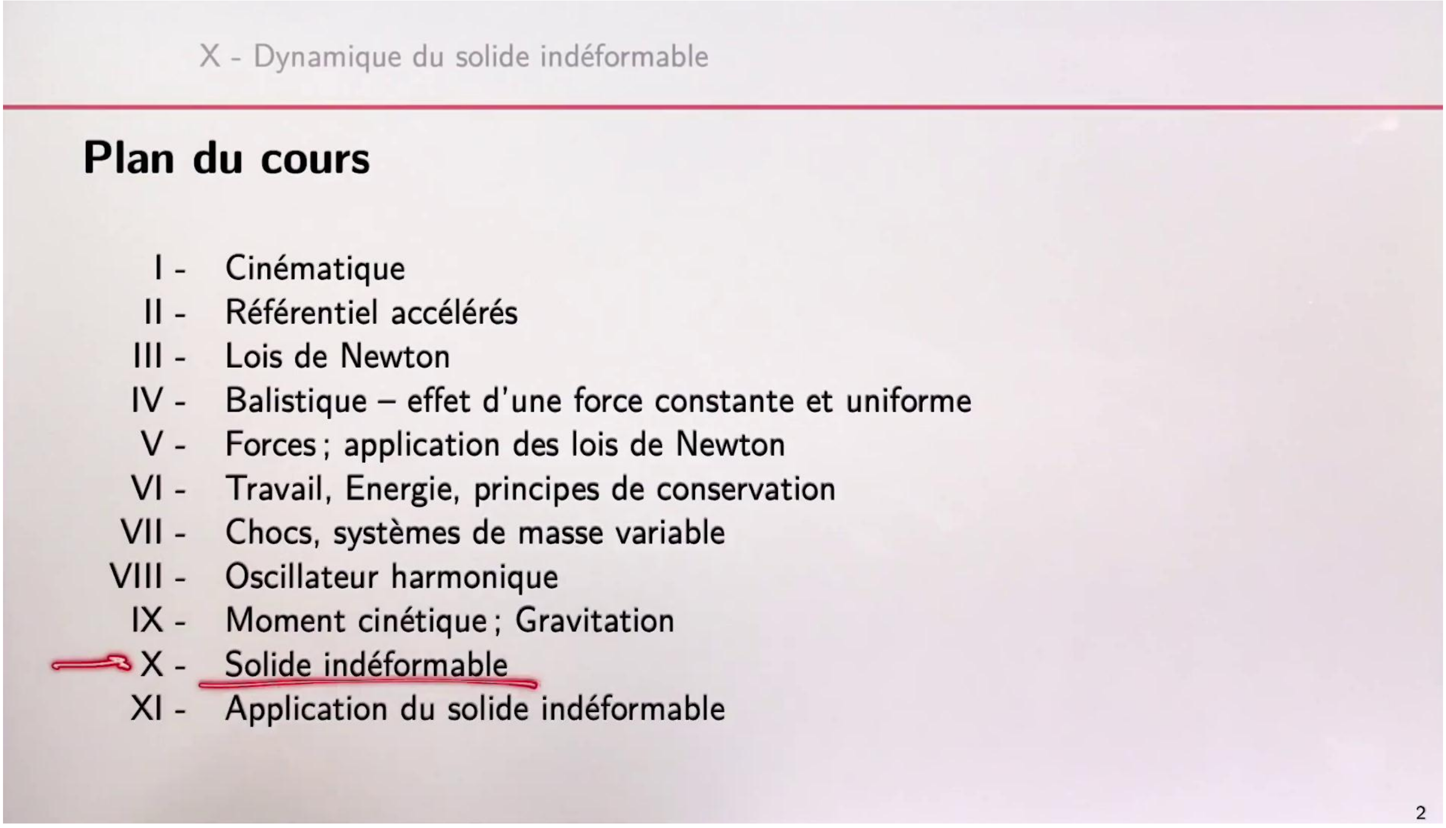
Energie cinétique de rotation

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

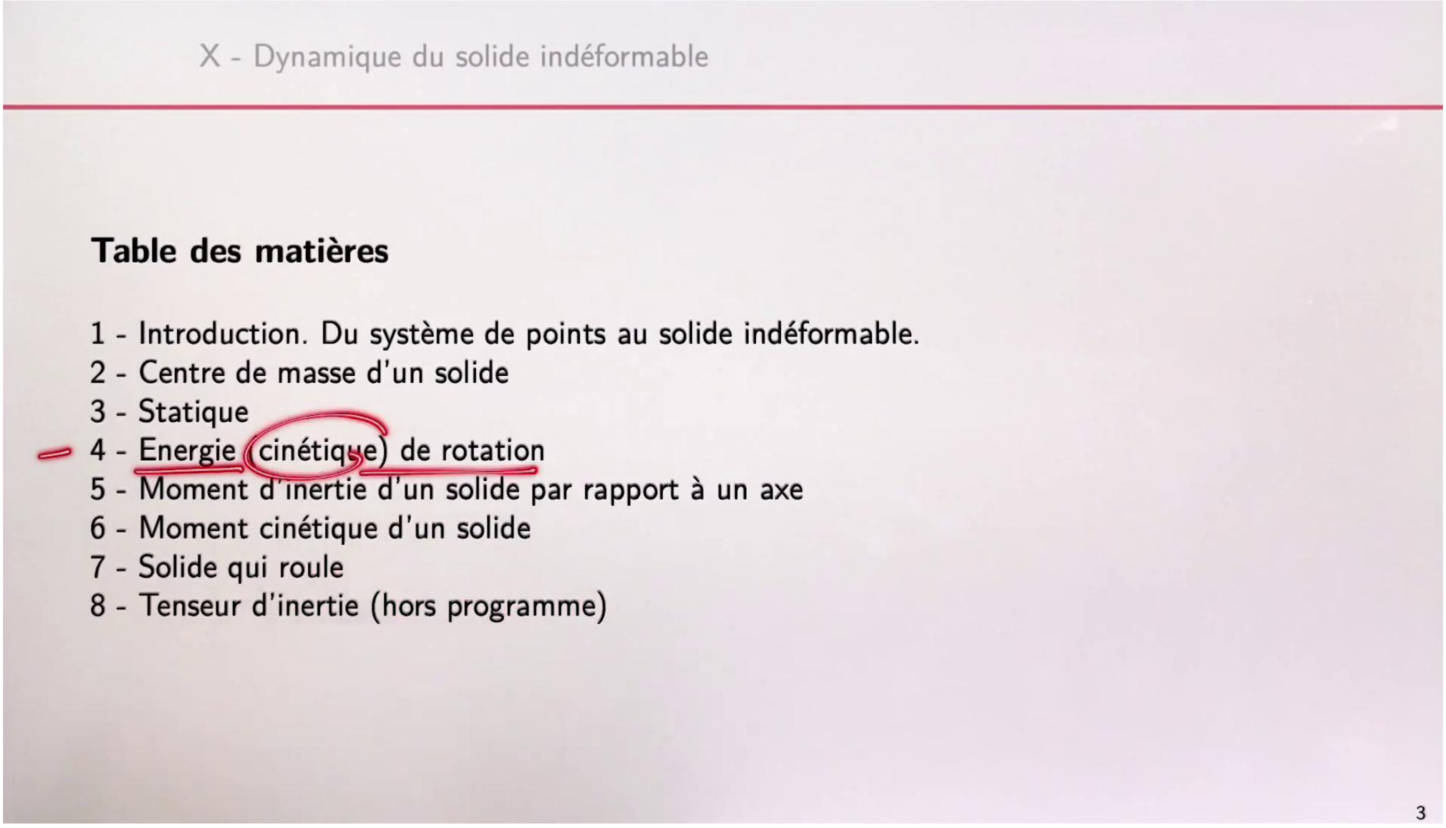


Un solide en mouvement qui a donc une translation du centre de masse et une rotation autour du centre de masse, stocke de l'énergie cinétique. Nous avons vu jusqu'à présent l'énergie cinétique liée à la translation du centre de masse dans laquelle toute la masse est concentrée au centre de masse. Nous allons voir dans cette vidéo la partie de l'énergie stockée dans le solide correspondant à la rotation autour du centre de masse. Nous sommes dans le chapitre 10, sur le solide indéformable.

Notes

Summary

0m 05s



Et nous allons voir l'énergie cinétique de rotation qu'on appelle en général énergie de rotation.

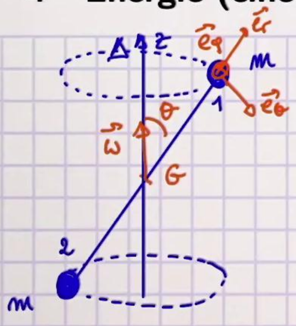
Notes

Summary

0m 40s

X - Dynamique du solide indéformable 4 - Energie (cinétique) de rotation

4 - Energie (cinétique) de rotation



$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

Les masses ont un mouvement circulaire uniforme

$\vec{OP_1} = r\,\vec{e}_r \qquad r = \frac{l}{2}$

13

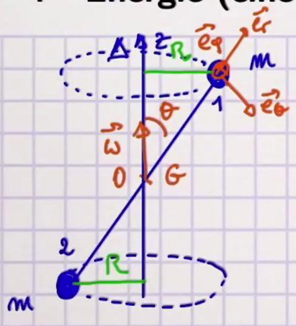
Nous allons commencer par considérer un solide extrêmement simplifié qui nous suivra un certain temps pendant ce cours. Je considère une tige dont je vais négliger la masse, à laquelle j'attache aux deux extrémités deux masses identiques valant m. Le centre de masse de cette tige est bien entendu en son centre. Elle peut tourner autour d'un axe qui passe par G. C'est l'axe Gz. Cette petite animation représente le système en question. Nous voyons la tige qui tourne autour de l'axe Gz. Chaque masse décrit dans le mouvement, un mouvement circulaire uniforme. Les masses m1 et m2 ont donc un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe Gz. Le vecteur rotation Omega, est constant et égal à ωez. Pour étudier ce système, je vais me placer en coordonnées sphériques. Je vais avoir l'angle Thêta depuis la verticale. L'angle Phi correspondra à la rotation des masses et la distance r sera fixe et égale à la moitié de la longueur de la tige. Les vecteurs de base des coordonnées sphériques sont er, eθ et eφ. Je vais numéroter mes masses, Un et deux. La masse m1 est en P1. OP1 est égal à Rer, r étant égal à l/2, moitié de la longueur de la tige. Je vais appeler grand R la distance entre la masse et l'axe de rotation.

Notes

Summary

0m 47s

4 - Energie (cinétique) de rotation



$\vec\omega = \omega \vec e_z$

Les masses ont un mouvement circulaire uniforme

$\vec{OP_1} = r\vec e_r$ $\quad r = \frac{\ell}{2}$ $\quad R = r\sin\theta$

m_1 vitesse $\vec v_1 = R\omega\vec e_\varphi$

Energie cinétique $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 R^2\omega^2 = \frac{1}{2} m R^2\omega^2$

m_2 " " $= \frac{1}{2} m R^2\omega^2$

$$E_{c,rot} = 2\,\frac{1}{2} m R^2\omega^2 = \frac{1}{2}(2m)R^2\,\omega^2$$

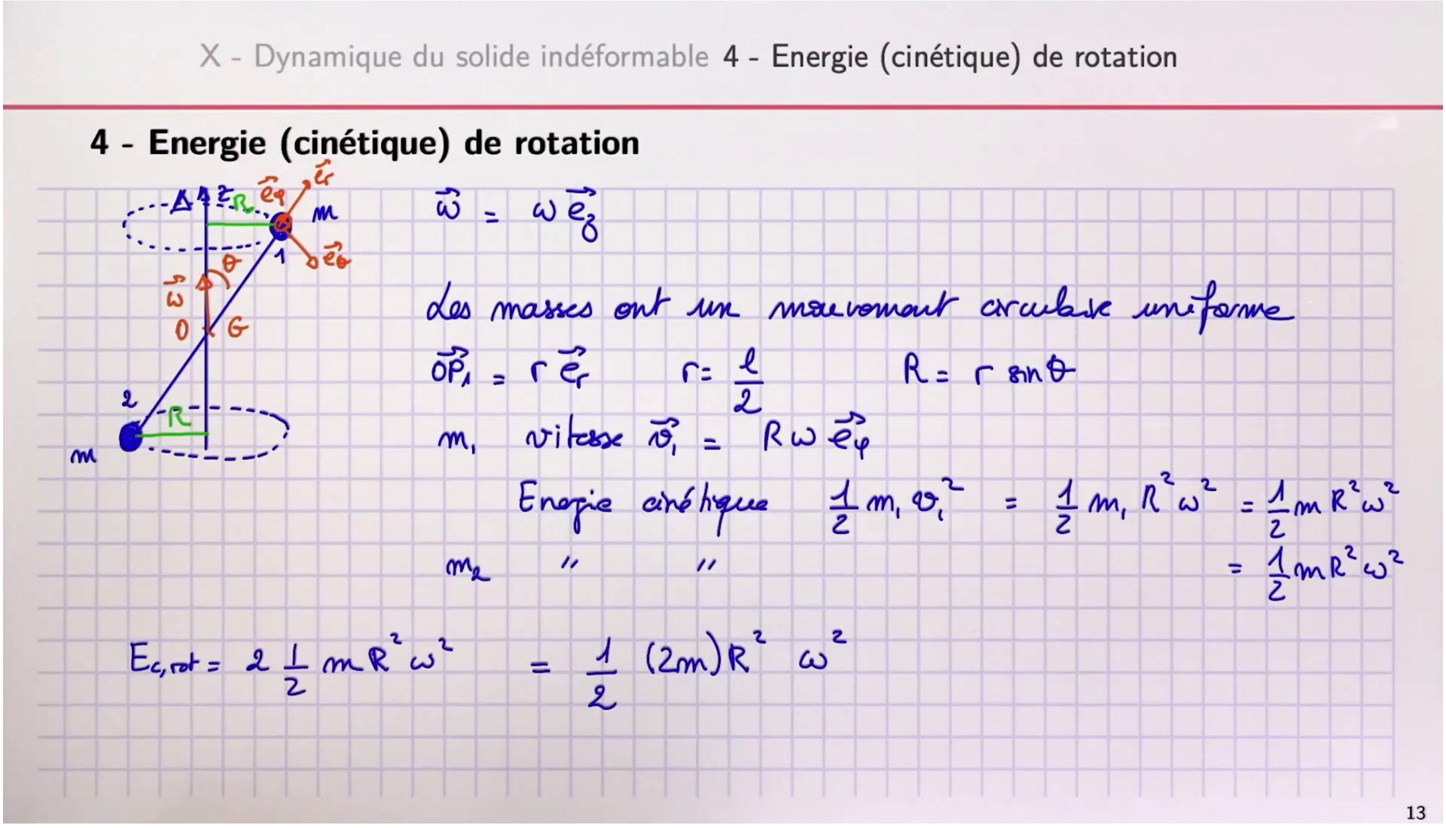
13

Nous utiliserons souvent ce grand R et il faut faire bien attention de ne pas confondre petit r, la distance GP1, avec grand R qui est la distance à l'axe de rotation. Bien entendu, ici, O, origine de mon référentiel, est confondu avec le centre de masse G. Géométriquement, on voit que grand R est égal à petit r sinus Thêta. La masse m1 a une vitesse v1 qui vaut rωeφ. Puisque m1 décrit un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire omega et avec le rayon grand R. Elle a donc une énergie cinétique qui vaut 1/2 de m1 v1², soit 1/2 de m1 R² ω². Comme les deux masses sont identiques et la masse m, c'est 1/2 de m R² ω². La masse 2 décrit également un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse angulaire oméga. Elle aura donc la même énergie cinétique. L'énergie cinétique totale de ce mouvement de rotation sera donc égale à 2 fois 1/2 de m R² ω² que je peux réécrire en étant égal à 1/2 de 2m R² multiplié par ω². C'est l'énergie cinétique emmagasinée par la rotation autour de l'axe Gz. Si maintenant le solide, en plus de tourner, se déplace dans l'espace, j'aurai l'énergie cinétique liée à la rotation plus une énergie cinétique liée à la translation.

Notes

Summary

2m 45s

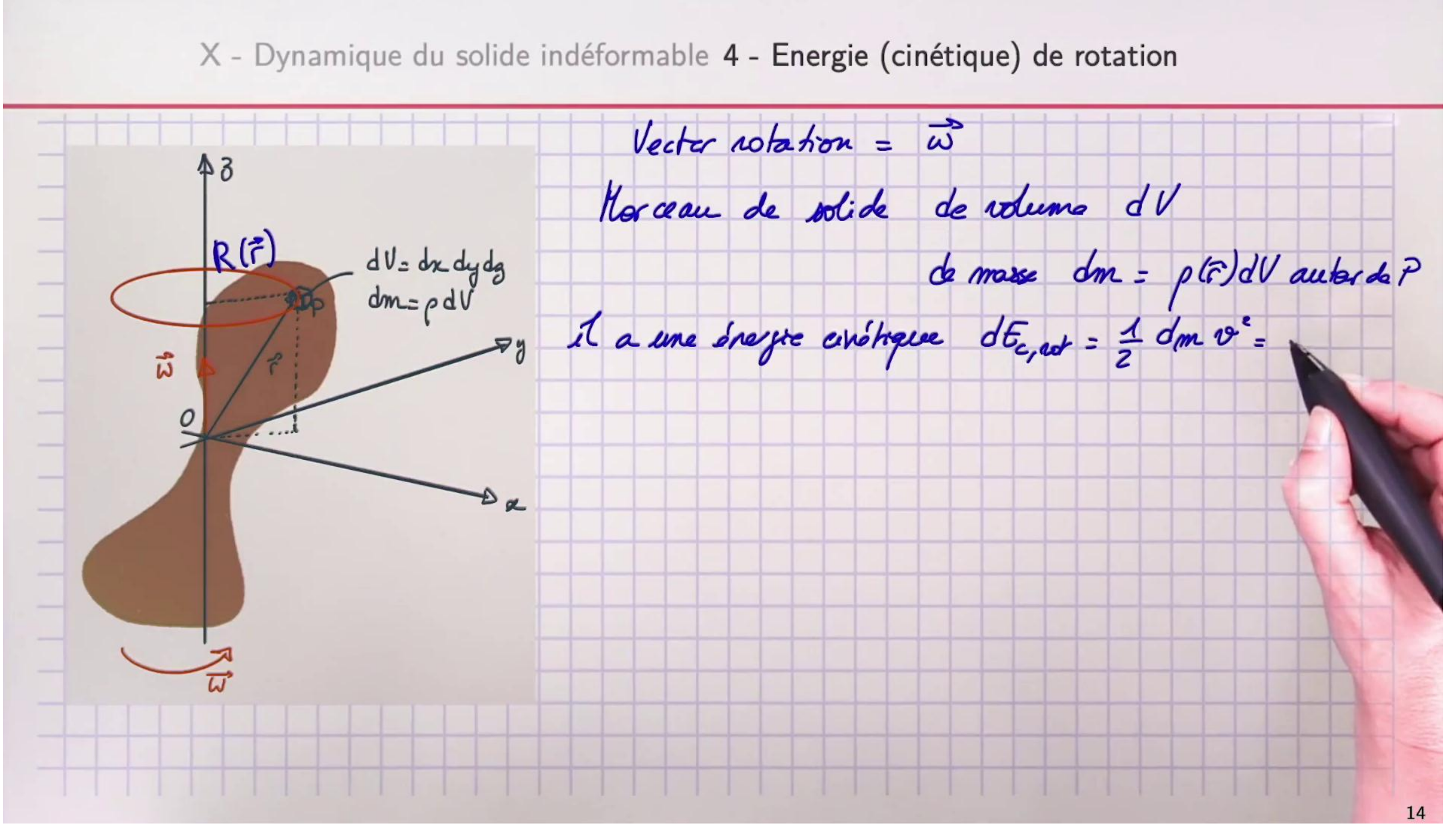


J'aurai la vitesse de translation qui sera la vitesse du centre de masse et l'énergie cinétique liée à cette translation sera 1/2 de 2m Vg^2. Je ne regarde là donc que l'énergie cinétique liée à la rotation. Nous voyons donc que cette énergie cinétique de rotation peut être séparée en deux termes. Une partie qui est 1/2 de $(2m)R^2$ qui ne dépend que des masses et de la façon dont elles sont placées par rapport à l'axe de rotation, mais pas de la vitesse angulaire de rotation, multipliée par la partie qui dépend de la vitesse angulaire de rotation. J'ai donc séparé cette partie géométrique du solide de la partie rotation. Nous allons voir maintenant ce qui se passe pour un solide quelconque.

Notes

Summary

4m 49s

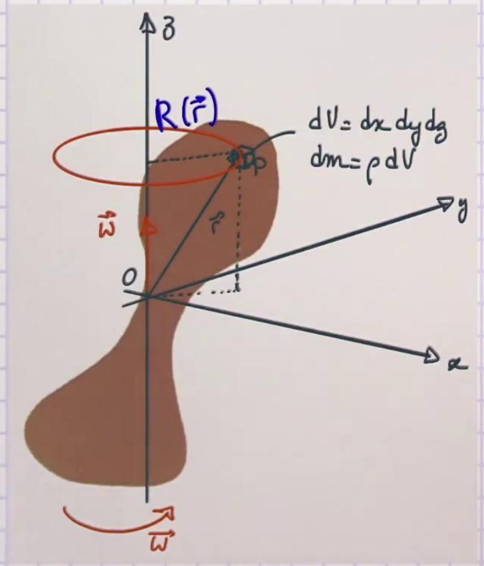


Je suppose que j'ai un solide de forme générale qui tourne autour de l'axe Oz. Le vecteur rotation de ce solide est Omega. Intéressons-nous maintenant à un point particulier dans le solide que j'appelle P. Dans la rotation, je peux considérer ce point P comme étant la petite masse de tout à l'heure à la distance R du point O. Autour de ce point P, je vais prendre un petit morceau de solide. Ce petit morceau de solide a un volume dV. Ce volume dV a une masse dm. La masse de ce petit morceau de solide est la masse volumique locale autour de P, multipliée par le volume dV. Je peux considérer cela comme ma petite masse de tout à l'heure. Cette masse décrit un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire Omega et à la distance grand R de l'axe de rotation. J'ai donc la distance grand R qui dépend du point P, donc du vecteur position R de P, rayon du mouvement circulaire uniforme de P. Si je prends le morceau de solide de volume dV qui a une masse dm qui vaut ρ de r dV autour de P, ce morceau de solide a une énergie cinétique qui vaut dEc de rotation 1/2 de dm v^2. v^2 est comme tout à l'heure égal à $R\omega^2$. C'est donc 1/2 de $dm(R\omega)^2$ et dm vaut ρdV.

Notes

Summary

5m 43s



Vecteur rotation = $\vec{\omega}$

Morceau de solide de volume dV

de masse $dm = \rho(\vec{r})dV$ autour de P

il a une énergie cinétique $dE_{c,rot} = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm\, (R\omega)^2$

$$dE_{c,rot} = \frac{1}{2} (\rho(\vec{r})dV)\, R^2\omega^2 = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) R^2 \omega^2\, dV$$

$$E_{c,rot} = \int_{Vol} \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) R^2\omega^2\, dV = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{vol} \rho(\vec{r}) R^2\, dV$$

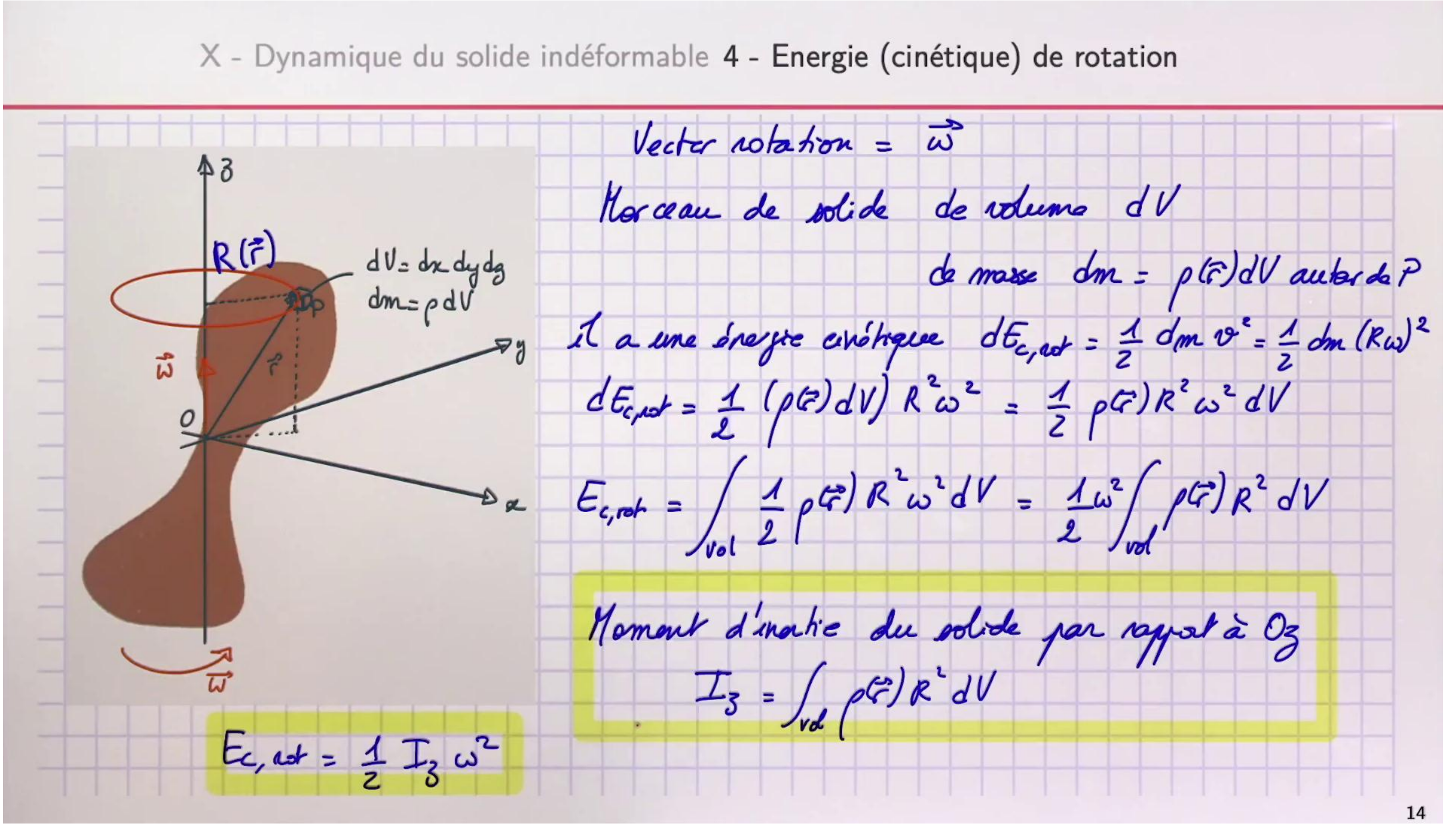
14

Réorganisé, je peux écrire que dEc rot vaut 1/2 de ρ de r grand R^2 ω^2 dV. Ce n'est pas un rho point. Lorsque je voudrai obtenir l'énergie cinétique de rotation totale, il va falloir que je somme sur tous les petits morceaux de solide. Chaque petit morceau de solide décrit un mouvement circulaire uniforme. Le rayon de ce mouvement circulaire uniforme dépend de la distance à l'axe grand R. Lorsque le morceau de solide est sur l'axe, cette distance est zéro. Plus le morceau de solide est loin de l'axe, plus ce rayon est grand. Donc ce grand R dépend vraiment du morceau de solide considéré, donc de petit r. Puisque je dois faire l'intégrale sur le volume complet, je vais à nouveau avoir une intégrale volumique. Mon énergie cinétique de rotation totale, Ec,rot, sera donc l'intégrale sur le volume du solide des énergies cinétiques de rotation partielles. Dans cette intégrale, le 1/2 ne dépend pas de la position, et le Omega carré, qui est la vitesse de rotation au carré, est le même pour tout le monde. Je peux aussi la sortir de l'intégrale. J'ai donc à nouveau séparé mon énergie cinétique de rotation en un terme qui dépend de la vitesse angulaire.

Notes

Summary

7m 44s



Donc si je change cette vitesse angulaire, ça changera l'énergie cinétique de rotation. Et un terme qui dépend de la répartition de la masse autour de l'axe de rotation. Donc, ce terme là ne dépend que de la façon dont le solide est arrangé autour de l'axe de rotation. Cela dépend donc de la géométrie du solide et de l'axe choisi, mais pas de la vitesse de rotation. Nous allons donc définir le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz. Ce moment d'inertie sera noté Iz et il sera égal à l'intégrale sur le volume de ρr R^2 dV. Ce moment d'inertie est une grandeur qui dépend de la géométrie du solide et de l'axe de rotation choisi. Avec cette définition du moment d'inertie, je peux écrire que l'énergie cinétique de rotation est égale à 1/2 de Iz ω^2. Nous verrons un peu plus tard pourquoi nous avons choisi de laisser le 1/2 devant et pas de le mettre dans la définition de Iz. On remarque au passage que cela ressemble grandement à la formule de l'énergie cinétique de translation 1/2 de mv carré. J'ai 1/2. Le rôle joué par la masse est maintenant joué par le moment d'inertie, et le rôle joué par la vitesse est joué par la vitesse de rotation. On voit donc que ce moment d'inertie est une valeur très importante pour le solide.

Notes

Summary

9m 22s

Résumé

$$E_{C,\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r)\, d\vec{r} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$

Avec I_z moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz)

$$I_z = \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r)\, d\vec{r}$$

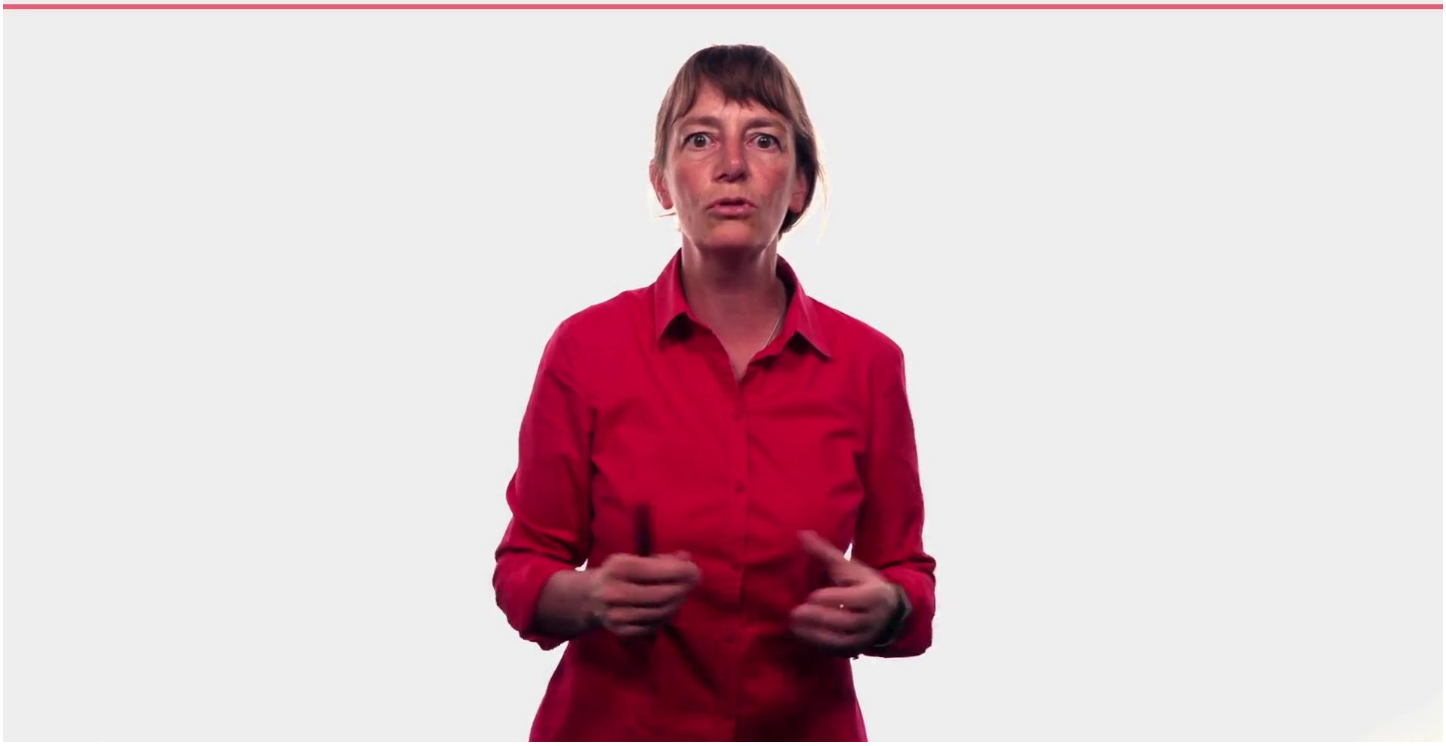
15

En résumé, nous avons vu que l'on peut obtenir l'énergie cinétique de rotation comme étant 1/2ω^2 multiplié par une grandeur qui est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe considéré. Ec,rot égal à 1/2 de ω^2 Iz. Ce moment d'inertie est donc une grandeur très importante pour le solide qui dépend de l'axe de rotation choisi et de la répartition de masse du solide autour de cet axe.

Notes

Summary

11m 02s



Voilà, nous avons vu la notion d'énergie cinétique de rotation ou énergie de rotation liée au fait que le solide a un mouvement de rotation autour du centre de masse. Cela nous a amené à la définition d'une grandeur appelée moment d'inertie d'un solide pour une rotation autour d'un axe. Et cette grandeur est très importante et nous suivra dans le reste du cours sur le solide.

Notes

Summary

11m 36s