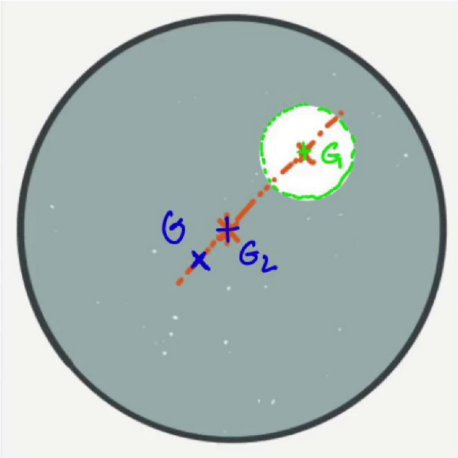
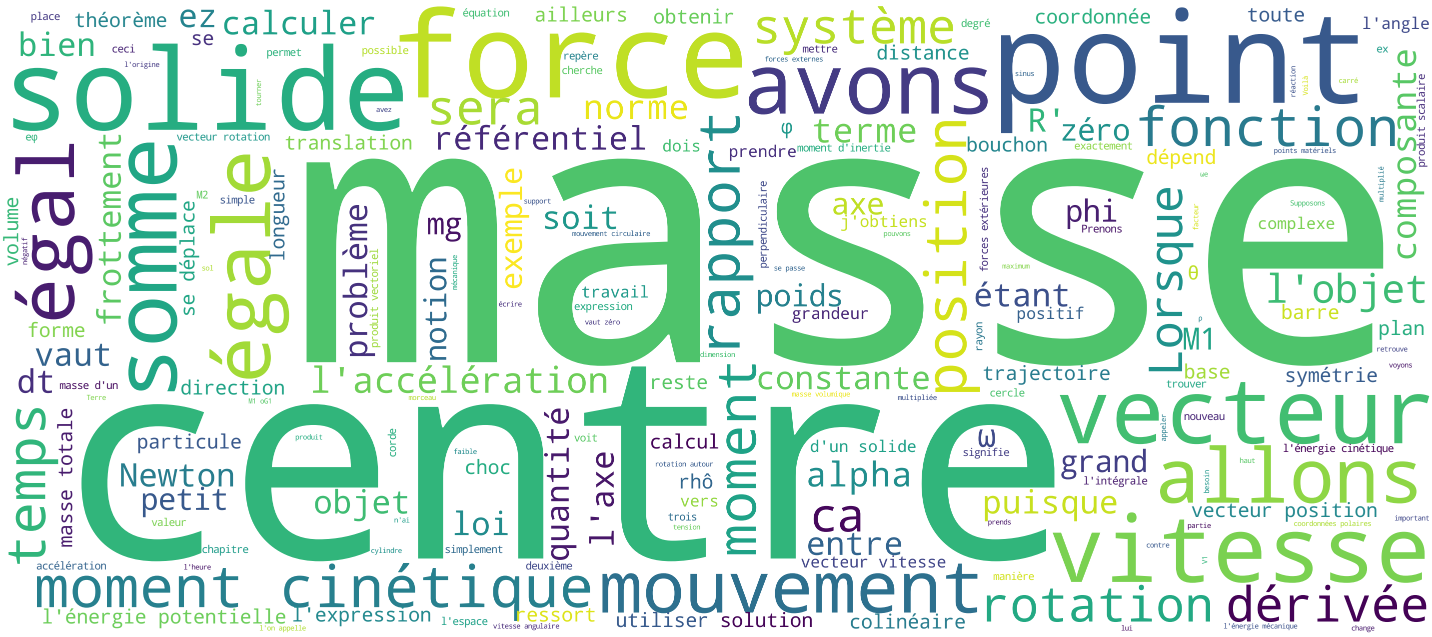


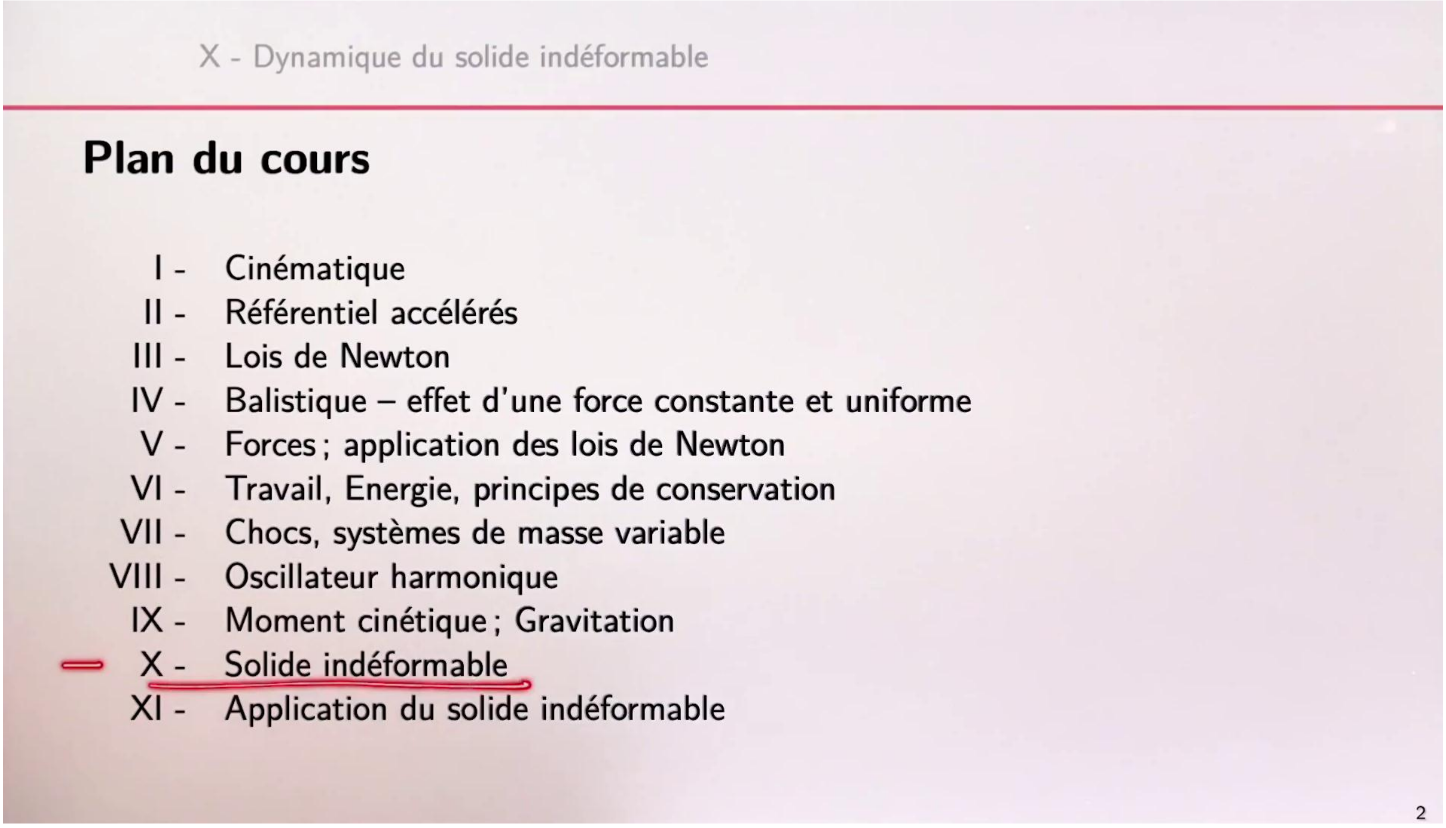
Centre de masse et lois de Newton

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

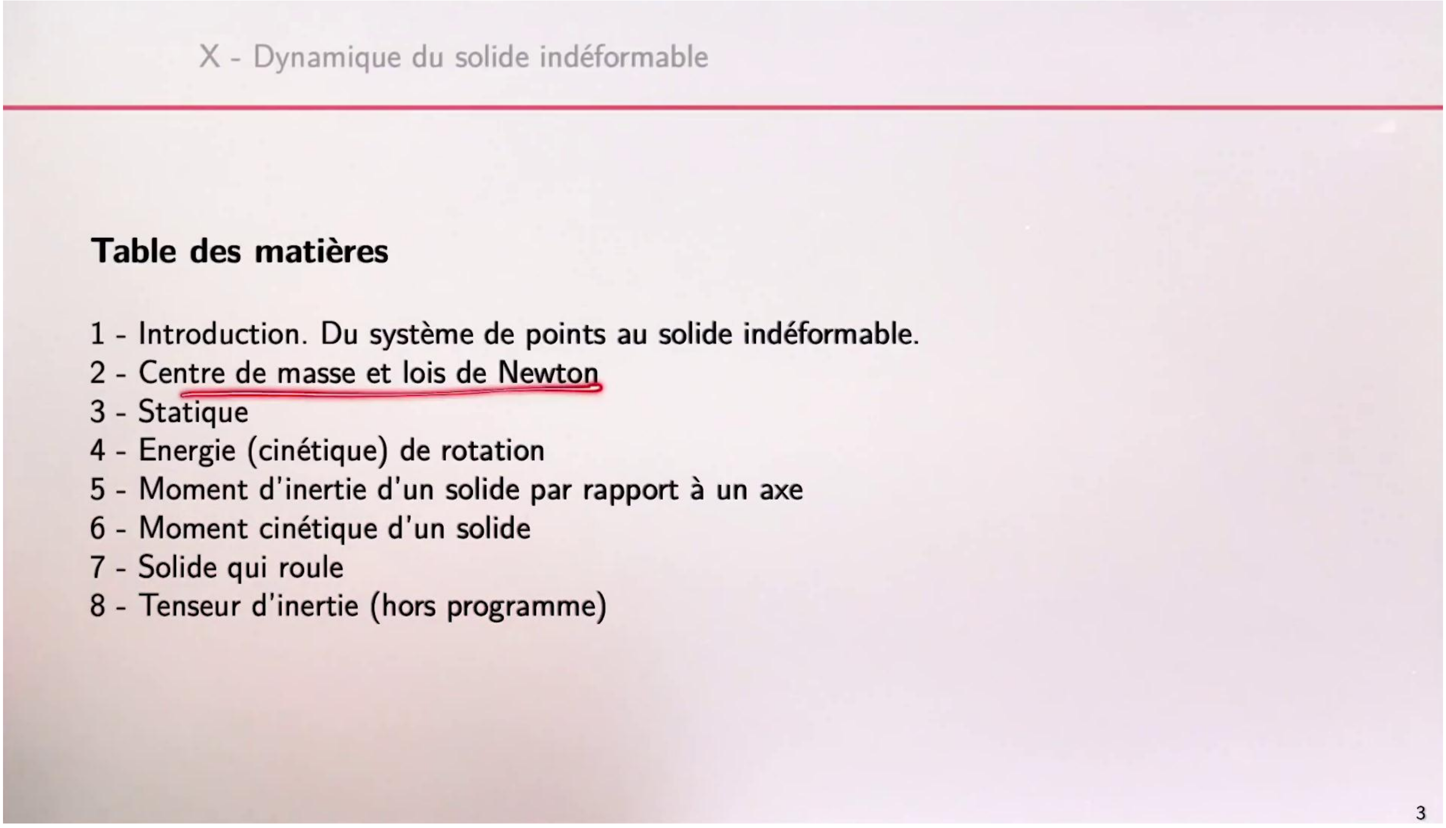


Dans ce nouveau chapitre, nous allons aborder la mécanique du solide indéformable. Ce solide peut avoir un mouvement de rotation en plus du mouvement de translation du centre de masse. Son étude demandera donc de mettre de nouveaux concepts en place. Dans cette vidéo, nous allons voir l'énoncé des lois de Newton et du théorème du moment cinétique pour un solide et nous allons aussi aborder la notion de centre de masse d'un solide.

Notes

Summary

0m 05s



Nous sommes dans le chapitre 10 sur le solide indéformable et nous allons voir les deux premiers points : introduction et centre de masse et lois de Newton.

Notes

Summary

0m 33s

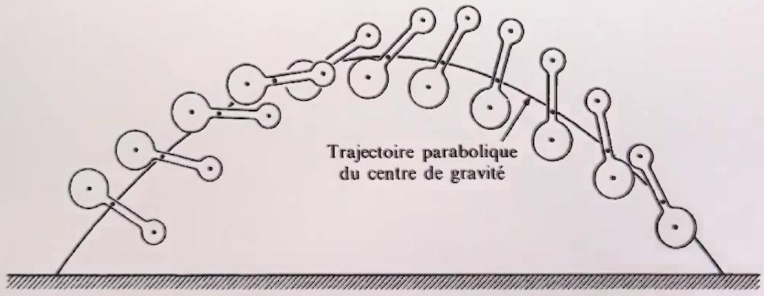
X-1. Introduction. Du système de points au solide indéformable.

Un solide indéformable peut avoir un mouvement

– de translation

– de rotation

Il va falloir mettre de nouveaux concepts en place pour le mouvement de rotation !

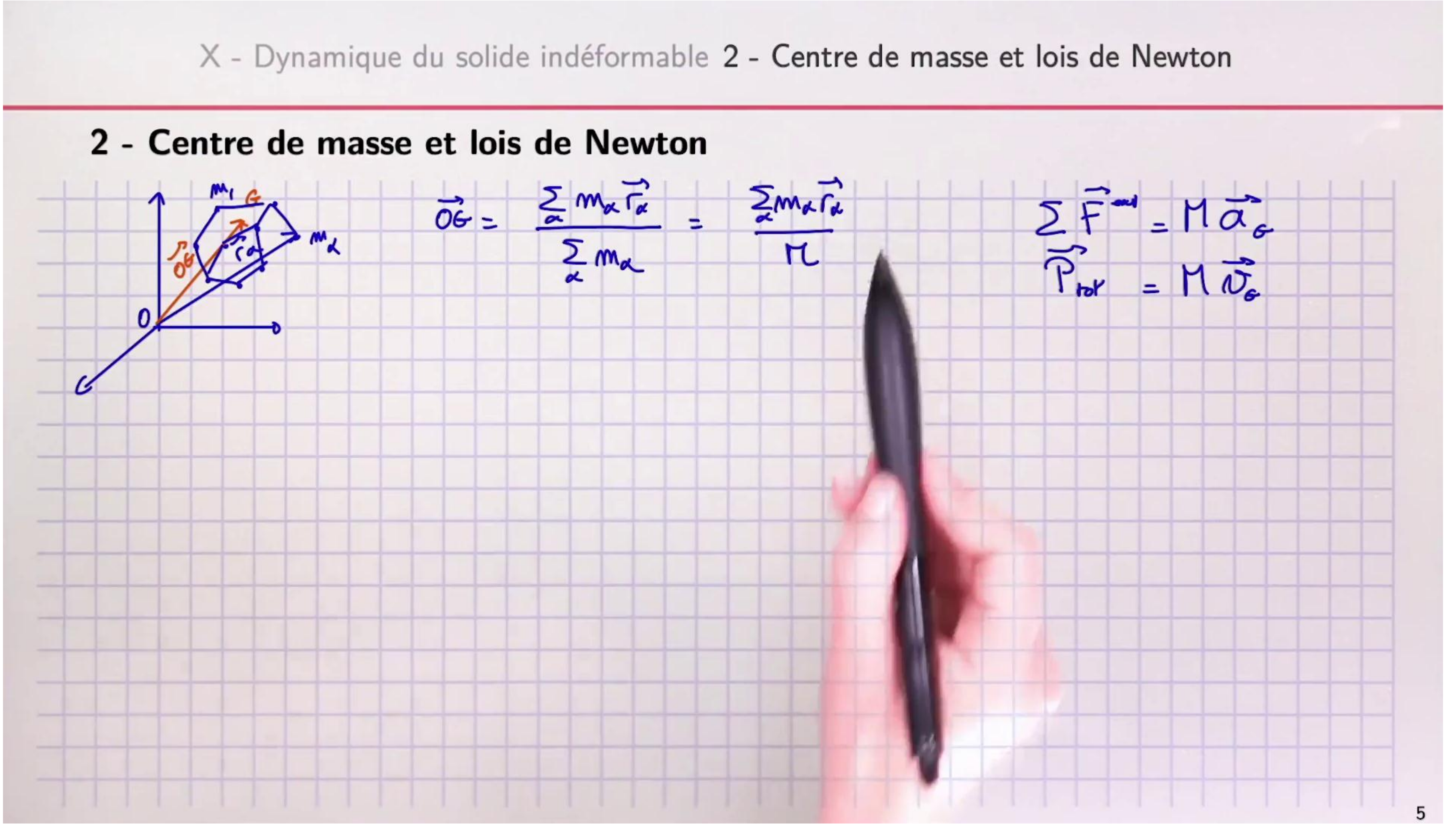


Nous avons donc dit que notre solide peut avoir à la fois un mouvement de translation et de rotation. Un objet que je lance dans le champ de pesanteur va avoir une trajectoire parabolique. C'est son centre de masse qui a une trajectoire parabolique, mais en même temps, il va avoir un mouvement de rotation autour du centre de masse. Nous allons séparer ces deux notions et mettre de nouveaux concepts en place pour traiter le mouvement de rotation. Pour cela, nous allons partir de ce que nous avons fait pour un système de points et passer du système de points, qui est un système discret, au solide.

Notes

Summary

0m 44s

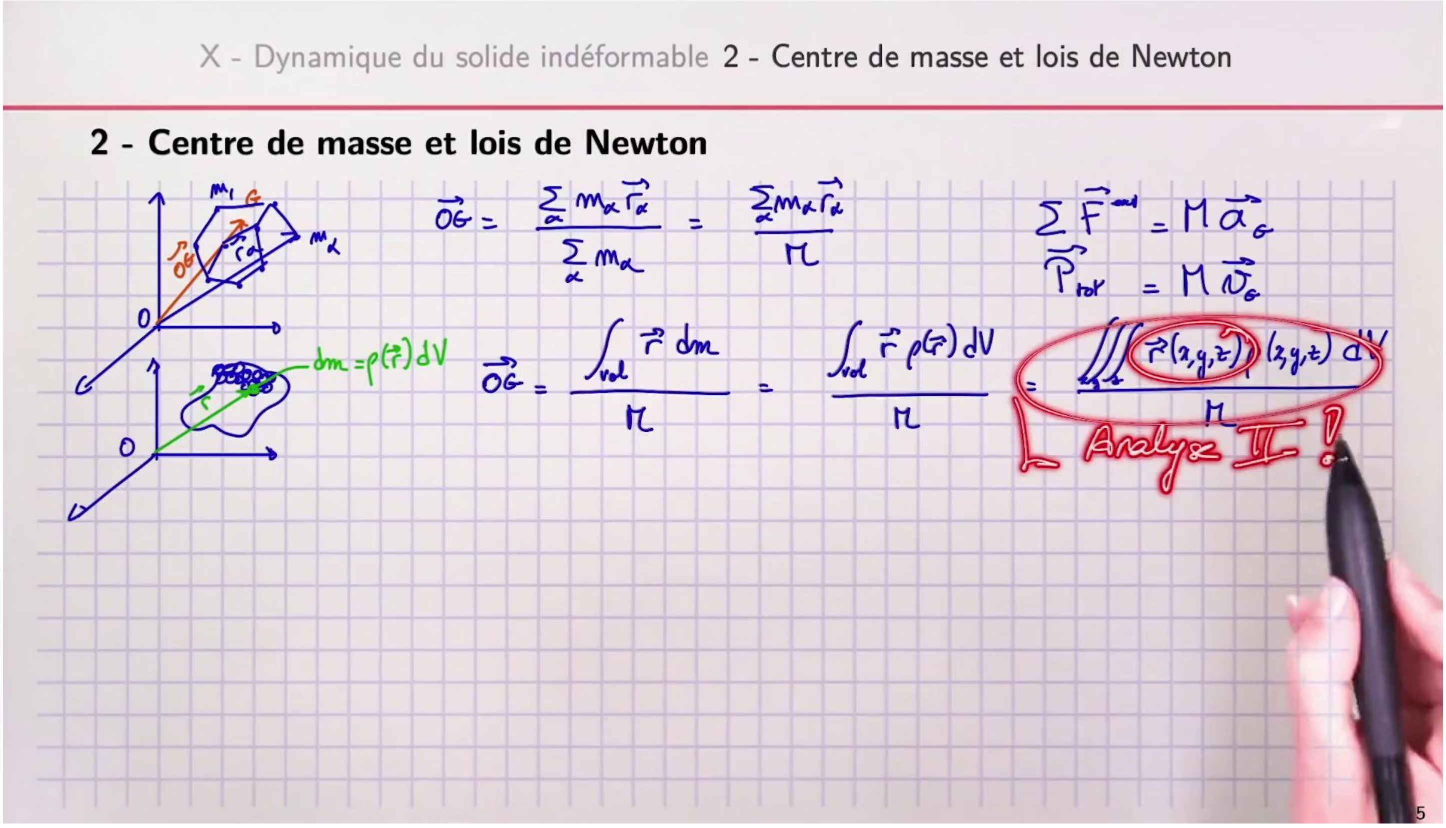


Cela va nous permettre de voir la notion de centre de masse d'un solide et les lois de Newton pour un solide. Je reprends le système de points matériels que nous avons déjà étudié. C'est un ensemble de masses M1, M2, etc, M alpha, avec les vecteurs position R alpha dans l'espace. Nous avons pu calculer la position du centre de masse G de ce système de points en cherchant le vecteur OG donné par OG égale somme sur alpha des M alpha R alpha sur somme sur alpha des M alpha, qui est aussi somme sur alpha des M alpha R alpha sur M avec M, la masse totale du système. Pour ce système de points, nous avons vu que la somme des forces extérieures est égale à M AG, accélération du centre de masse, et que la quantité de mouvement totale, Ptot, est égale à grand M VG, vitesse du centre de masse. Je peux maintenant supposer que toutes ces petites masses sont reliées entre elles par des barres rigides. À ce moment-là, les masses ne peuvent pas bouger les unes par rapport aux autres, mais l'ensemble peut continuer à se déplacer dans l'espace et à tourner. J'ai transformé mon système de points matériels en un système solide. Bien entendu, la détermination de la position du centre de masse et ses lois de Newton restent valables.

Notes

Summary

1m 25s

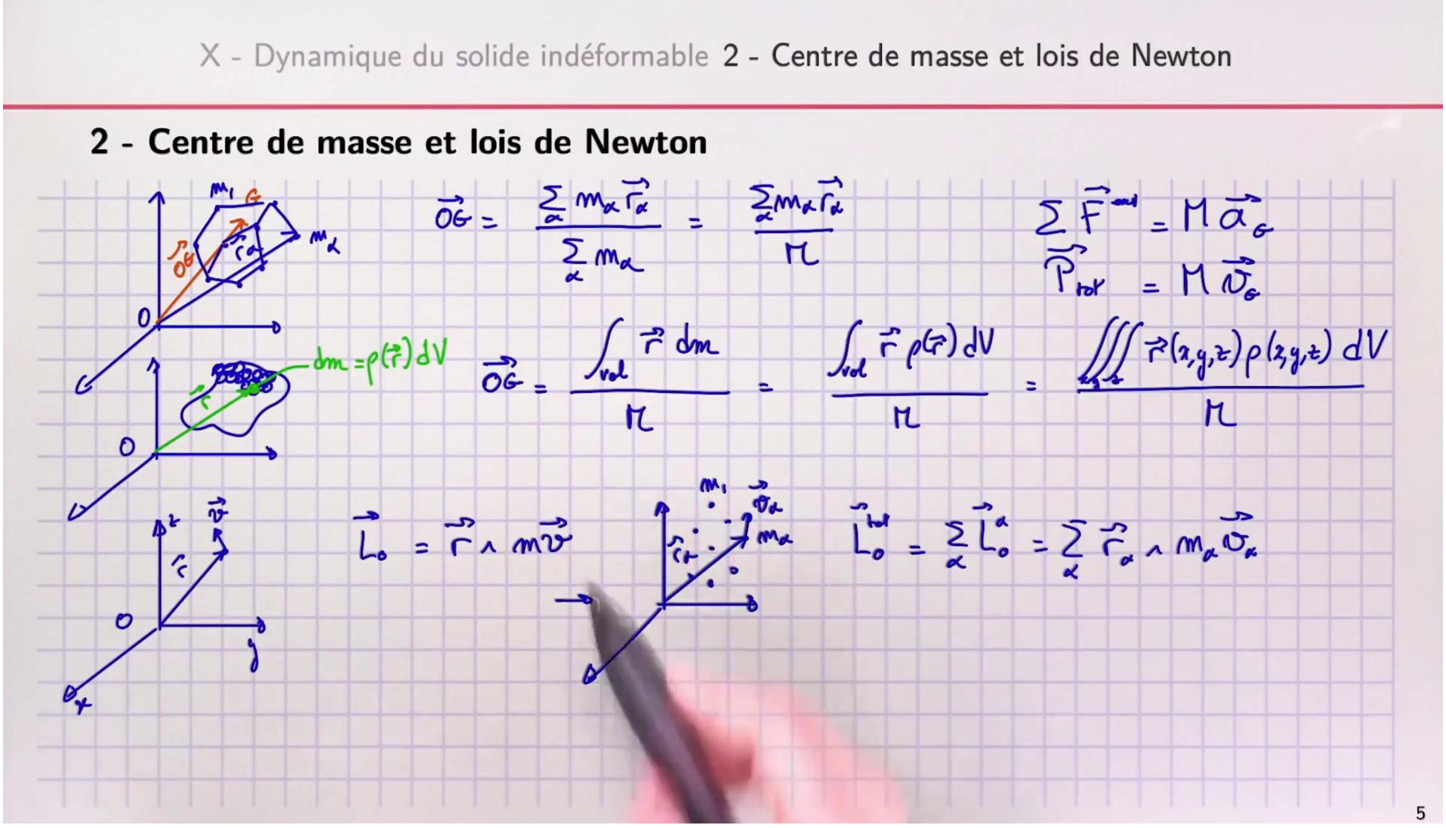


Si je veux maintenant considérer un vrai solide, je peux imaginer de découper ce solide en un ensemble de tout petits morceaux. Cet ensemble de tout petits morceaux se comporte exactement comme mes points reliés entre eux. La détermination de la position du centre de masse et des lois de Newton resteront donc valables. Chaque élément de masse individuelle a une masse dM qui est égale à la masse volumique locale rhô de R multipliée par l'élément de volume de ce petit morceau. R étant le vecteur position de mon morceau. La position du centre de masse sera donnée par oG égale l'intégrale sur le volume du vecteur position, multipliée par l'élément de masse divisée par la masse totale du solide. C'est donc l'intégrale sur le volume des R rhô de R dV, divisée par la masse totale. Attention, cette intégrale sur le volume est une intégrale triple. Je dois intégrer sur X, sur Y et sur Z dans les limites du volume du solide. Je peux noter ceci comme l'intégrale triple sur X, Y et Z du vecteur position qui dépend de X, Y et Z. La masse volumique à la position X, Y et Z est l'élément de volume qui dépend de dX, dY et dZ divisé par la masse totale. Ces intégrales triples se basent sur les fonctions de plusieurs variables. C'est quelque chose que vous voyez en analyse II. Je ne vais donc pas vous demander de faire ces calculs vous-même.

Notes

Summary

3m 05s

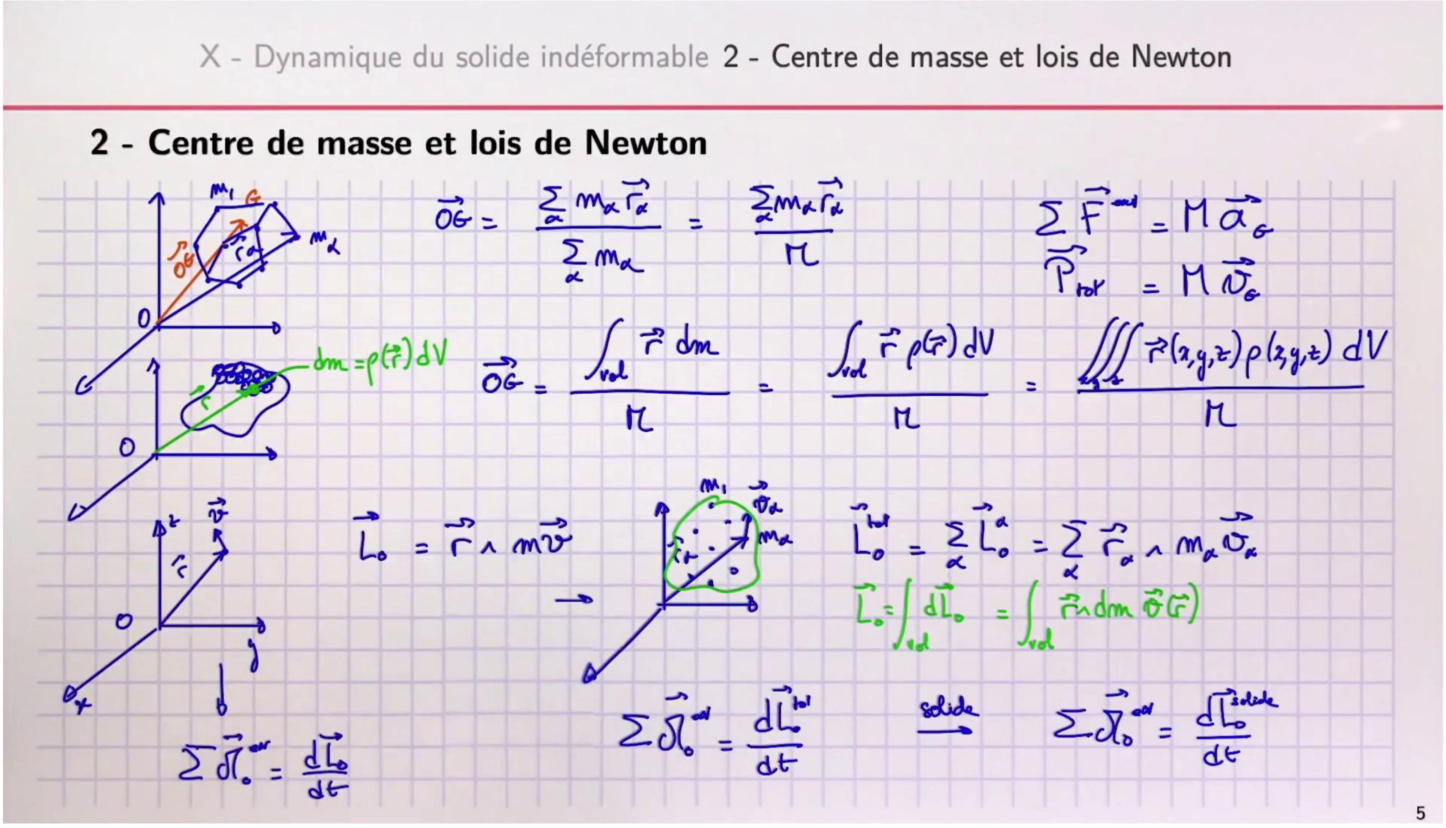


Mais sachez que quand vous verrez ces notions d'intégrales triples, ça sera utile pour calculer les positions des centres de masse. Par ailleurs, nous avons vu la notion de moment cinétique, Lo. Si j'ai un objet de masse M qui se déplace à une vitesse V et à la quantité de mouvement MV, le moment cinétique Lo par rapport au point o de mon objet est égal au produit vectoriel du vecteur position R vectoriel, la quantité de mouvement MV. Si je passe maintenant à un système de points matériels avec un nuage de points, chaque point a des vitesses différentes. Je vais appeler V alpha la vitesse de la particule alpha. Le moment cinétique par rapport à o total sera la somme sur alpha des moments cinétiques des particules alpha, que je vais appeler Lo alpha, soit la somme sur alpha des R alpha vectoriel M alpha V alpha. Exactement comme pour mon nuage de points précédent, je peux relier mes points par des barres rigides, cela reste valable. Je peux donc, de la même manière, passer au solide en considérant le solide comme étant un ensemble de points matériels, puis en passant de la notation de somme discrète à une somme continue.

Notes

Summary

5m 05s

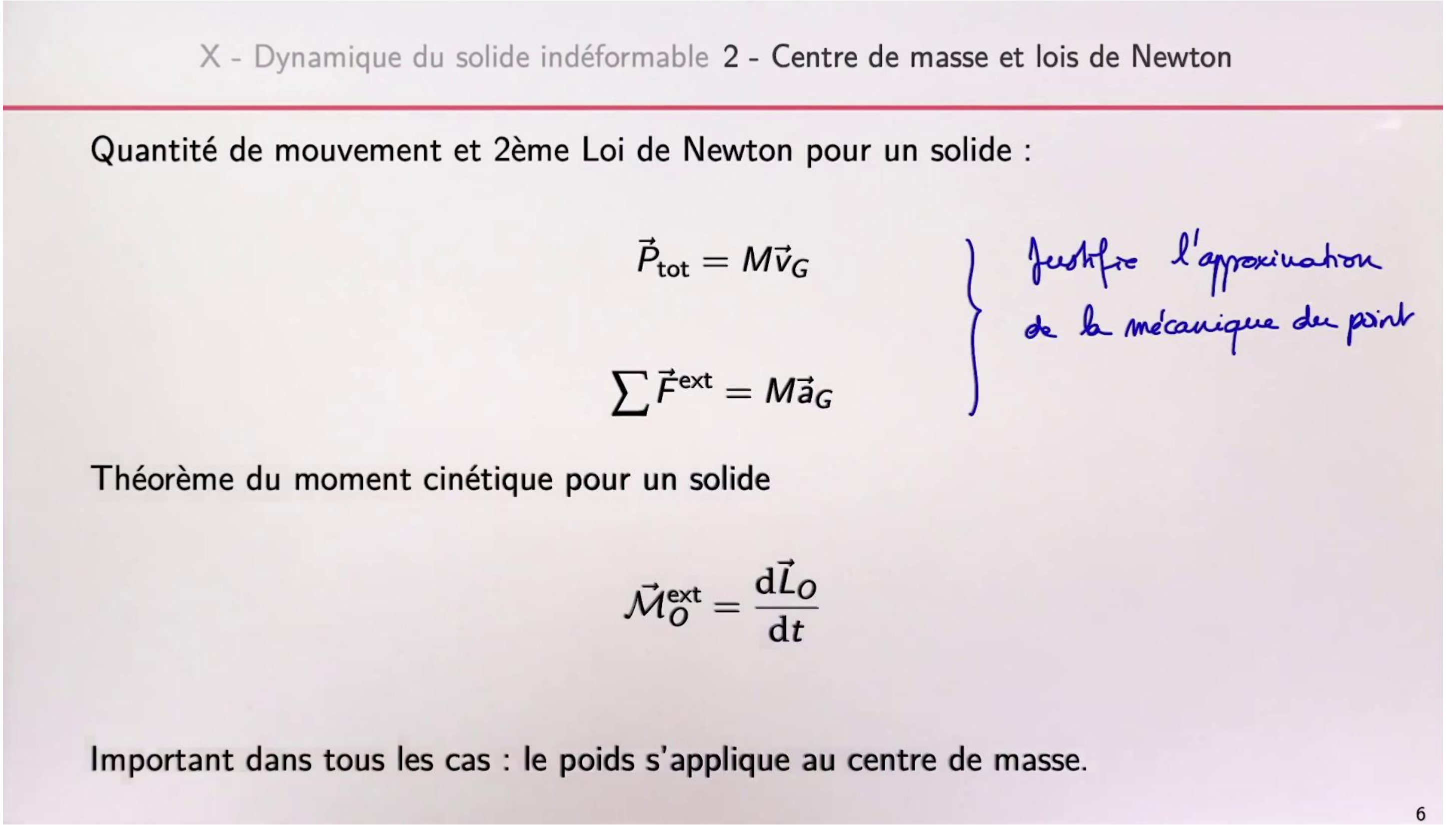


Le moment cinétique pour le solide sera donc égal à l'intégrale sur le volume des moments cinétiques élémentaires dLo, l'intégrale sur le volume de R vectoriel dMm, la vitesse au point R. Nous verrons plus tard comment calculer cela. Pour un point matériel, nous avons vu le théorème du moment cinétique qui nous disait que la somme des moments des forces extérieures par rapport à o est égale à dLo sur dt. Lorsque l'on passe au nuage de points, exactement comme pour les lois de Newton, je peux séparer mes forces en forces internes et forces externes. Les forces internes étant identiques et opposées deux à deux, elles s'annuleront dans le calcul de la somme des moments des forces par rapport à o. Le théorème du moment cinétique pour un système de points matériels exprime donc la somme des moments des forces extérieures par rapport à o est égale à dLo total sur dt. Et cela reste valable lorsque je passe au solide. Donc pour le solide, nous aurons également la somme des moments des forces externes par rapport à o qui sera égale à dLo sur dt. Ici, c'est le Lo du solide. Nous avons donc vu que le solide possède un centre de masse, que nous pouvons écrire les lois Newton par rapport à ce centre de masse et que pour le solide comme pour le point matériel, le théorème du moment cinétique s'applique.

Notes

Summary

6m 42s

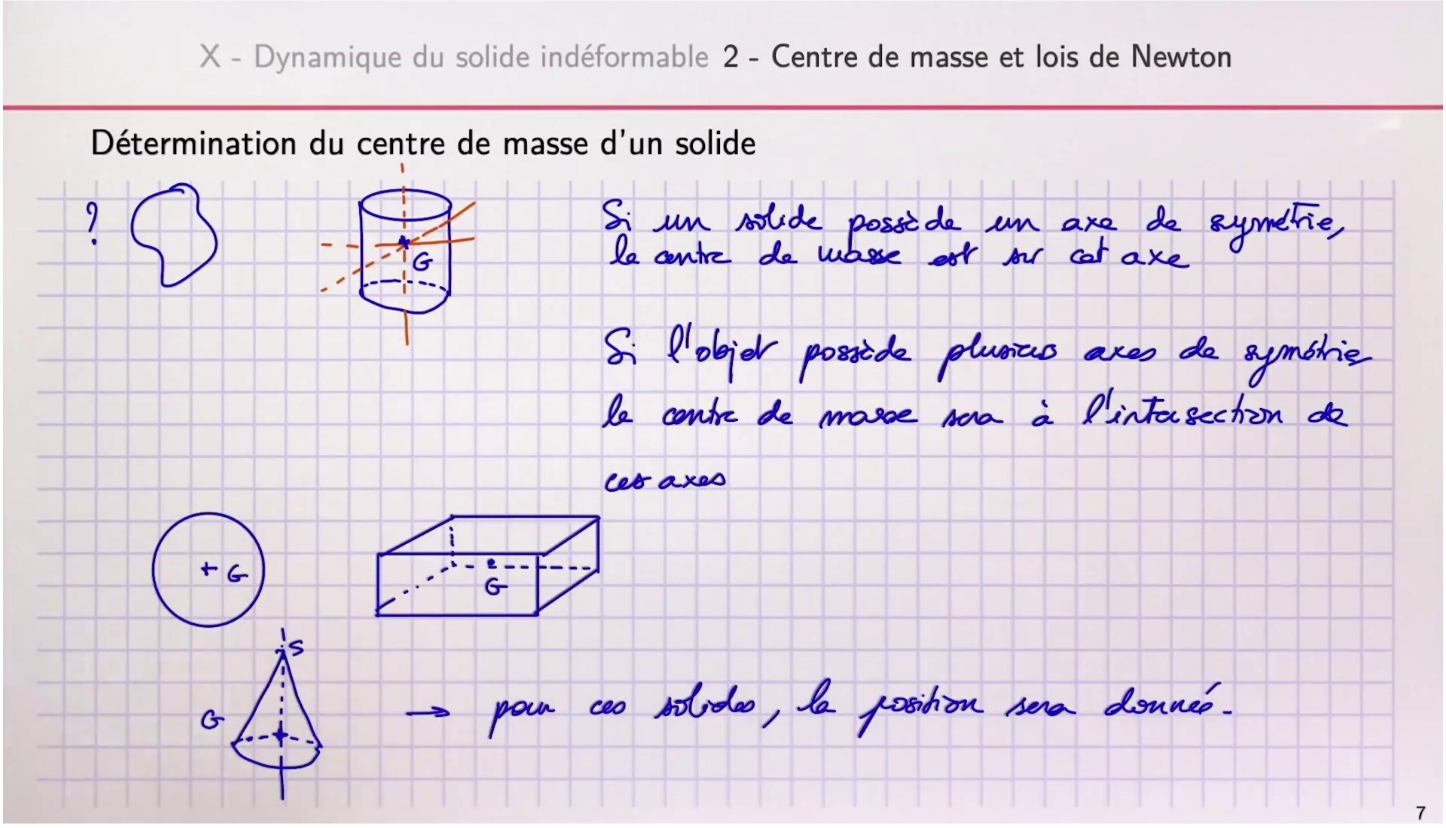


En résumé, nous avons donc pour la quantité de mouvement et la deuxième loi de Newton pour un solide, la quantité de mouvement totale qui est égale à la masse totale multipliée par la vitesse du centre de masse. La somme des forces extérieures est égale à M multipliée par l'accélération du centre de masse. Et au passage, c'est ceci qui nous permet de justifier l'approximation de la mécanique du point. Nous avons remplacé un solide par un point matériel dont toute la masse est concentrée au centre de masse. C'est ces lois qui gouvernent le mouvement parabolique de mon solide de tout à l'heure. Par ailleurs, le théorème du moment cinétique pour un solide nous dit que le moment des forces extérieures par rapport à un point fixe o est égal à dLo sur dt. En termes de forces, le centre de masse a une position particulière puisque le poids s'appliquera toujours au centre de masse.

Notes

Summary

8m 30s

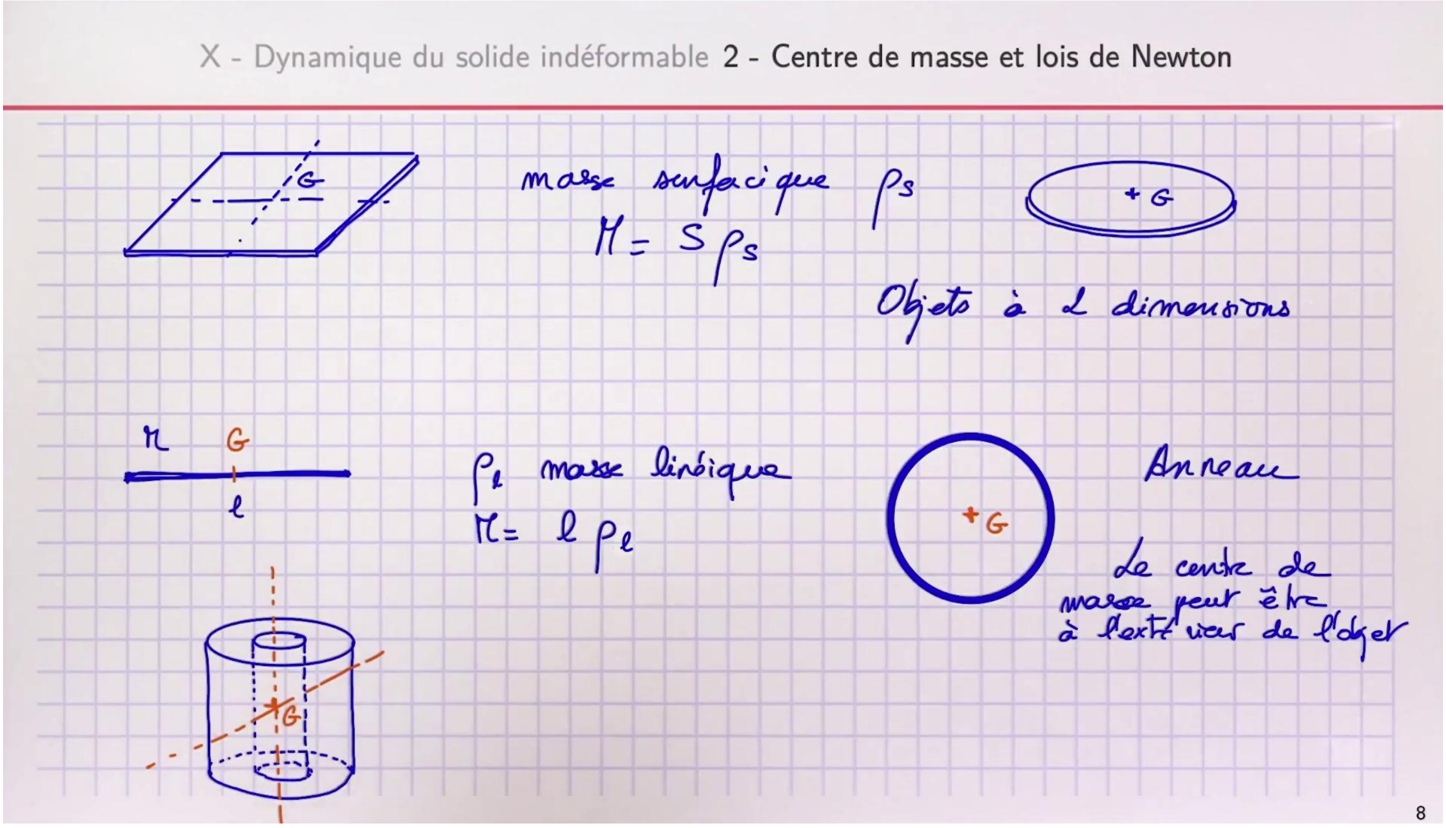


Maintenant, nous allons voir comment déterminer la position du centre de masse d'un solide sans utiliser les intégrales triples. Cela ne marchera évidemment pas pour un solide quelconque. Mais prenons un solide possédant un ou plusieurs axes de symétrie, par exemple un cylindre plein homogène. Le centre de masse est le point autour duquel j'ai une répartition uniforme de la masse du solide. Ici, j'ai un axe de symétrie. Autour de cet axe de symétrie, j'ai une répartition uniforme de la masse du solide. Donc, le centre de masse sera forcément quelque part sur l'axe de symétrie. Mon cylindre possède d'autres axes de symétrie horizontaux. Je vois donc que le centre de masse doit se trouver au centre du cylindre. Si l'objet possède plusieurs axes de symétrie, le centre de masse sera à l'intersection de ces axes. Le centre de masse d'une sphère sera donc au centre de la sphère. Le centre de masse d'un parallélépipède rectangle sera également au centre de cet objet. Le centre de masse d'un cylindre sera au centre du cylindre. Si vous avez un solide plus complexe, par exemple un cône, le centre de masse doit se trouver sur l'axe de symétrie, mais on ne sait pas exactement où. On voit bien qu'il sera plus proche de la base que du sommet, puisque j'ai plus de masse à la base. Dans ces cas-là, la position sera donnée.

Notes

Summary

9m 27s

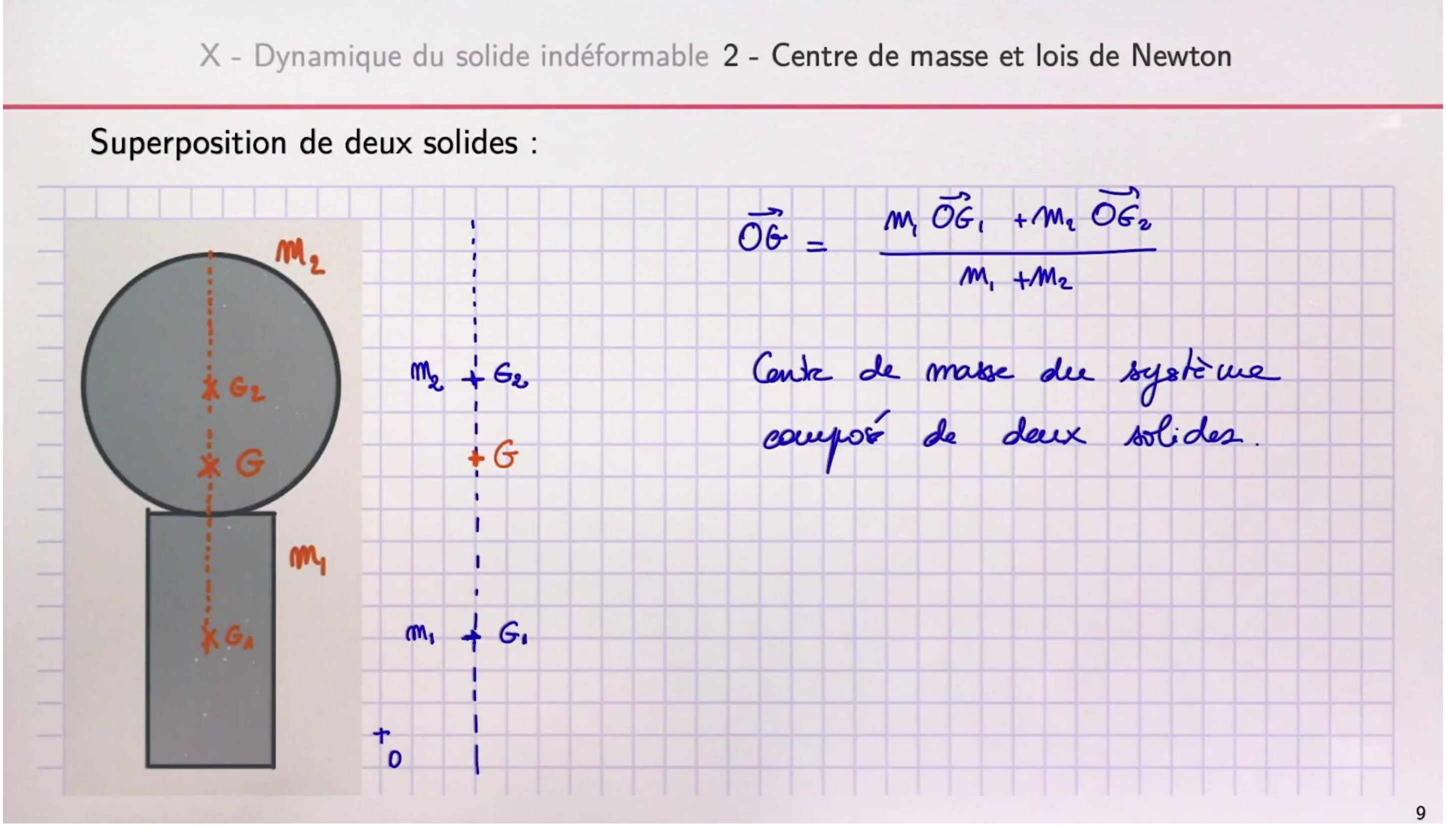


Si on a affaire à un solide extrêmement plat comme une plaque, à ce moment-là, le centre de masse se trouve aussi sur les axes de symétrie. Une plaque n'a pas une masse volumique, mais une masse surfacique que l'on appelle généralement rhô S. La masse totale de l'objet est égale à sa surface multipliée par sa masse surfacique. Cela marchera aussi pour un disque. Ce sont des objets à deux dimensions. Il est possible d'avoir également des objets à une dimension, c'est le cas d'une barre. Elle a une longueur l et une masse M. Cette barre a ce que l'on appelle une masse linéique. Sa masse totale est égale à sa longueur multipliée par sa masse linéique. Le centre de masse de cette barre homogène sera au milieu de la barre. Imaginons maintenant que je recourbe cette barre pour former un cerceau ou un anneau. Si je cherche le point par rapport auquel la masse de cet anneau est répartie régulièrement, je vais trouver le centre de l'anneau. Le centre de masse n'est ici pas dans l'objet, il est à l'extérieur de l'objet physique. C'est valable aussi pour certains objets à trois dimensions. Si je prends, par exemple, un cylindre creux, l'axe de symétrie du cylindre reste le même que pour un cylindre plein. Le centre de masse sera au milieu de l'objet, mais pas dans la matière de l'objet.

Notes

Summary

11m 15s



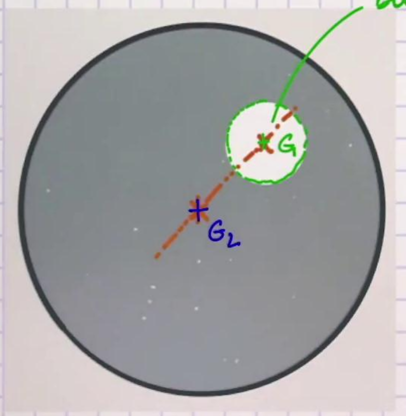
Lorsque l'on connaît les centres de masse de certains solides, il est facile de trouver la position du centre de masse G1 de l'objet 1 de masse M1, la position du centre de masse G2 de l'objet 2 de masse M2. La position du centre de masse de l'objet total se calculera comme si on avait deux points matériels, un de masse M2 en G2 et un de masse M1 en G1. Donc, je vais trouver le centre de masse de l'objet total sur la ligne G1, G2 et sa position dépendra des masses M2 et M1. Pour cet ensemble de deux points, la position oG se trouve comme étant M1 oG1 plus M2 oG2 sur M1 plus M2. Ceci, quelle que soit l'origine o choisie pour mon référentiel.

Notes

Summary

13m 06s

solide à trou



bouchon de masse m_1
centre de masse G_1

Solide + bouchon : masse m_2
Centre de masse en G_2

Solide total : $\vec{OG_2} = \dfrac{M\,\vec{OG} + m_1\,\vec{OG_1}}{M + m_1}$

Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

10

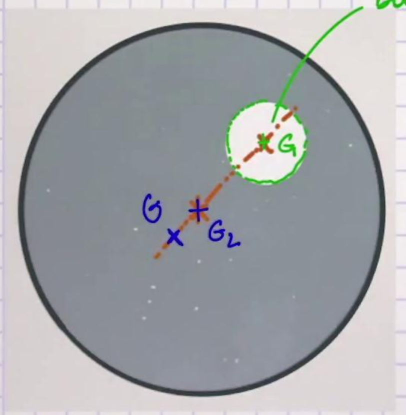
Si je cherche maintenant le centre de masse d'un solide ayant un trou. L'idée pour procéder est la suivante : nous imaginons que nous allons boucher le solide à l'aide d'un bouchon qui aura la même masse volumique que le solide à trou. Nous allons donc placer dans le solide un bouchon de masse M1 et nous supposons qu'il est possible de calculer la position du centre de masse de ce bouchon qui sera G1. Le solide avec son bouchon a une masse M2 et le centre de masse en G2. Puisque j'ai reconstitué un solide homogène que je connais, il est facile de calculer la position de G2. Je connais donc la position du centre de masse G2 du solide avec son bouchon et la position du centre de masse G1 du bouchon tout seul. Mais ce que je cherche, c'est la position du centre de masse du solide sans bouchon. Je vais utiliser la même méthode de superposition que tout à l'heure. Le solide total, donc bouché, a un centre de masse oG2, donné par le vecteur oG2, que je peux calculer comme étant M oG, j'ai le centre de masse du solide avec le trou. Ça, c'est mon premier solide de la superposition, plus M1 oG1 sur la masse des deux, M plus M1. M plus M1 est la masse du solide plus le bouchon, c'est donc M2.

Notes

Summary

14m 14s

solide à trou



bouchon de masse m_1
centre de masse G_1

Solide + bouchon : masse m_2
Centre de masse en G_2

Solide total : $\overrightarrow{OG_2} = \dfrac{M\,\overrightarrow{OG} + m_1\,\overrightarrow{OG_1}}{M + m_1} = \dfrac{M\,\overrightarrow{OG} + m_1\,\overrightarrow{OG_1}}{m_2}$

$$M\,\overrightarrow{OG} = m_2\,\overrightarrow{OG_2} - m_1\,\overrightarrow{OG_1}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_2\,\overrightarrow{OG_2} - m_1\,\overrightarrow{OG_1}}{M}$$

Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

10

En utilisant cette égalité, en faisant le produit en croix et en isolant M oG, donc en passant M1 oG1 de l'autre côté, je vais obtenir M oG est égal à M2 oG2 moins M1 oG1. Soit oG est égal à M2 oG2 moins M1 oG1 sur M. Au final, j'ai utilisé exactement la même méthode de superposition, mais en considérant que mon solide total est constitué d'un solide entier avec bouchon auquel j'ai rajouté un solide de masse négative moins M1 qui est la masse du bouchon. J'ai donc avec cela accès à la position du centre de masse G de mon solide.

Notes

Summary

16m 10s

Voilà, nous avons vu la notion de centre de masse d'un solide ainsi que l'énoncé des lois de Newton et du théorème du moment cinétique dans le cas du solide.

Notes

Summary

17m 19s