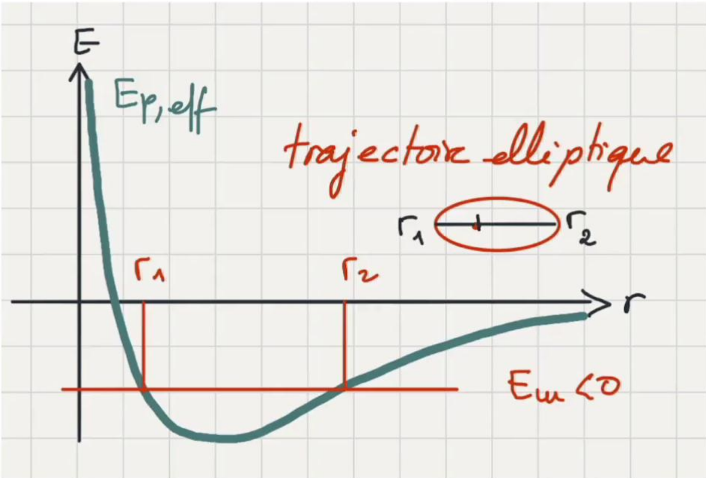
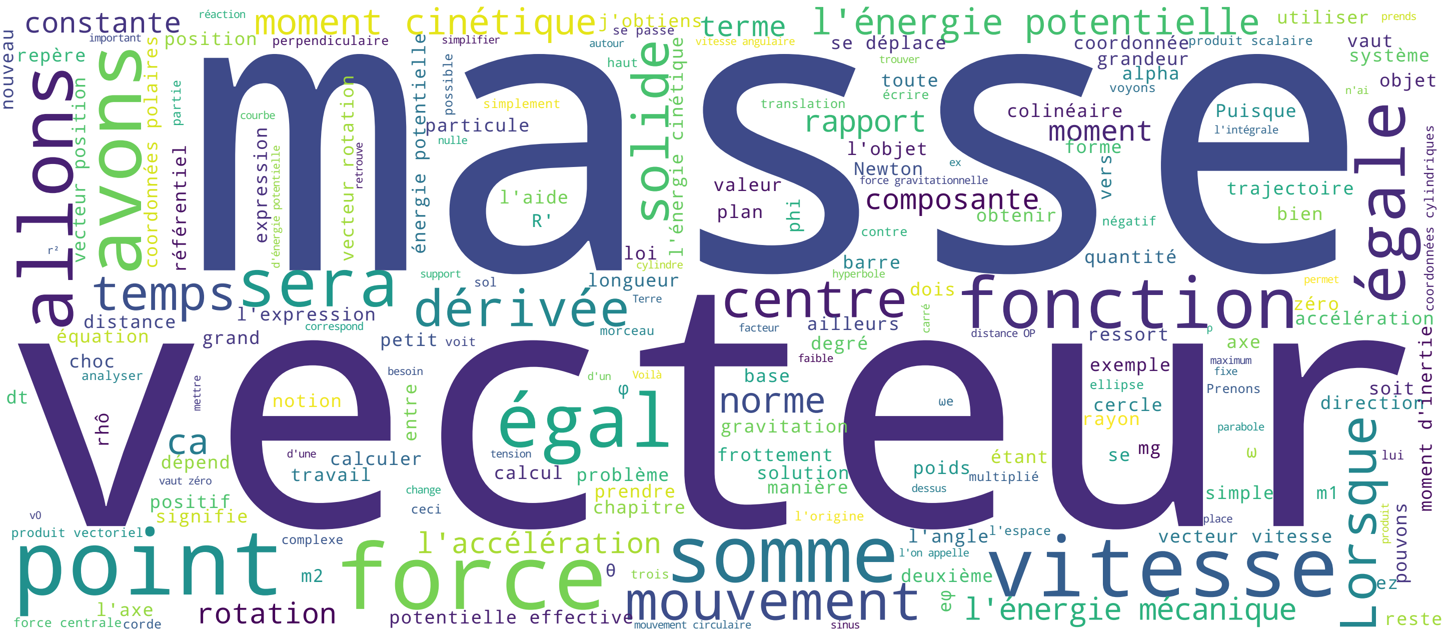


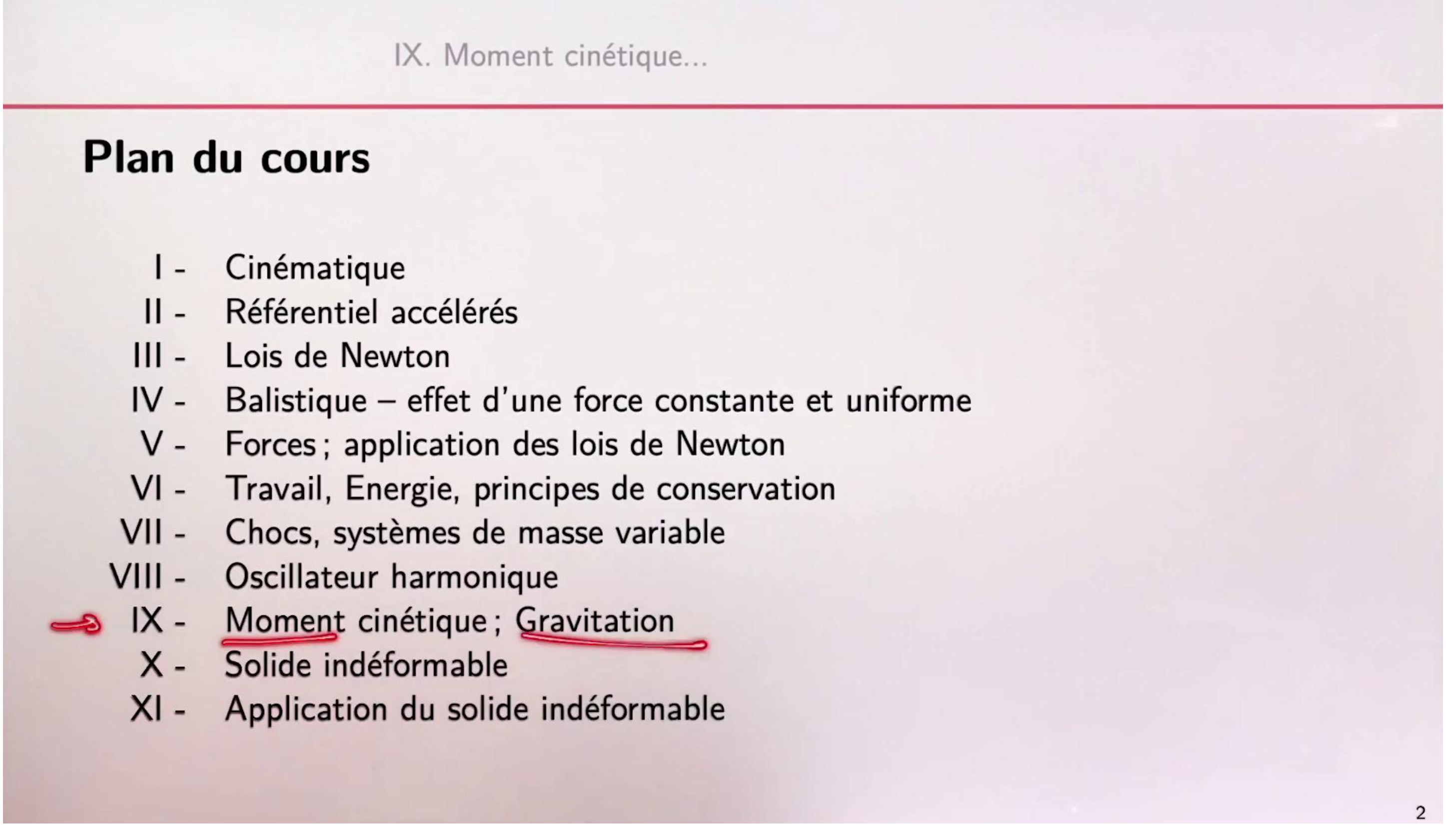
Gravitation et énergie

Partie 2

Prof. Cécile Hébert



Video

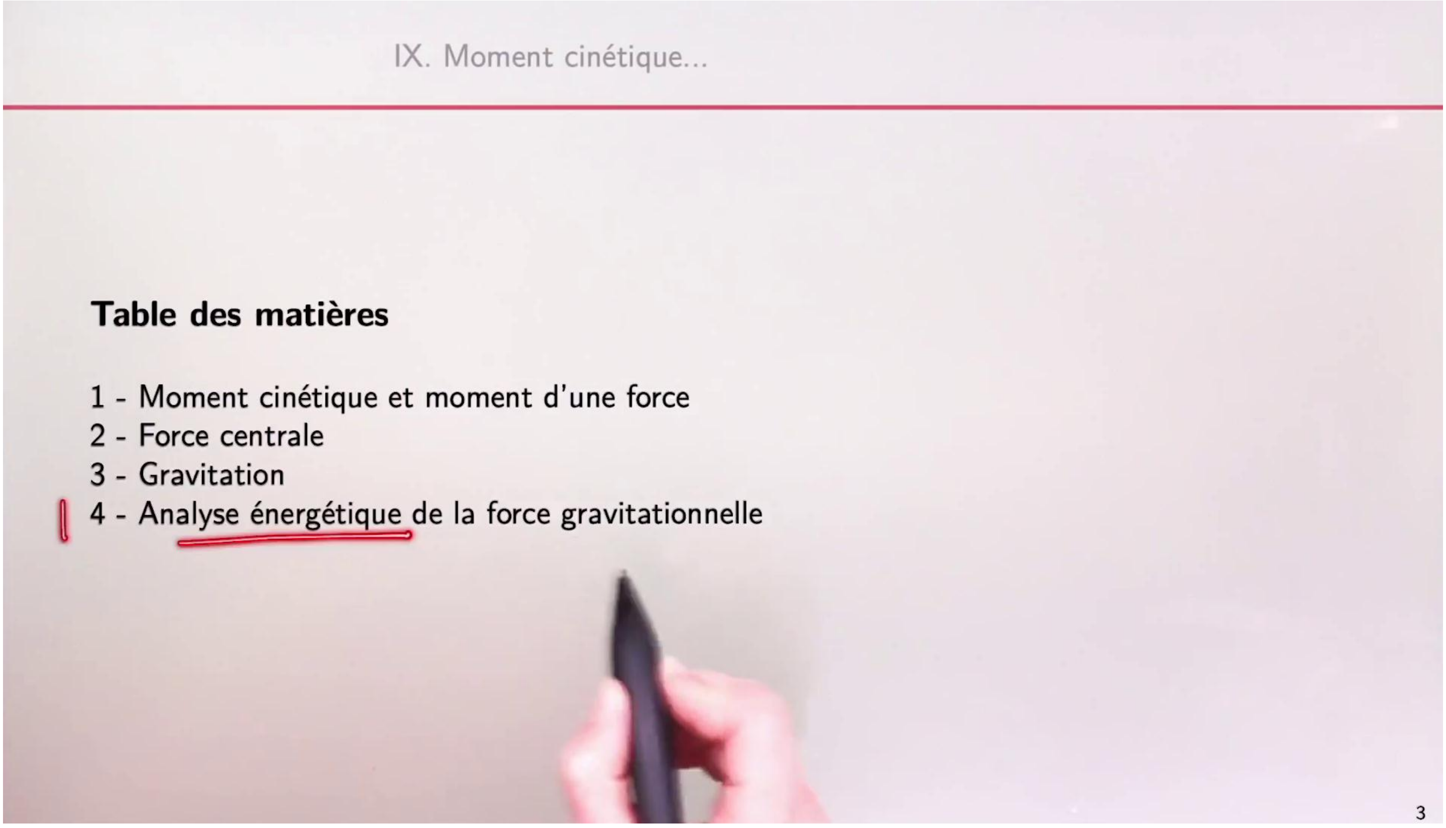


Nous avons vu la notion d'énergie potentielle pour la gravitation. Maintenant, nous allons pousser un petit peu plus loin et réexprimer cette énergie potentielle à l'aide du moment cinétique, en utilisant le fait que la gravitation est une force centrale. Cela nous permettra de donner une expression de l'énergie mécanique qui ne dépendra que de la distance entre le corps attracteur et l'objet étudié, ainsi que de la dérivée de cette distance, r et r. Nous arriverons à la notion d'énergie potentielle effective, qui est une notion puissante pour analyser les mouvements dans un champ gravitationnel.

Notes

Summary

0m 05s

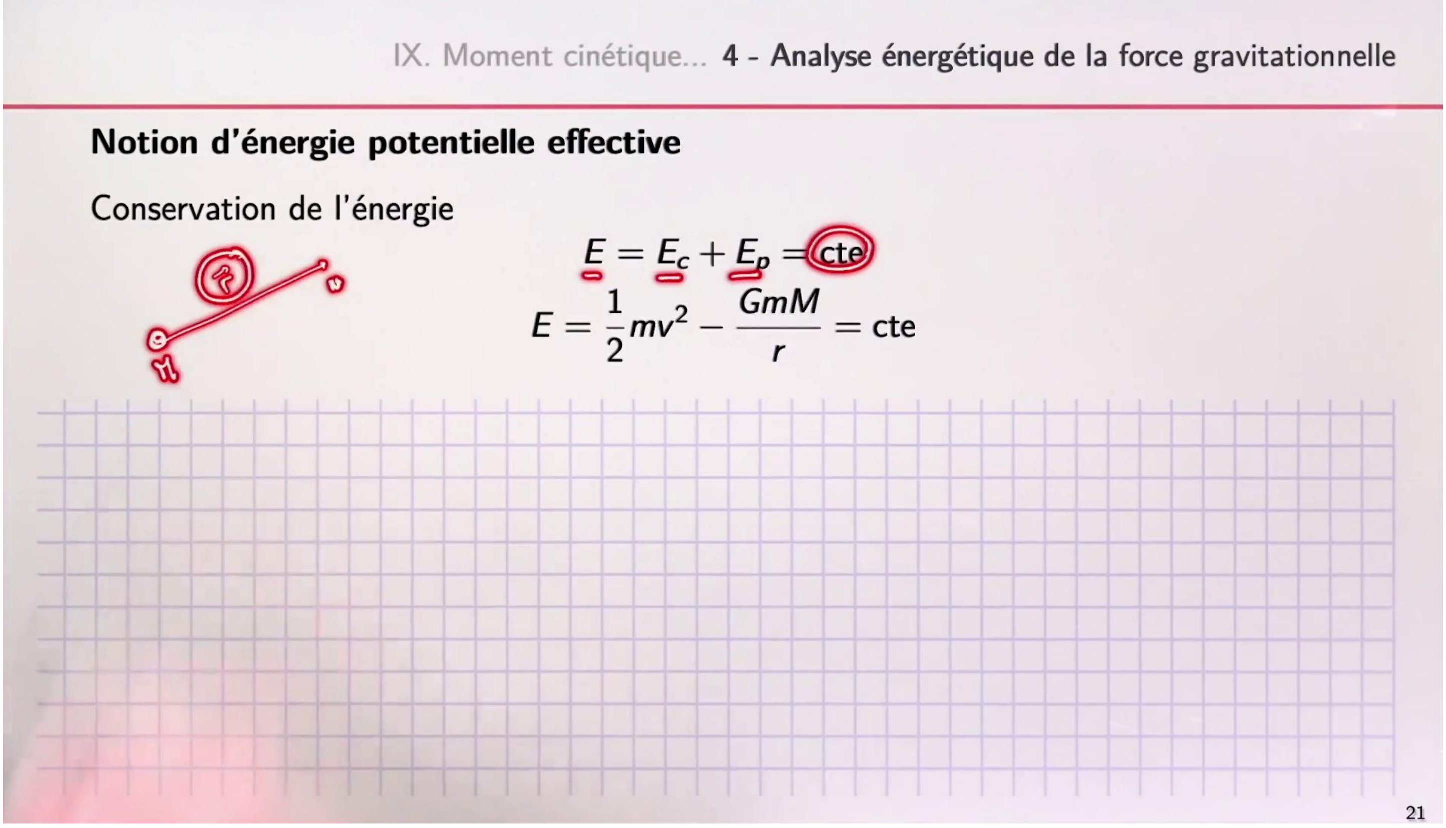


Nous sommes dans le chapitre 9, moments cinétiques et gravitation, et nous allons voir l'analyse énergétique de la force gravitationnelle, la deuxième partie.

Notes

Summary

0m 45s

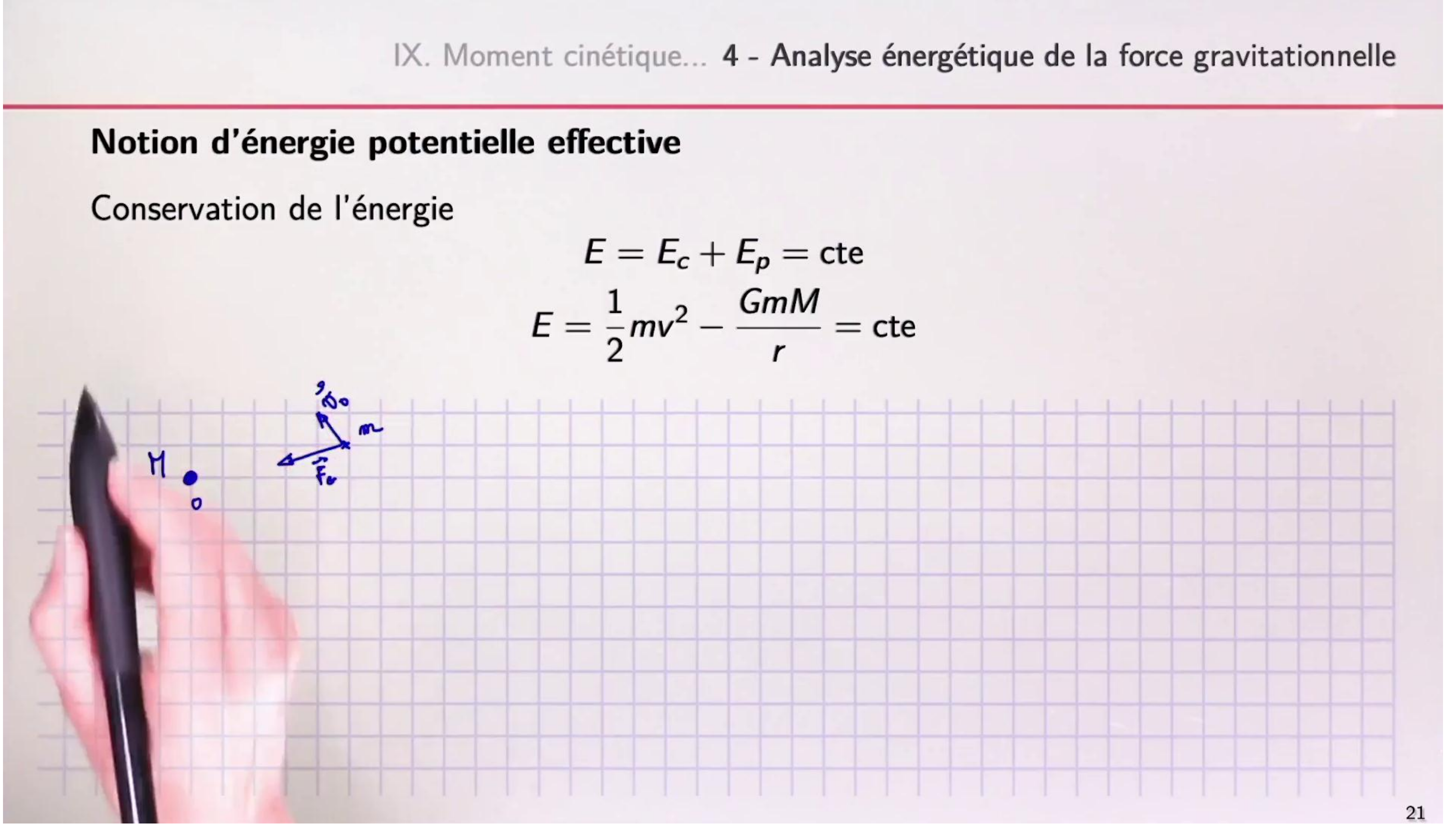


Nous allons voir ce que l'on appelle la notion d'énergie potentielle effective. La force gravitationnelle et l'énergie potentielle de gravitation ne dépendent que de r, la distance entre l'objet de masse M et l'objet étudié. Nous allons donc chercher à exprimer l'énergie mécanique qui est la somme de l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle, qui est une constante, en fonction de la norme de r.

Notes

Summary

0m 56s

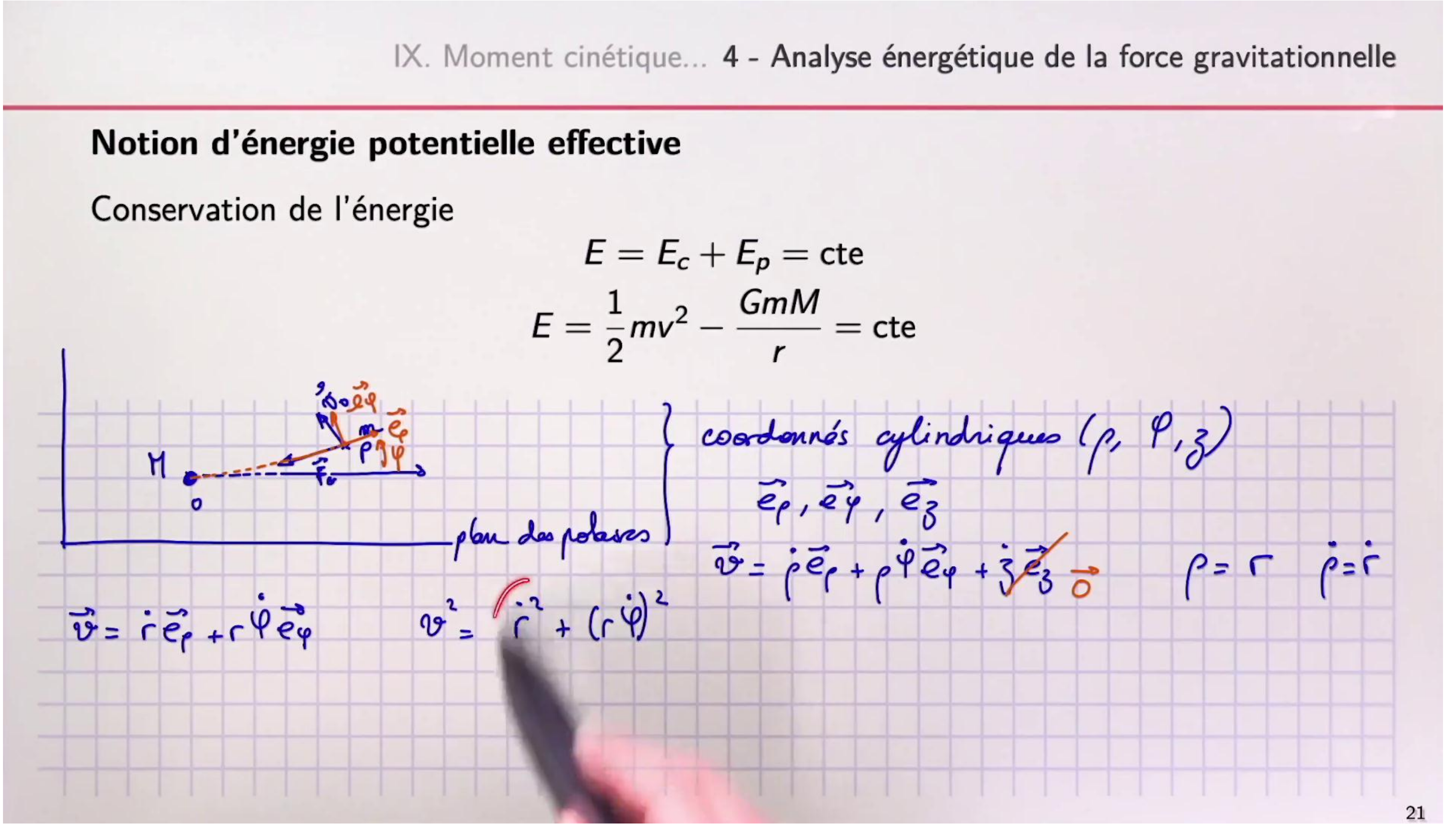


L'énergie mécanique est donc 1/2mv² moins GmM/r. Et cette grandeur doit être constante. Le deuxième terme de l'énergie potentielle ne dépend que de r, mais le terme de l'énergie cinétique est exprimé en fonction de v². Nous allons chercher à l'exprimer uniquement à l'aide de r et ses dérivés. Nous allons faire une première remarque. Nous avons un objet de masse M qui exerce une force gravitationnelle Fg centrale, dirigée vers O sur un objet de masse m. À t égale 0, cet objet de masse m a une certaine vitesse v0. L'accélération est selon Fg. Cette accélération va pouvoir influencer à la fois la direction et la norme de v0. Par contre, l'accélération et la vitesse sont dans un plan. C'est le plan qui contient la masse M. Donc la masse M, la masse m, la vitesse v0 et l'accélération sont au départ dans un même plan. Cette accélération ne pourra pas sortir du plan puisqu'elle pointe toujours vers M. L'accélération restera donc dans le plan de départ. Cela fait que v0 peut changer de manière quelconque dans le plan, mais ne pourra jamais sortir du plan. Tout le problème se placera dans le plan qui est défini par M, m et donc par le vecteur v0 et le vecteur Fg.

Notes

Summary

1m 26s

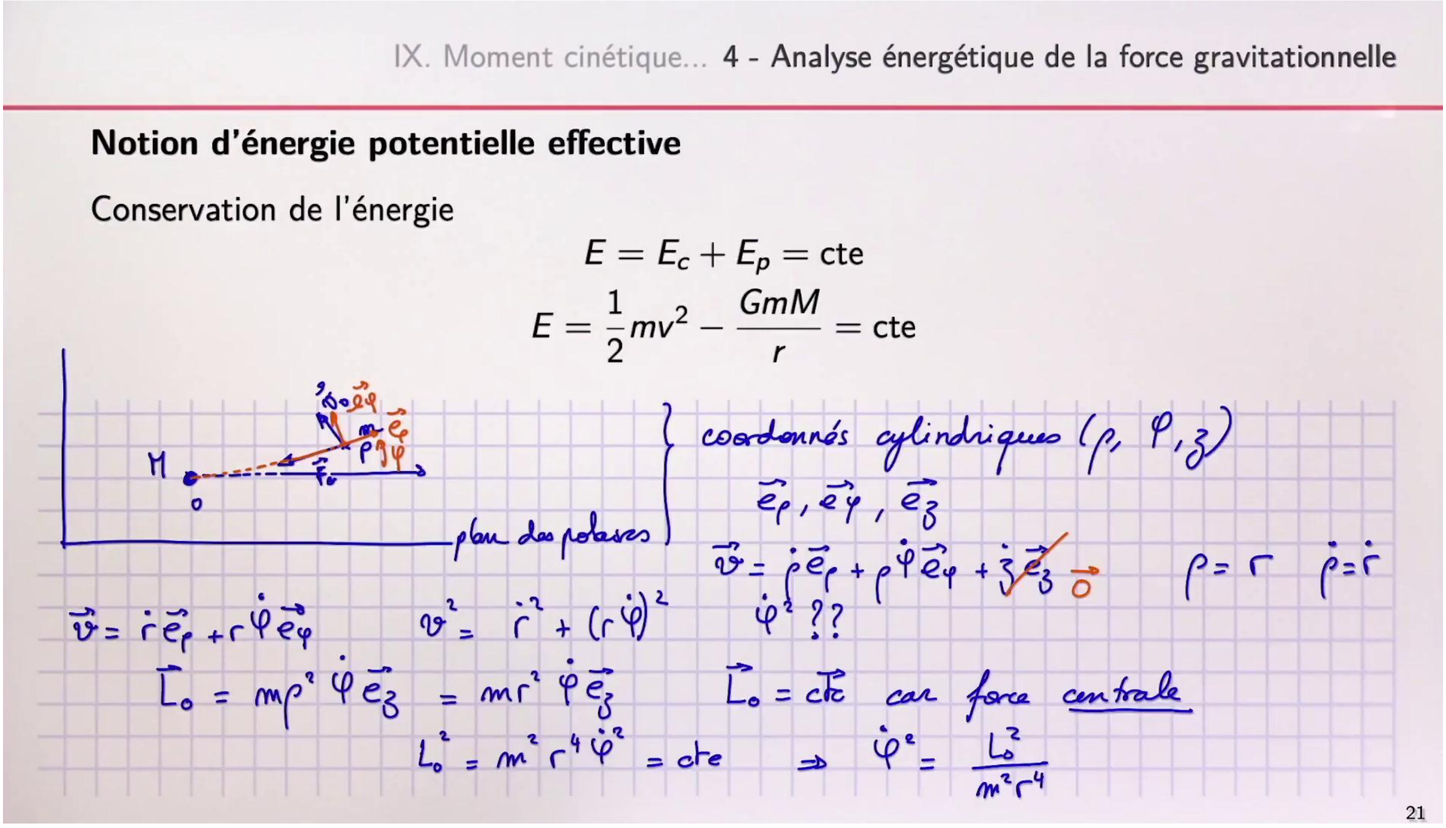


Puisque tout se place dans un plan, nous pouvons nous contenter d'utiliser les coordonnées polaires. Nous allons prendre les polaires de centre O, nous allons appeler ρ la distance OP, et nous allons utiliser les vecteurs de base eρ et eφ. Ces coordonnées polaires seront ensuite étendues aux coordonnées cylindriques basées sur ces coordonnées polaires. Les vecteurs de base étant eρ, eφ, ez. Nous pouvons donc utiliser ces coordonnées pour exprimer le vecteur vitesse v. En coordonnées cylindriques, le vecteur vitesse s'écrit rho. eρ plus ρφ.eφ plus z.ez or, nous venons de dire que le problème se place dans un plan. Le vecteur v est uniquement dans le plan eρ, eφ. La coordonnée z.ez vaut donc zéro. Par ailleurs, nous avons appelé r la distance op. Dans cette nomenclature, rho s'écrit r. r peut varier, donc ρ. égale r. Nous avons donc l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques r.eρ plus rφ.eφ. Nous avons besoin de la norme de v² ça sera donc la norme de ce vecteur-là, ça sera r.² plus (rφ.)². Nous avons donc progressé, nous avons remplacé v² par r.² plus (rφ.)². Nous avons ici la dérivée de r, nous avons r², mais il nous reste un φ.².

Notes

Summary

3m 21s

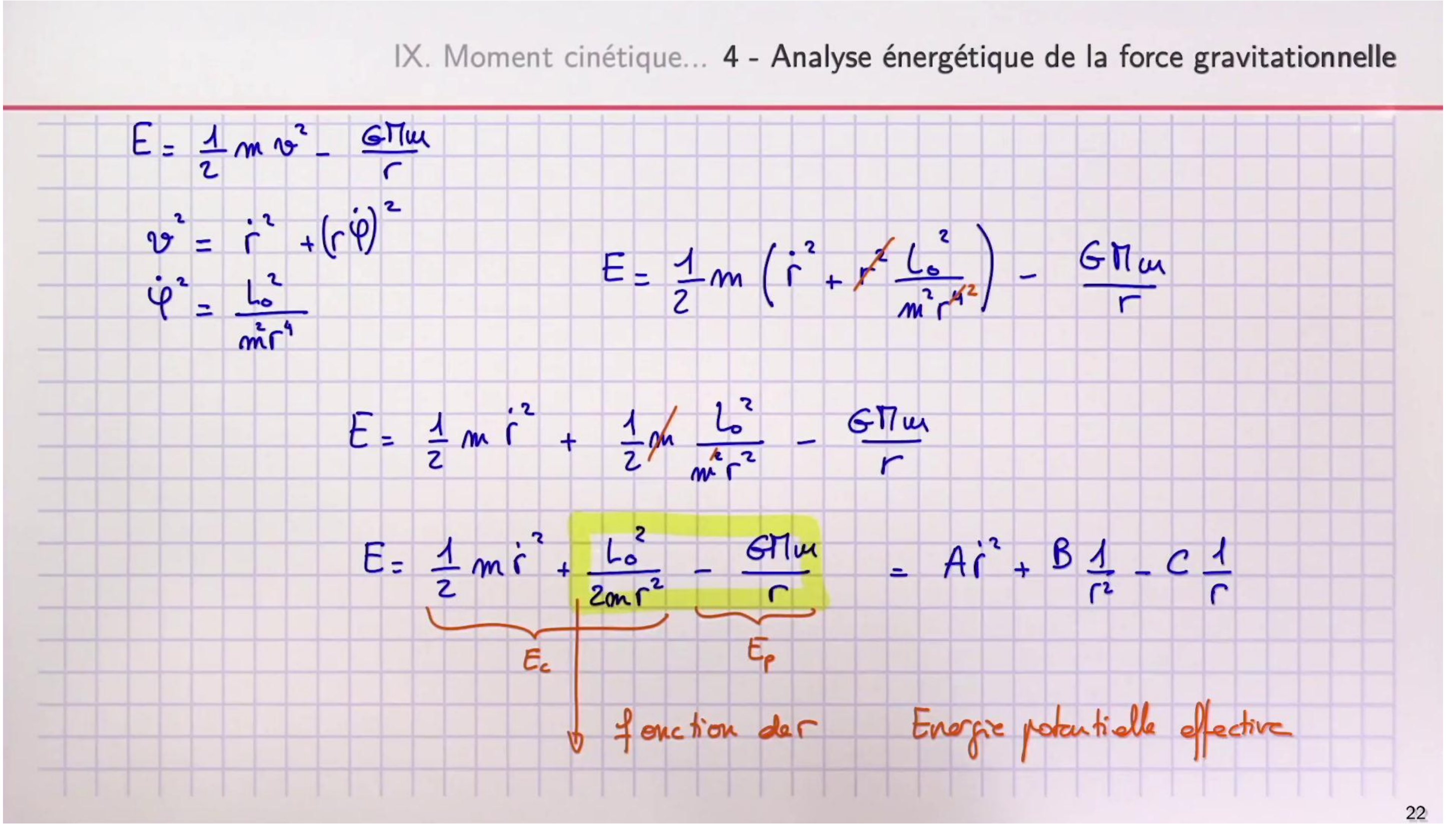


Il va falloir essayer d'exprimer autrement en fonction de cette coordonnée r. Et c'est là que nous allons utiliser la notion de moment cinétique. Je vous ai dit que le moment cinétique était particulièrement adapté pour décrire un mouvement à force centrale. La force gravitationnelle est une force centrale. Si vous retournez à la page 10 de cette présentation, vous vous rappellerez que nous avons trouvé LO égale mρ²φ.ez. Ici, rho est égal à r, c'est donc mr²φ.Ez. Puisque nous sommes dans un mouvement à force centrale, LO est une constante. Nous cherchons du φ.². Nous allons donc prendre du LO². En norme, LO² est égal à m²r⁴φ.². Et c'est une constante. Cela va nous permettre d'exprimer φ.² est égal à LO²/m²r⁴.

Notes

Summary

5m 28s



J'ai donc résumé ici ce que nous avons trouvé jusqu'à présent. Je vais maintenant remplacer φ.² dans l'expression de v et v² dans l'expression de l'énergie. Cela va me donner E est égal à 1/2m(r.² + r²LO²/m²r⁴) - GMm/r J'obtiens donc E égale à 1/2mr.² plus, je vais simplifier r² un r⁴, 1/2mLO²/m²r² - GMm/r. Je peux encore simplifier un m ici et obtenir au final E égale 1/2mr.² plus LO² sur 2mr² moins GMm sur r. J'ai donc l'énergie mécanique exprimée comme une constante multipliée par la dérivée de la norme du vecteur r plus une constante positive 1 sur r² plus une constante négative fois 1 sur r. J'ai exprimé l'énergie totale uniquement à l'aide de la grandeur r. Les deux premiers termes sont l'énergie cinétique. Le deuxième terme est l'énergie potentielle. Pourtant, si je regroupe un morceau de l'énergie cinétique, la deuxième partie, et l'énergie potentielle, je vois une fonction qui ne dépend que de r. Cette fonction a la même dimension qu'une énergie potentielle. C'est une fonction de l'espace qui se comporte comme une énergie potentielle. Par contre, elle contient un morceau d'énergie potentielle et un morceau d'énergie cinétique. C'est ce que l'on appelle l'énergie potentielle effective. Elle ne dépend que de la distance OP, donc de r, et pas de la direction du vecteur r.

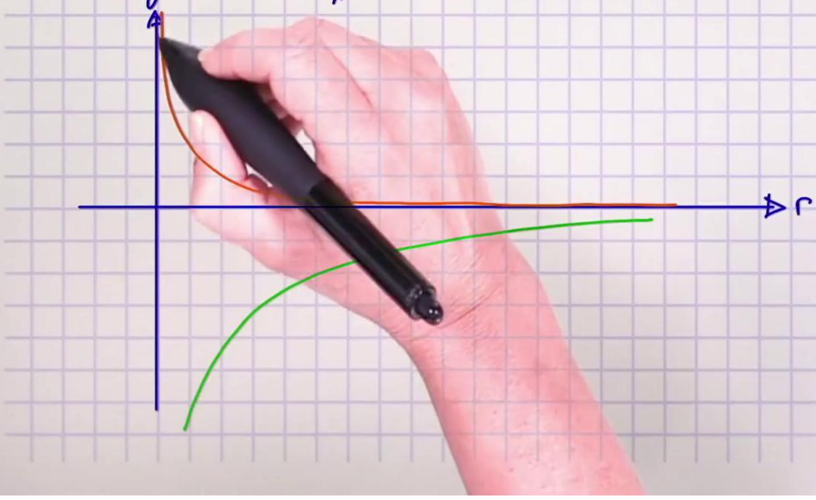
Notes

Summary

6m 44s

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r}}_{E_{p,eff}(r)} = A \cdot \frac{1}{r^2} + (-B)\frac{1}{r}$$

Analyse de $E_{p,eff}(r)$



23

Nous allons maintenant analyser plus en détail cette énergie potentielle effective. C'est une fonction de r, la distance OP, qui ne peut être que positive ou nulle. Je vais donc symboliser la fonction énergie potentielle effective en fonction de r, c'est cette fonction-là, entre 0 et l'infini. Cette fonction énergie potentielle effective a la forme A multiplié à 1/r² plus -b multiplié par 1/r. La fonction 1/r² et 1/r sont des hyperboles. Avec le préfacteur positif, j'ai une hyperbole dans le premier cadran et avec le préfacteur négatif, je vais trouver mon hyperbole en dessous de l'axe des abscisses. Par ailleurs, la première hyperbole est en 1/r². Elle est donc plus proche de ses asymptotes. Quand on tend vers 0 et vers l'infini, que la deuxième hyperbole qui, elle, est en 1/r. Je peux donc symboliser mes deux hyperboles, une que je vais tracer proche de ses asymptotes et une que je vais tracer plus loin de ces asymptotes. J'exagère un petit peu. Lorsque je fais la somme des deux, pour r tendant vers 0, c'est la courbe orange qui va gagner. Elle tend plus vite vers +∞ que la courbe verte ne tend vers −∞. Je vais donc avoir une grandeur ici, légèrement en dessous, mais proche de la courbe orange.

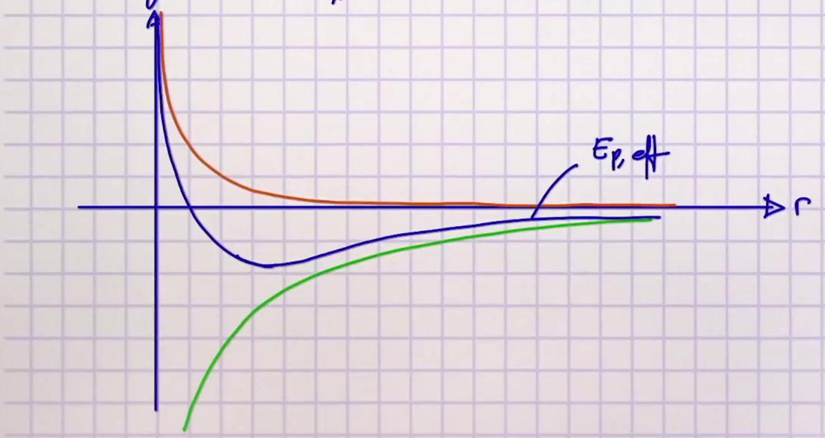
Notes

Summary

9m 21s

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r}}_{E_{p,eff}(r)} = \underbrace{A \cdot \frac{1}{r^2} + (-B)\frac{1}{r}}_{somme}$$

Analyse de $E_{p,eff}(r)$



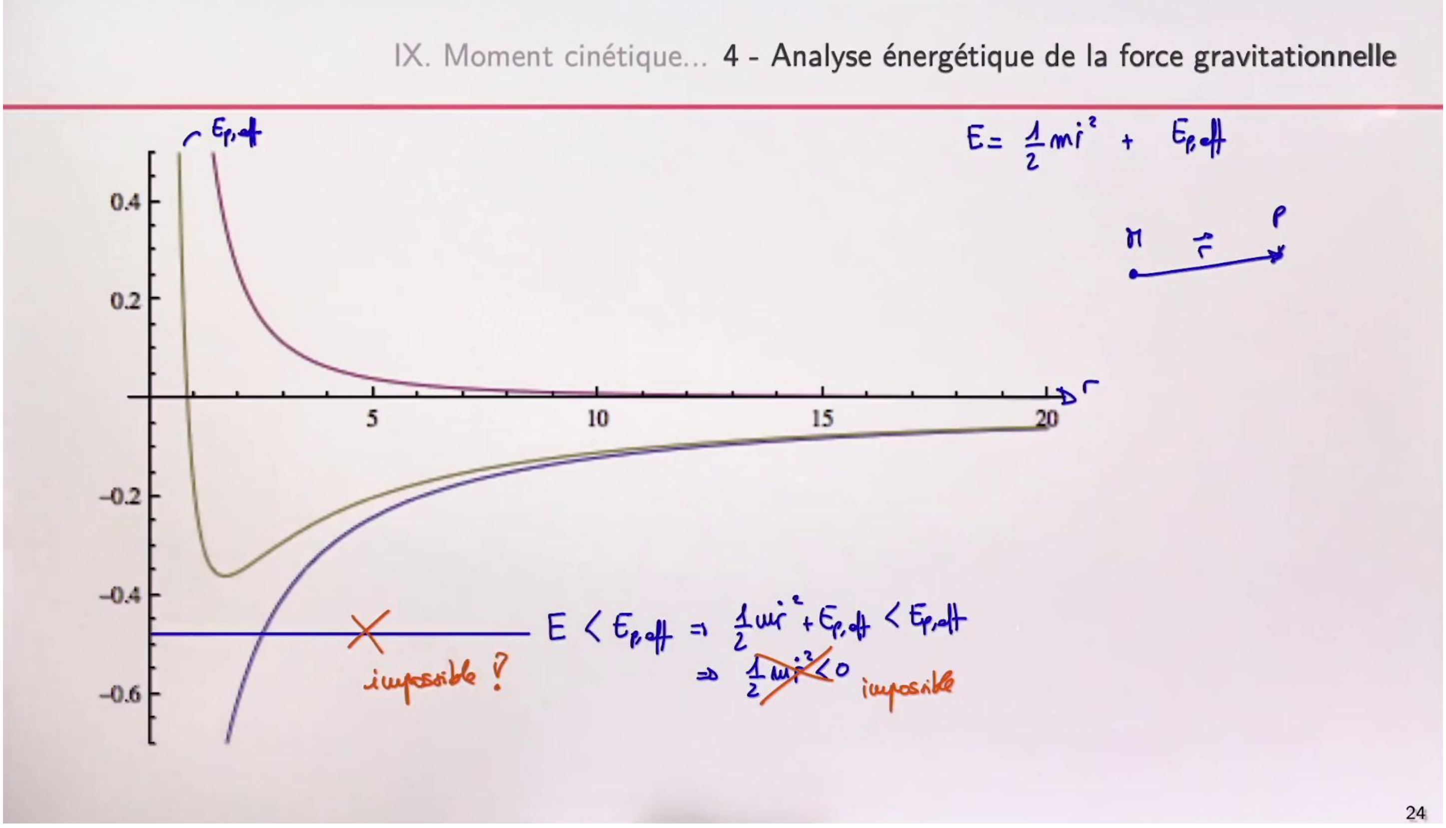
23

Par contre, lorsque je me place vers +∞, la courbe orange va tendre aussi plus vite vers 0. Donc c'est la courbe verte qui va rester le plus longtemps. Je vais donc observer la somme des deux au-dessus de la courbe verte entre l'axe des abscisses et la courbe verte. Entre les deux, je vais avoir un minimum. La somme de mes deux fonctions sera donc une courbe que je vais symboliser en bleu, qui aura cette allure-là.

Notes

Summary

11m 09s

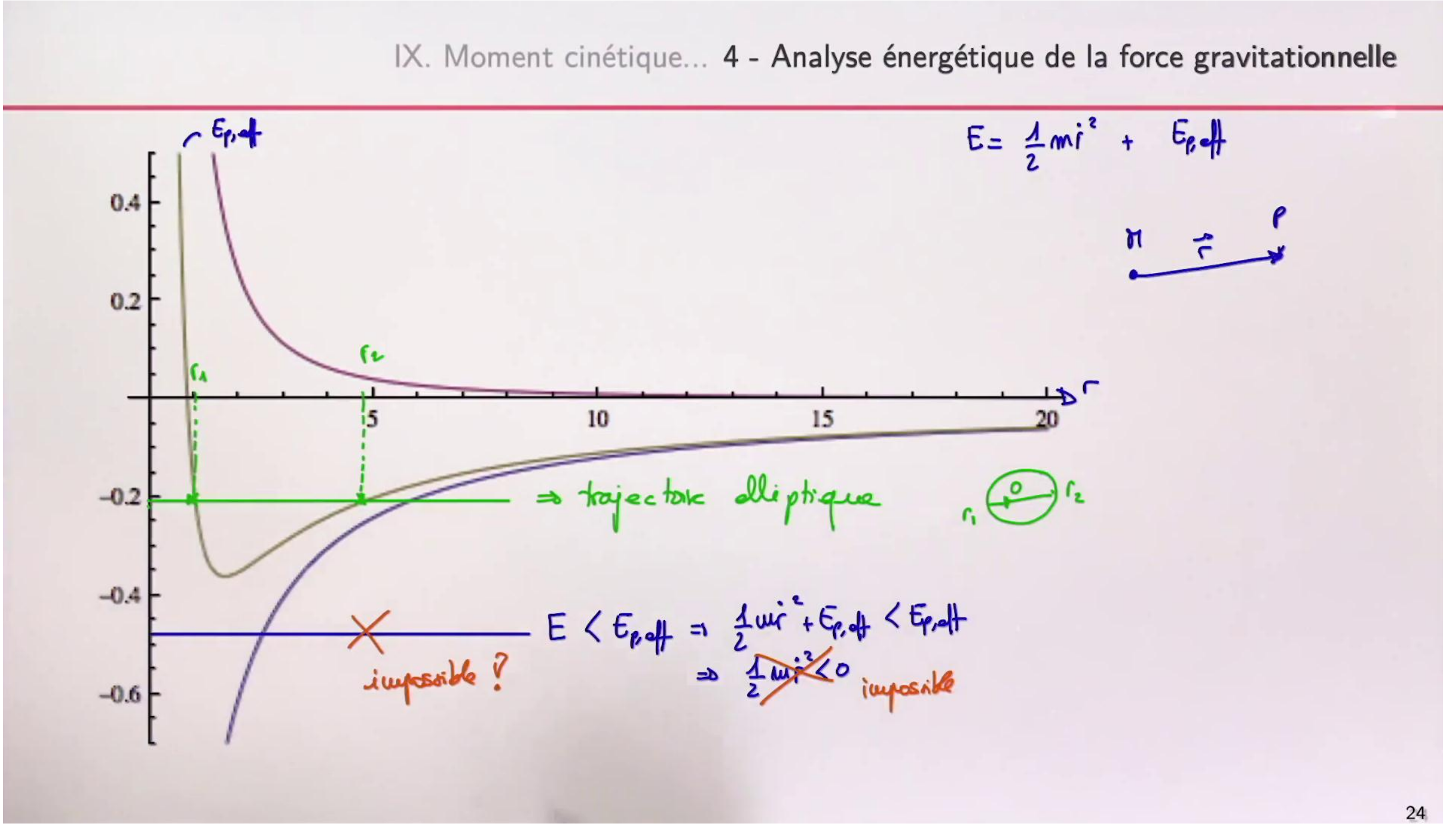


Voici à nouveau ces trois courbes tracées de manière générique. Je rappelle que nous avons l'énergie mécanique totale qui est égale à 1/2mr.² plus l'énergie potentielle effective. L'axe des abscisses est la distance r entre M et le point P. Quel que soit le déplacement de P autour de M dans un mouvement gravitationnel, je peux avoir une ellipse, une parabole ou une hyperbole, l'énergie mécanique est constante. J'ai là un diagramme d'énergie. Je peux donc placer la valeur de l'énergie mécanique qui reste une constante, quelle que soit la valeur de r. J'ai plusieurs possibilités, suivant les cas que je vais avoir. Maintenant, imaginons que je place l'énergie mécanique en dessous de la courbe de l'énergie potentielle effective. J'ai ici l'énergie mécanique totale qui est inférieure à l'énergie potentielle effective. Cela implique que 1/2mr.² plus l'énergie potentielle effective doit être inférieure à l'énergie potentielle effective. Cela implique donc que 1/2mr.² doit être négatif. Or 1/2 est positif, m est positif, r.² est positif. C'est donc impossible. Cette situation-là est donc impossible. Je ne peux avoir l'énergie mécanique qu'au-dessus de au moins certaines valeurs de l'énergie potentielle effective.

Notes

Summary

11m 47s

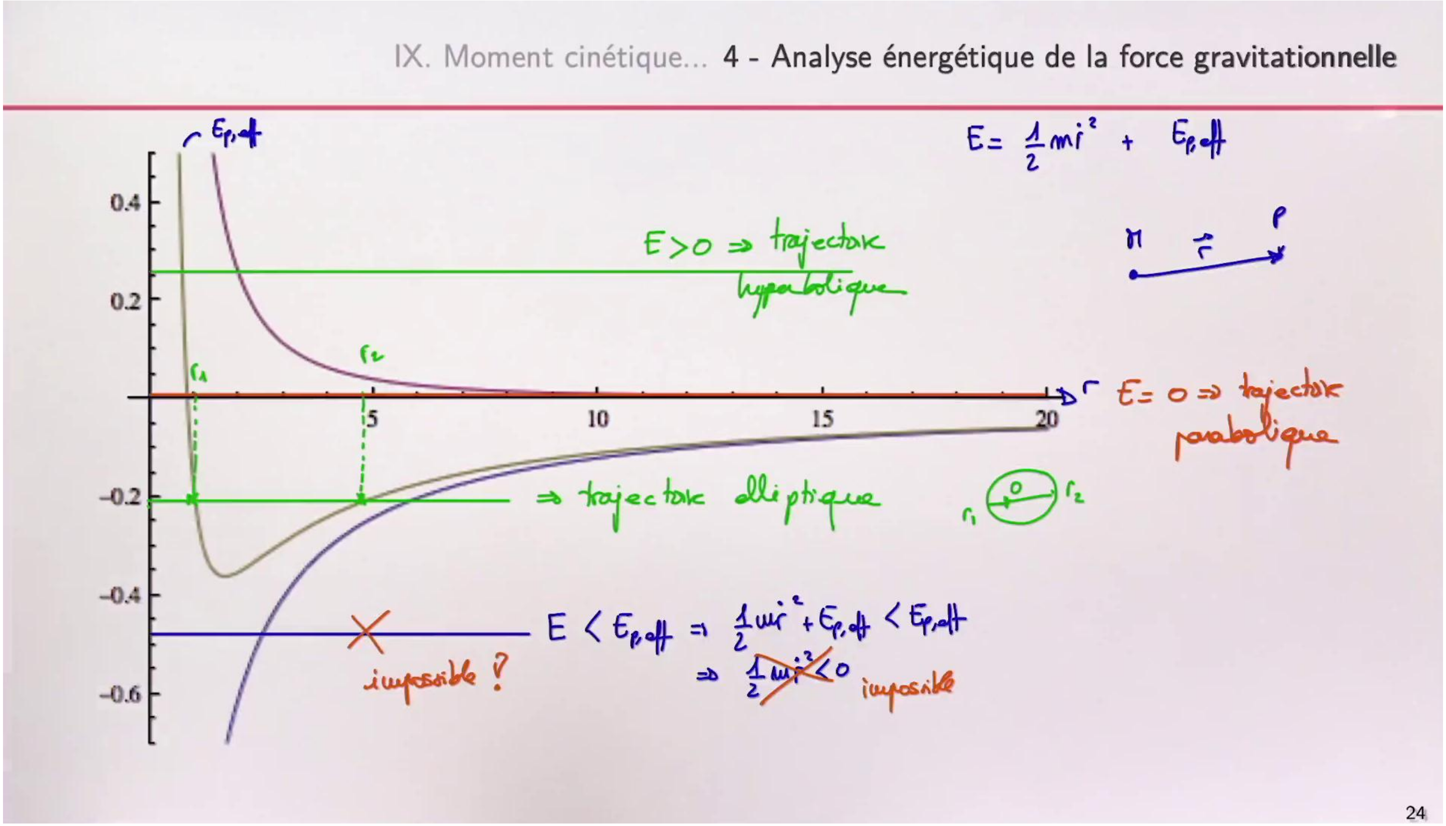


L'énergie mécanique ne peut pas être inférieure à l'énergie potentielle effective. Supposons maintenant que l'énergie mécanique soit effectivement supérieure à l'énergie potentielle effective et la coupe en deux points. Ces deux points vont être r1 et r2. Là, je peux séparer mon espace en deux zones. Une zone où l'énergie mécanique est supérieure à l'énergie potentielle effective. Dans ce cas-là, tout est possible puisque 1/2mr.² est strictement positif. Par contre, j'ai une zone de l'espace dans laquelle l'énergie mécanique serait inférieure à l'énergie potentielle effective. Je ne peux donc pas avoir de valeur de r dans ces zones-là. Cela signifie que les seules valeurs de r possibles sont contraintes entre une valeur minimum et une valeur maximum. Cela correspond à une trajectoire elliptique. Dans ma trajectoire elliptique autour du foyer, j'ai bien toujours une valeur minimum et une valeur maximum de r. r1 étant la valeur minimum et r2 la valeur maximum. Dans la trajectoire autour de O sur cette ellipse, les valeurs de r sont toujours entre r1 et r2. Si l'énergie mécanique augmente encore, je trouve toujours une ellipse, mais de plus en plus allongée.

Notes

Summary

13m 40s

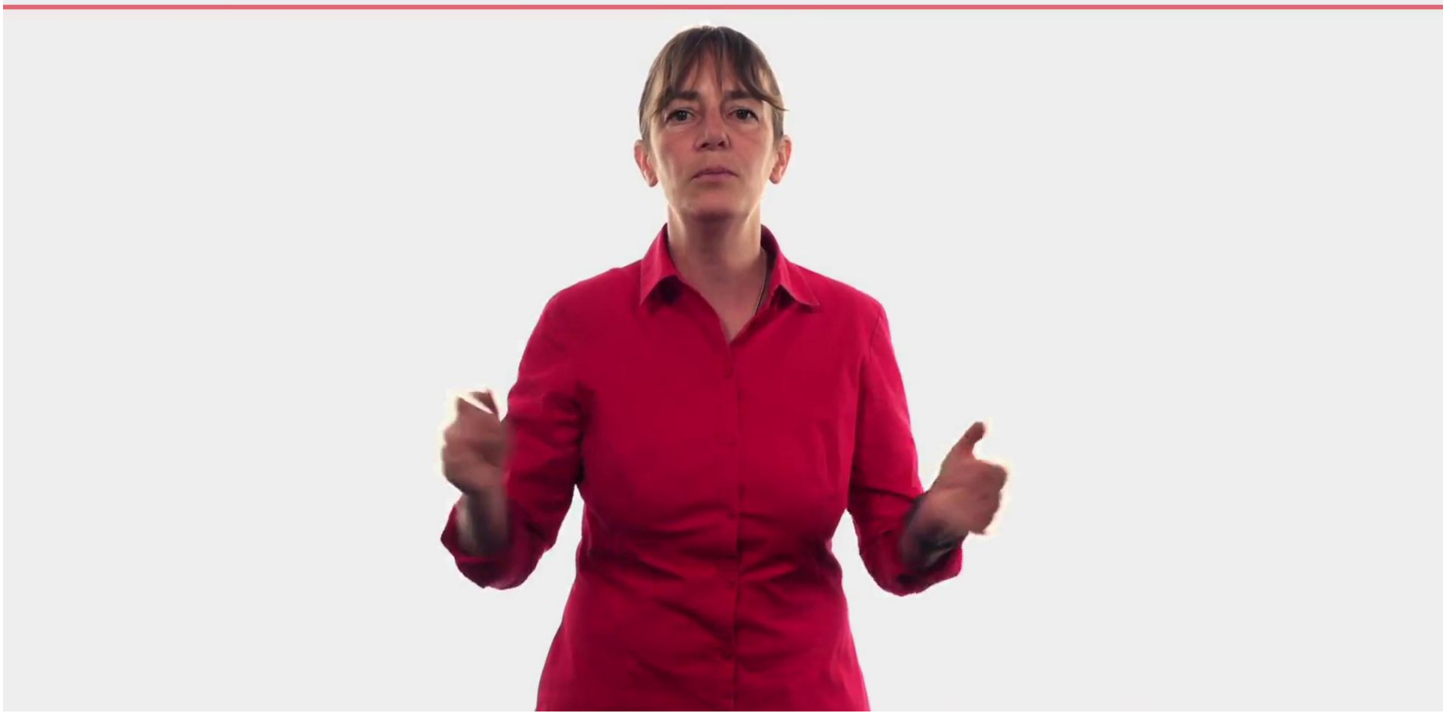


Lorsque l'énergie mécanique est très exactement égale à zéro, j'ai une ellipse tellement allongée qu'elle ne se referme jamais. Je n'ai qu'une distance minimum r1, mais je n'ai pas de distance maximum. Cela correspond à une trajectoire parabolique. C'est une trajectoire ouverte. Et si je continue à augmenter l'énergie mécanique, ici, l'énergie mécanique est strictement positive. La trajectoire obtenue est une hyperbole.

Notes

Summary

15m 44s



Voilà, nous avons réécrit l'énergie mécanique totale d'un objet dans un champ de gravitation et cela nous a permis de mettre en évidence un terme que nous avons appelé énergie potentielle effective. L'analyse de cette énergie potentielle effective permet de décider rapidement le type de mouvement que subit le corps : une ellipse, un cercle, une parabole ou hyperbole.

Notes

Summary

16m 22s