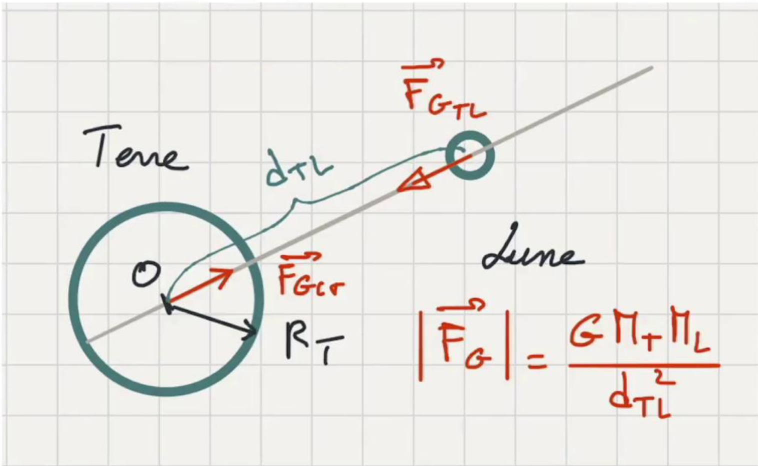
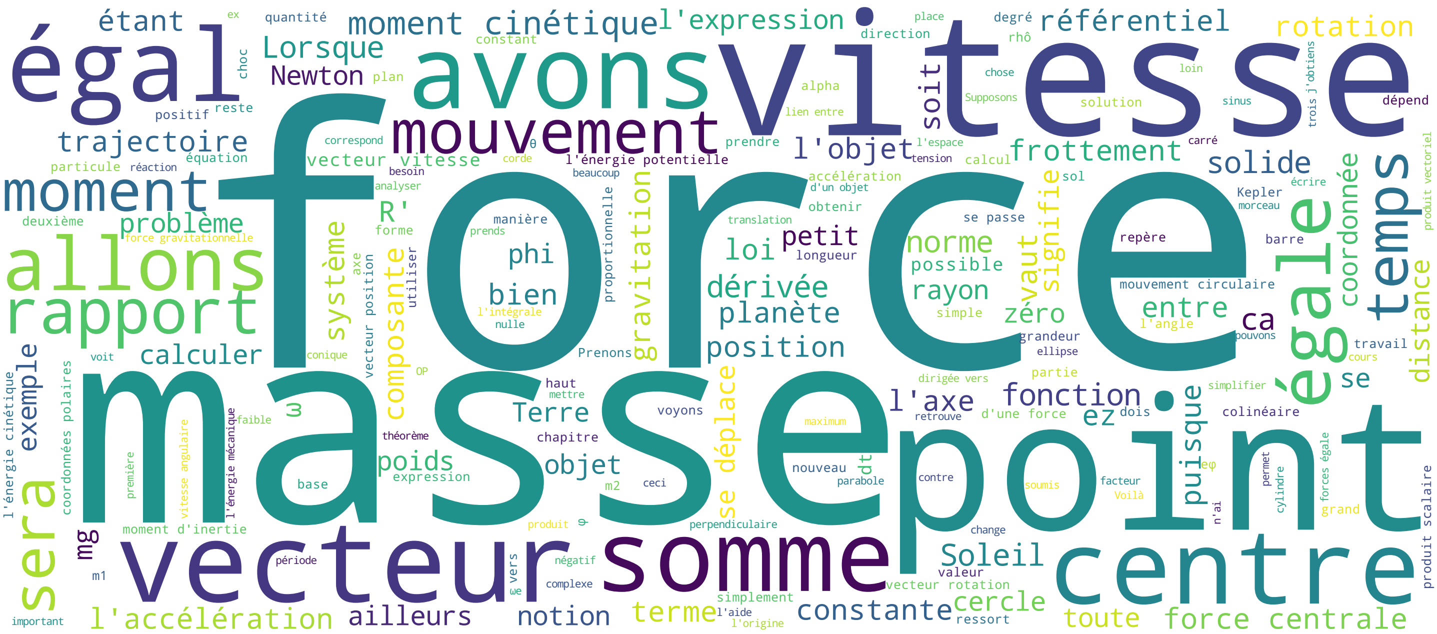


Force de gravitation

Prof. Cécile Hébert



EPFL

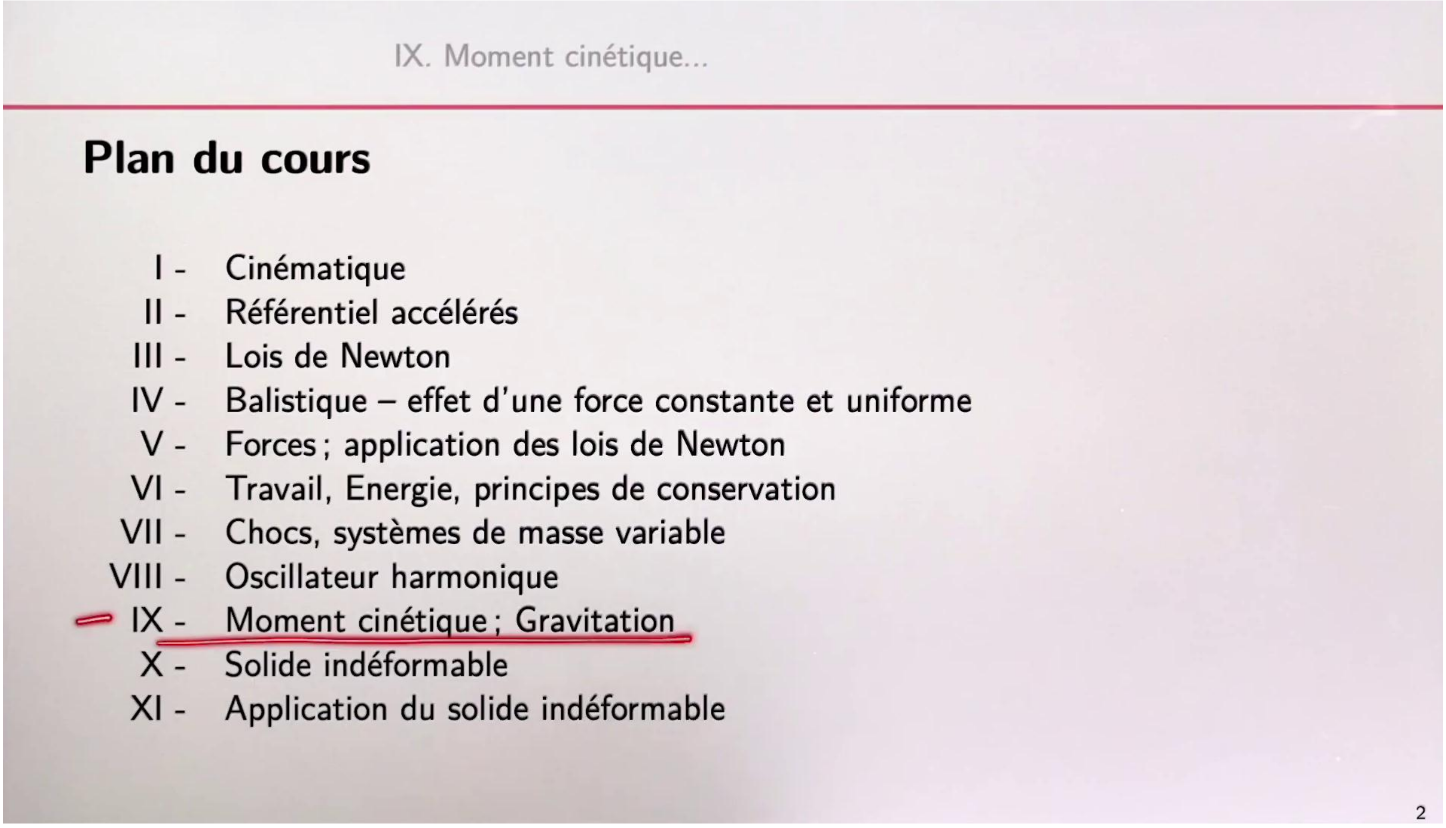
Video

Bonjour. Dans cette vidéo, nous allons voir la dernière force qui nous manquait. C'est une des forces universelles de la nature, c'est la force de gravitation. Nous avons attendu cette partie du cours pour l'aborder, car analyser le mouvement d'un objet soumis à la force de gravitation d'un corps céleste se fait particulièrement bien avec les notions de moments de force et de moments cinétiques.

Notes

Summary

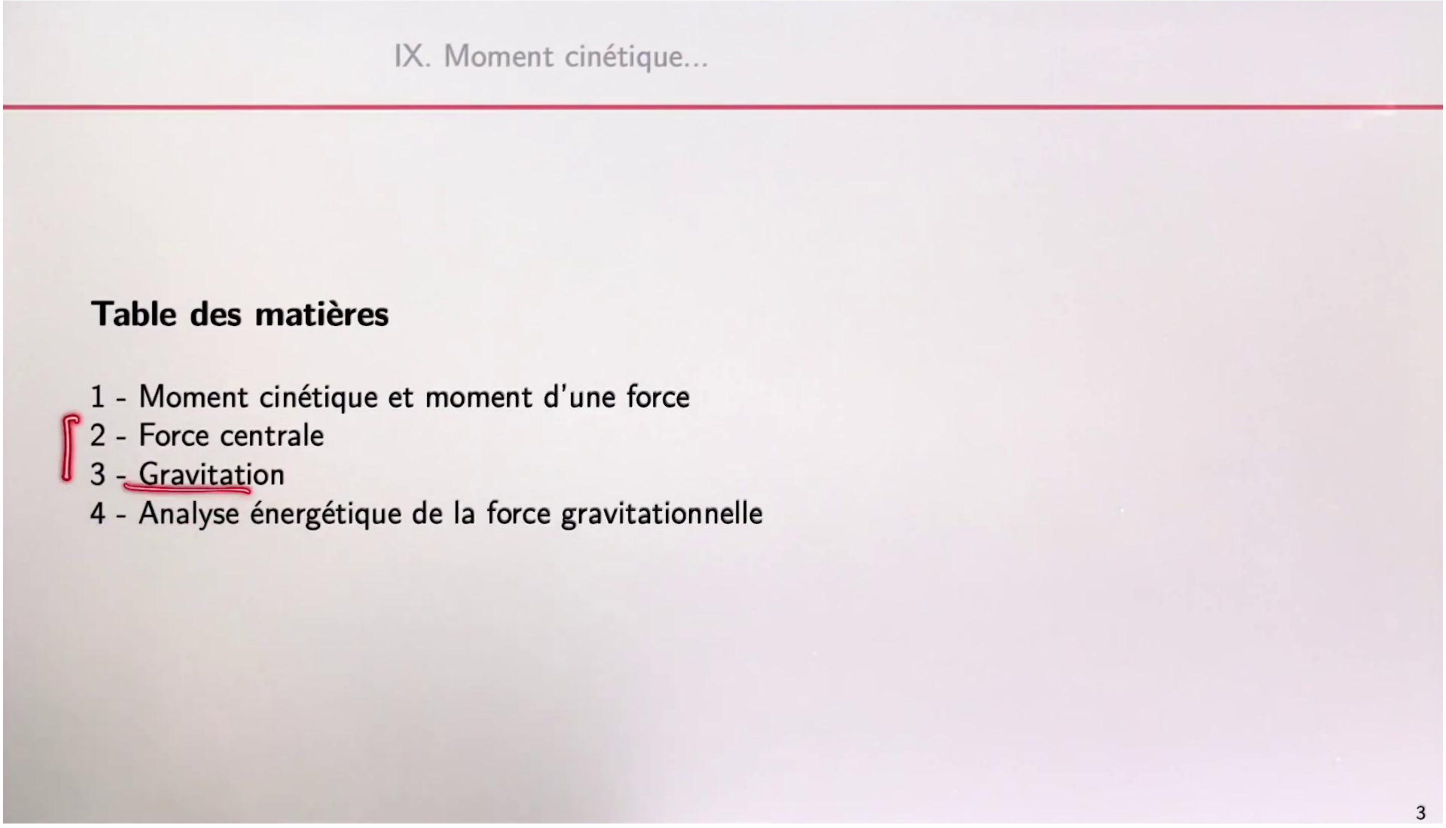
0m 05s



Notes

Summary

0m 30s

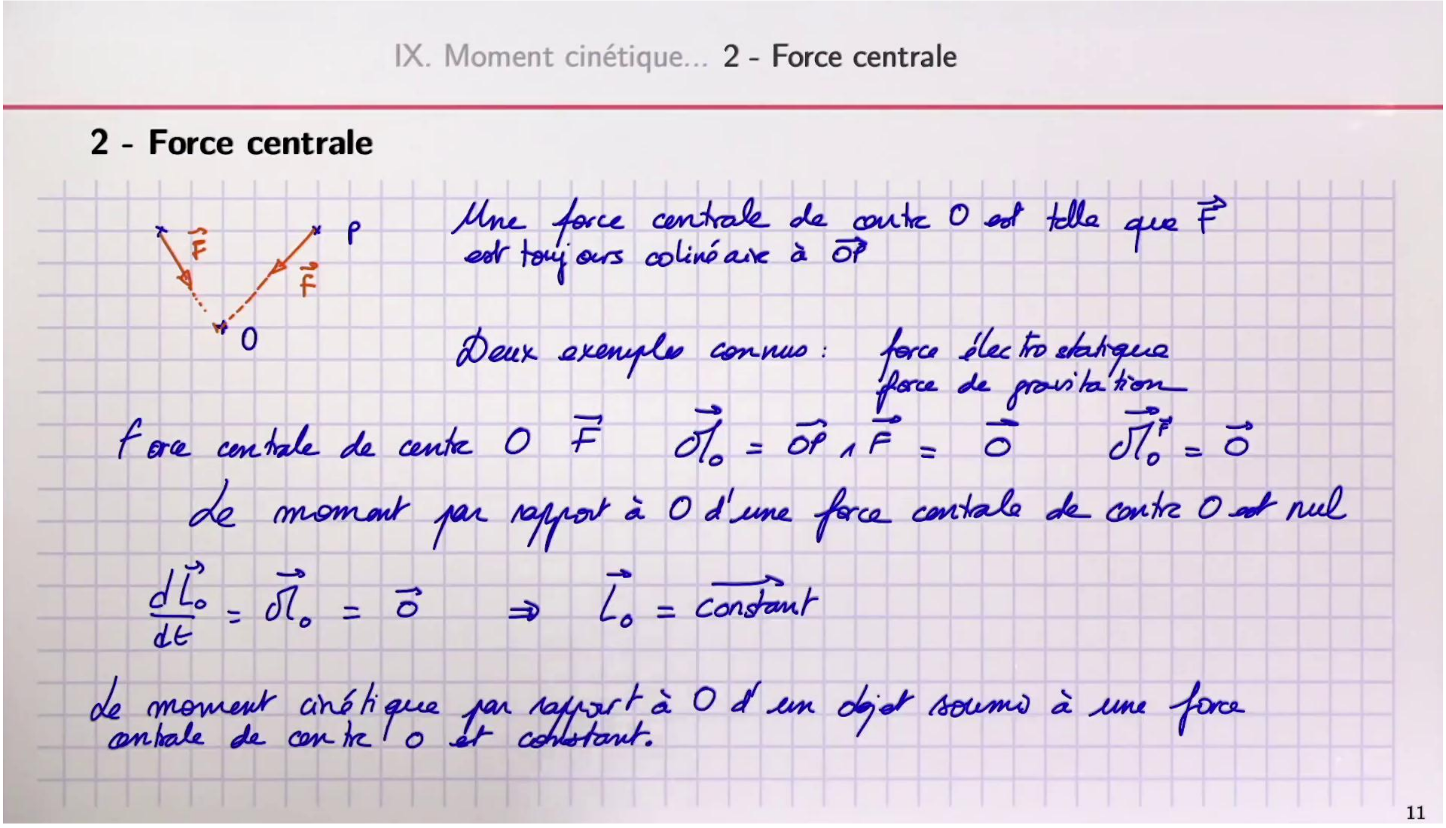


Nous sommes dans le chapitre 9 sur Moment cinétique; gravitation et nous allons voir la notion de force centrale, puis la gravitation.

Notes

Summary

0m 30s

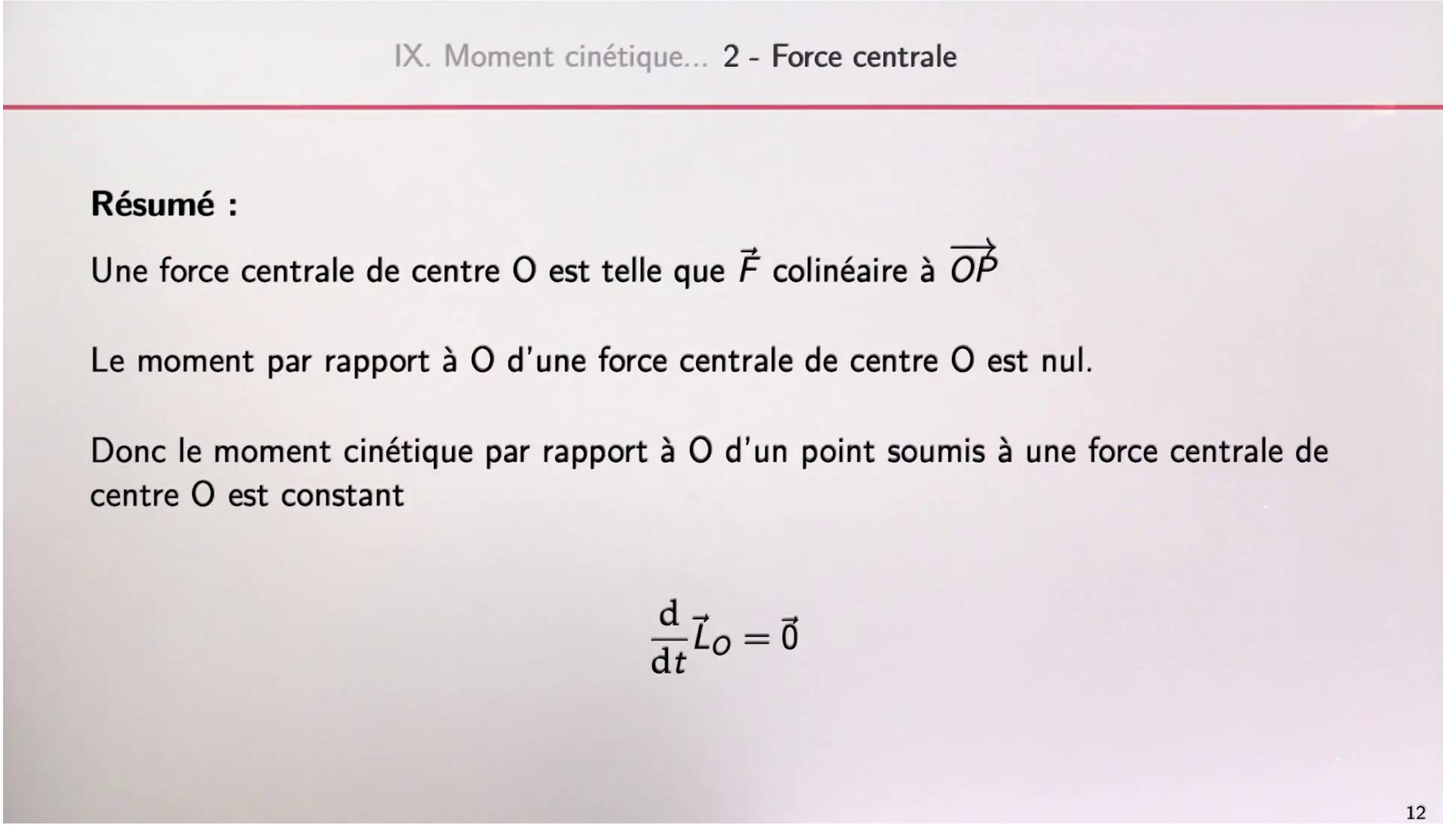


Une force centrale est un cas particulier de force. C'est une force qui est toujours dirigée vers un même point qu'on appelle le centre de la force. Nous allons l'appeler O. Si j'ai un objet P qui se déplace dans l'espace, il va ressentir de la part de quelque chose en haut une force qui est systématiquement dirigée vers haut. Par conséquent, la force centrale de centre O est telle que F est toujours linéaire à OP. Deux exemples connus sont la force électrostatique et la force de gravitation. Dans ce cours, c'est la force de gravitation qui nous occupera. Voyons ce que ça signifie avec le moment d'une force centrale. Si j'ai une force centrale de centre O, F, alors le moment par rapport à O de F est égal à OP ∧ F. Mais comme F est collinaire à OP, OP ∧ F vaut 0. Ce moment est donc égal à 0. Le moment par rapport à O d'une force centrale de centre O est égal à zéro. Ce qui est important, c'est à nouveau que c'est le même point. C'est le moment par rapport à O d'une force centrale de centre O. Si nous utilisons le théorème du moment cinétique dLo/dt, est donc égal au moment par rapport à O de la force centrale qui vaut 0. La dérivée du moment cinétique par rapport à O est nulle. Le moment cinétique par rapport à O est un vecteur constant. Le moment cinétique par rapport à O d'un objet soumis à une force centrale de centre O est constant.

Notes

Summary

0m 41s



En résumé, une force centrale de centre O est telle que F est collinéaire à OP, le moment par rapport à O d'une force centrale de centre O est nul et le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel soumis à une force centrale de centre O est constant. Nous voyons donc que cette notion de moment cinétique et de moments d'une force sera particulièrement adaptée à la description d'une force centrale. Or, la gravitation est une force centrale. Nous allons commencer par mettre en place la notion de force de gravitation et dans une prochaine vidéo, voir comment s'applique la notion de moment cinétique à cette force.

Notes

Summary

2m 43s

3 - Gravitation

Rappel historique : lois de Kepler (1571-1630) :

1– Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.

2– Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.

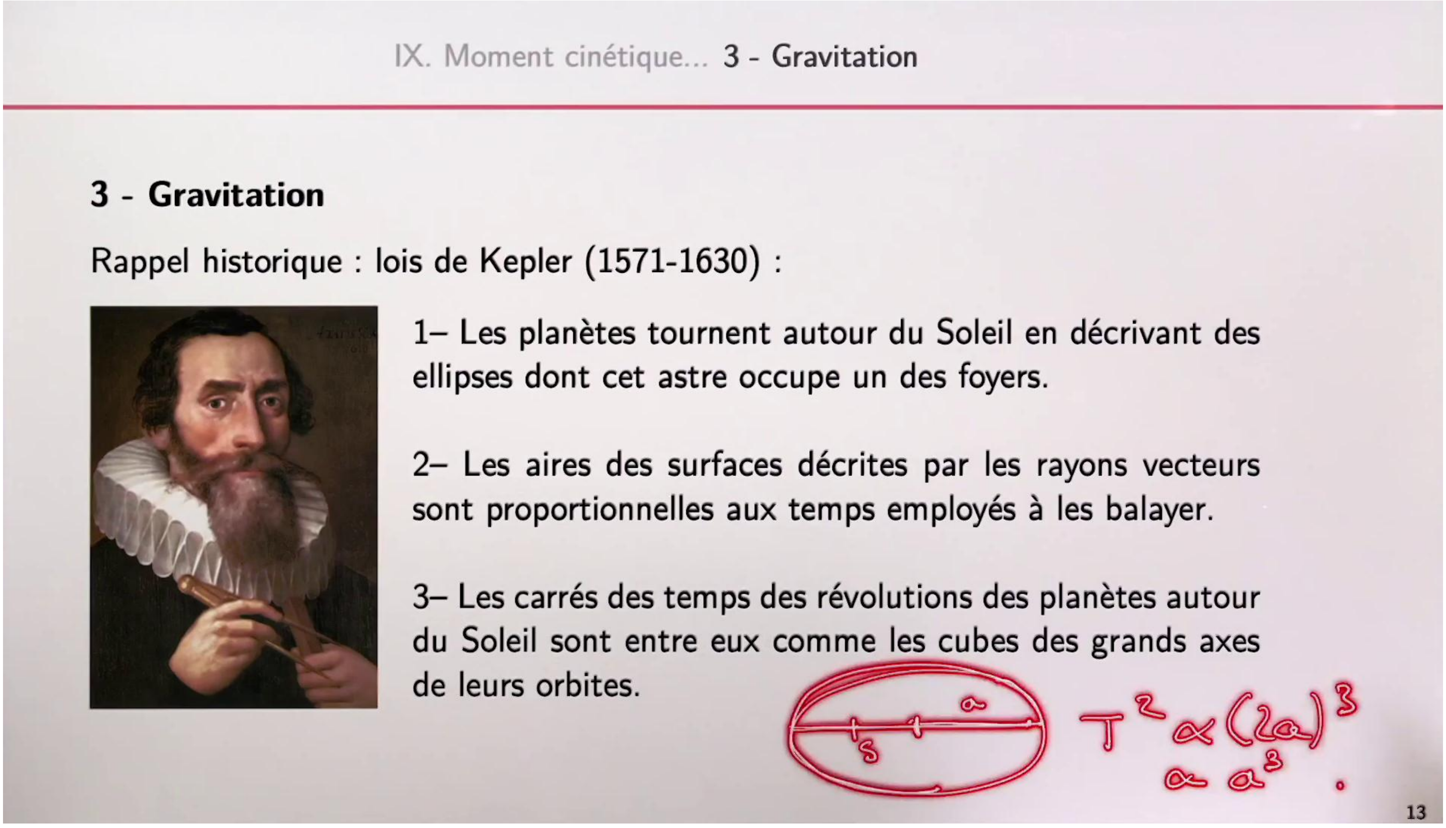
13

Commençons par un petit rappel historique. Celui-ci concerne les lois de Kepler. Avant Newton, Kepler a analysé le mouvement des planètes observées sur la voûte céleste. Les mesures faites pendant des dizaines d'années lui ont permis d'arriver à la formulation de trois lois qui simplifient particulièrement la description de la façon dont les planètes se déplacent autour du Soleil. Ces trois lois sont les suivantes. La première, les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers. La deuxième, les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles au temps employé à les balayer. Si je prends ces deux lois, cela signifie que les planètes décrivent autour du Soleil une trajectoire elliptique. Le Soleil est un des foyers. Le rayon vecteur est la distance entre le Soleil et la planète. Les aires balayées par ce rayon vecteur dépendent bien entendu de la position de la planète sur l'ellipse. Pendant un même intervalle de temps, l'aire balayée est la même. Cela signifie que lorsque la planète est éloignée du Soleil, elle doit se déplacer moins vite sur sa trajectoire, donc décrire une portion de trajectoire plus faible pendant l'été que lorsqu'elle est proche du Soleil. Cela nous dit donc que la planète se déplace sur une ellipse, va plus vite proche du Soleil et moins vite quand elle en est loin.

Notes

Summary

3m 23s

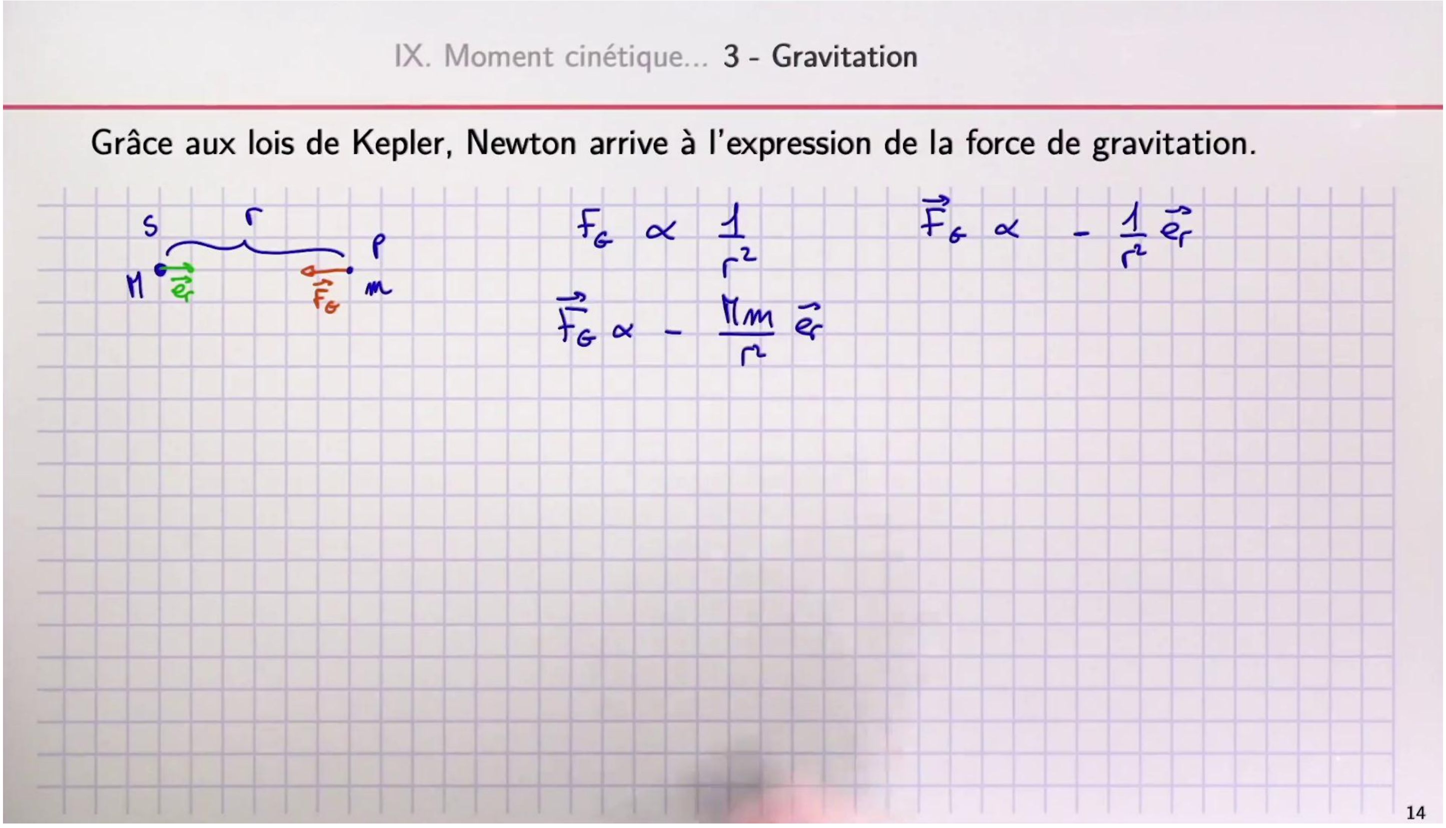


Et enfin, la dernière loi de Kepler, les carrés des temps de révolution autour du Soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites. Cela signifie que si je considère une planète qui se déplace autour du Soleil sur une trajectoire elliptique, le grand axe de cette ellipse a une longueur qui fait 2a, a étant le demi grand axe. La période de révolution au carré est proportionnelle à $2a^3$. Ce qui revient à dire qu'elle est proportionnelle à a^3.

Notes

Summary

5m 05s

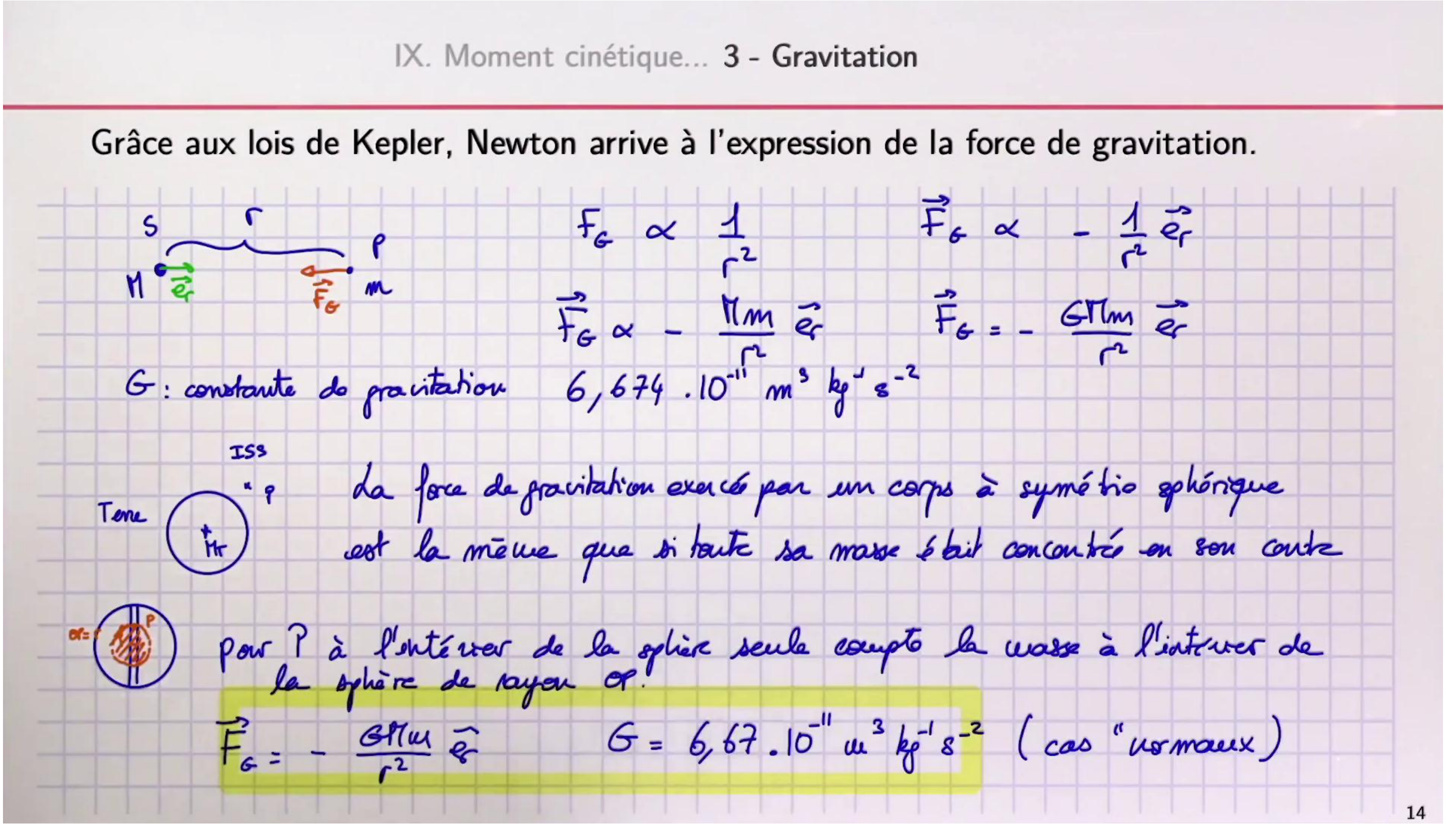


À l'aide de l'expression des lois de Kepler, il a été possible à Newton d'arriver à l'expression de la force de gravitation. On peut en effet montrer mathématiquement que les lois de Kepler impliquent que si j'ai le Soleil qui attire une planète, la force de gravitation Fg du Soleil sur la planète doit être proportionnelle à 1/r². r est la distance entre le Soleil et la planète. Par ailleurs, la force de gravitation est une force qui pointe toujours vers le Soleil. C'est une force centrale. Si j'appelle er le vecteur unitaire dirigé du Soleil vers la planète, qui correspond au vecteur de coordonnées sphériques de centre le Soleil. À ce moment-là, Fg doit être proportionnelle à 1/r² er. Et comme il pointe vers le Soleil, j'ai un moins devant. Par ailleurs, le Soleil a une masse M, la planète a une masse m, la symétrie du problème fait que les deux masses doivent intervenir. En effet, la troisième loi de Newton implique que la force du Soleil sur la planète est égale en norme et opposée en direction à la force de la planète sur le Soleil. Donc, au final, la force de gravitation est proportionnelle à -Mm/r² er. Appelons grand G le facteur de proportionnalité et nous obtenons Fg = -GMm/r² er.

Notes

Summary

5m 51s

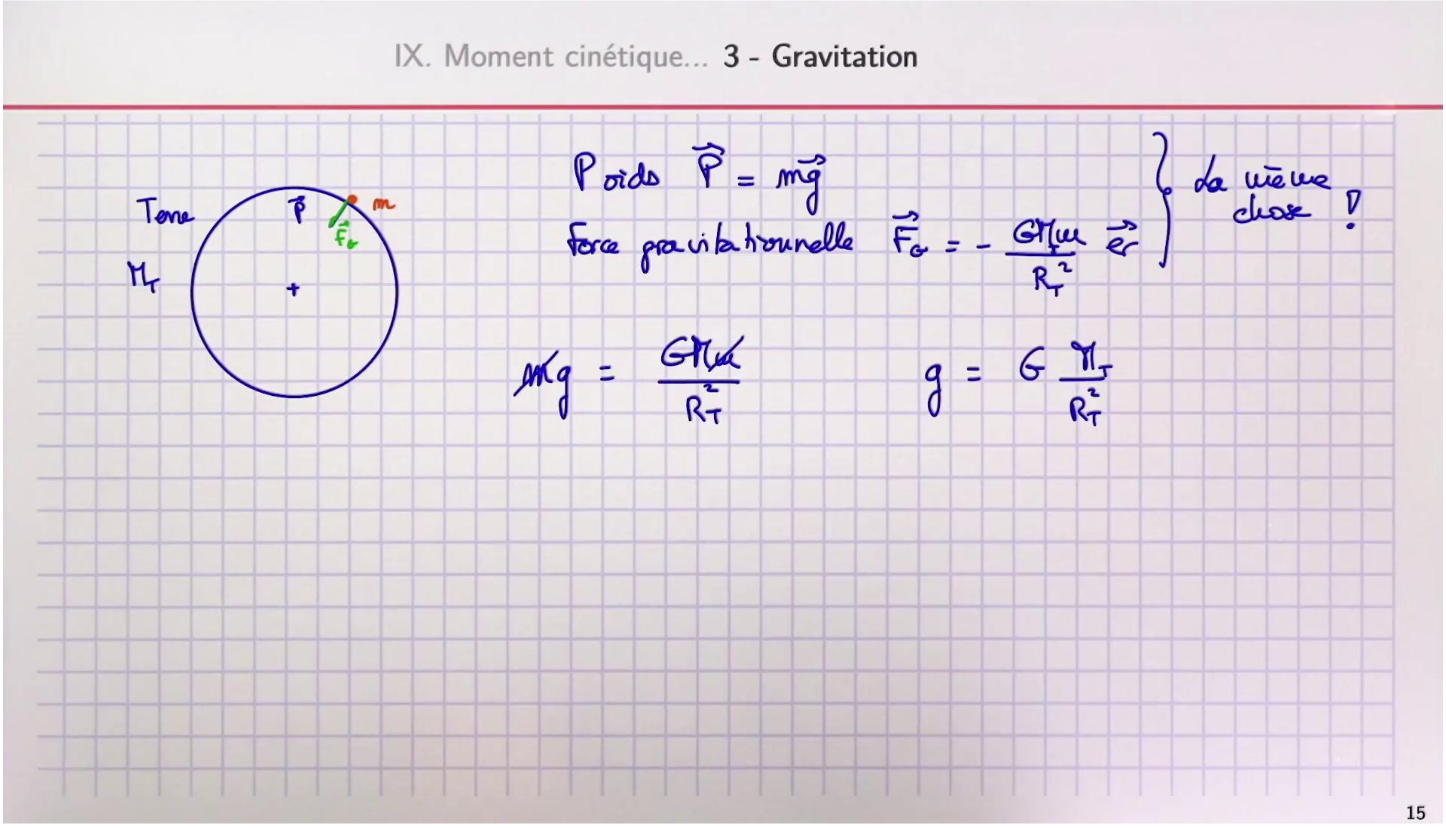


G est la constante de gravitation. C'est une constante universelle qui vaut 6,674 × 10∧-11 m³ kg∧-1 s∧-2. Pour l'instant, nous avons fait un schéma avec une planète éloignée du Soleil. Nous avons considéré les corps comme des objets ponctuels. Mais que se passe-t-il si on n'est pas si loin que ça de l'objet qui exerce une attraction gravitationnelle ? Prenons par exemple la Terre avec l'ISS qui tourne autour à 400 km d'altitude. 6 400 km pour le rayon, 400 km d'altitude ici. Je ne peux pas négliger le rayon terrestre. Si on considère la Terre comme un corps à symétrie sphérique, la force de gravitation conserve la même expression que si toute la masse de la Terre était concentrée en son centre. Si nous avons un cas un peu pathologique, imaginons que la Terre soit creusée d'un tunnel et plaçons l'objet qui nous intéresse à l'intérieur de ce tunnel. Nous avons la distance OP qui vaut r. À ce moment-là, seul compte la masse à l'intérieur de la sphère de rayon OP. Généralement, les seuls problèmes qui nous intéresseront, seront ceux où l'objet est loin de la masse qui exerce une attraction gravitationnelle ou bien au moins à l'extérieur. Dans ces deux cas, nous pourrons utiliser l'expression Fg = -GM/r² er avec G la constante de gravitation universelle.

Notes

Summary

7m 43s

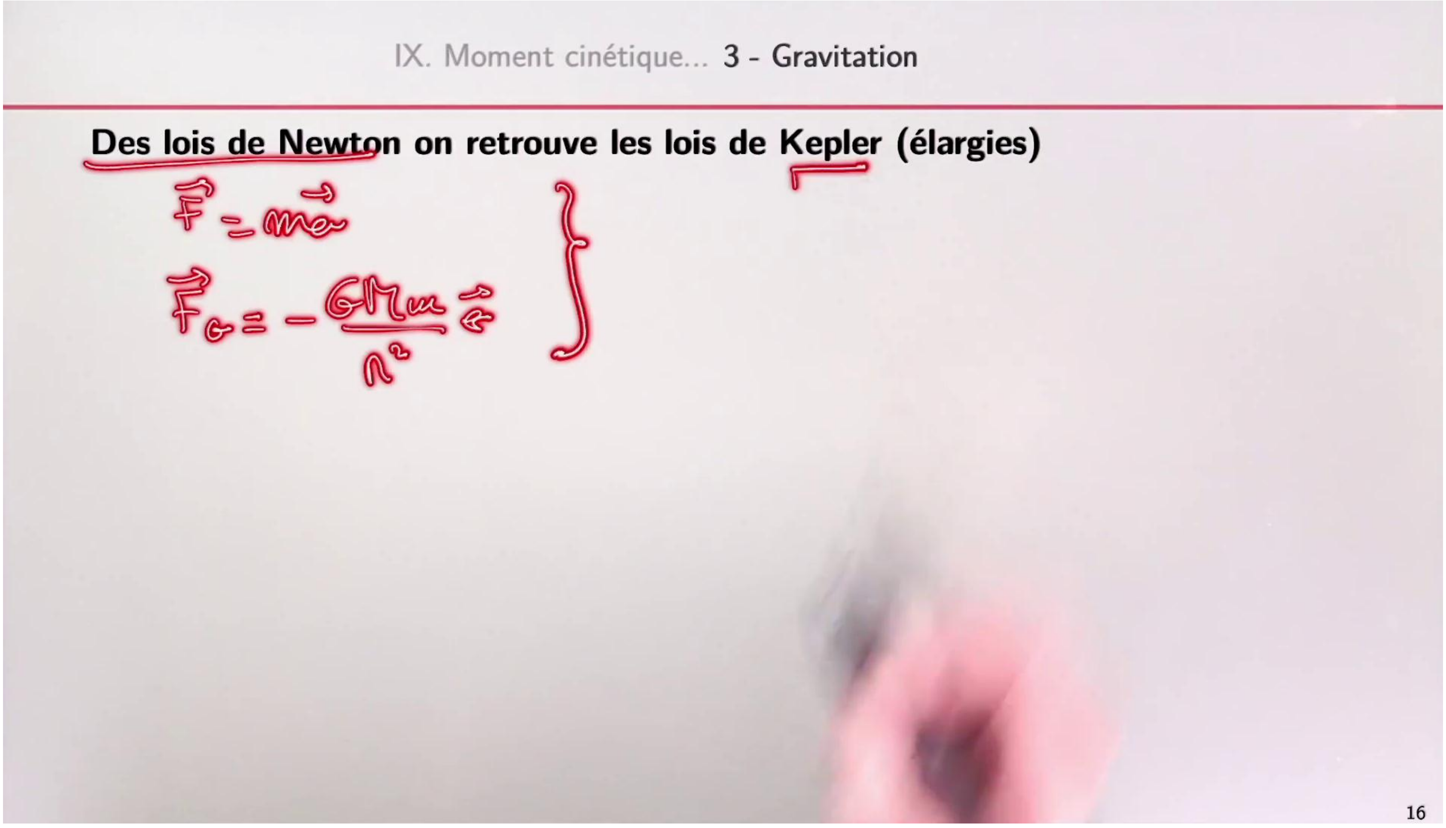


Cela va nous permettre de faire directement le lien entre la force de gravitation et le poids. Supposons que nous ayons la Terre, un objet p situé à la surface de la Terre. Il a une masse m. Il est donc soumis à son poids P = mg. Il est aussi soumis à la force de gravitation Fg. Mais bien entendu, il n'y a pas ces deux forces séparées. Le poids n'est qu'une expression locale de la force de gravitation. Le poids est dû à l'attraction gravitationnelle de la Terre. Cette attraction gravitationnelle a la même expression que si la masse de la Terre était concentrée en son centre. L'expression de la force gravitationnelle sera donc -GMm/RT² er et l'expression du poids sera mg. Ces deux forces sont la même chose. Elles doivent donc avoir la même norme. J'ai donc mg = GMm/RT². En simplifiant par m, je trouve g = GM/RT², M étant la masse de la Terre. Tant que l'on se trouve à une distance du sol qui est faible devant RT, la valeur de G ne changera pas beaucoup. Par contre, si on s'éloigne de la surface de la Terre et que la distance au sol n'est plus négligeable devant RT, cela aura une influence sur la valeur de G.

Notes

Summary

9m 45s



Les lois de Kepler ont permis à Newton de formuler l'expression de la force gravitationnelle. Cela marche dans l'autre sens aussi. Des lois de Newton, on arrive à retrouver les lois de Kepler. Mais en fait, on arrive même à les retrouver élargies. Des lois de Newton qui sont somme des forces égale ma et de l'expression de la force gravitationnelle, il est possible de démontrer mathématiquement que le mouvement des planètes sont des coniques. En fait, ce que Kepler a trouvé, les ellipses ne sont qu'une forme particulière de conique.

Notes

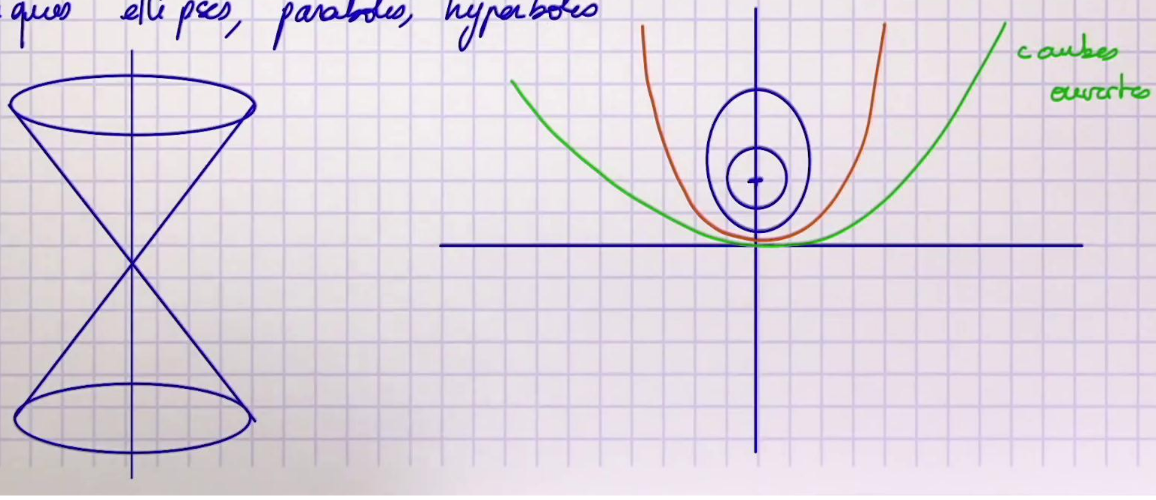
Summary

11m 41s

Des lois de Newton on retrouve les lois de Kepler (élargies)

Le mouvement d'un objet dans le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle est une cônique. La masse ponctuelle occupe le foyer.

Côniques ellipses, paraboles, hyperboles



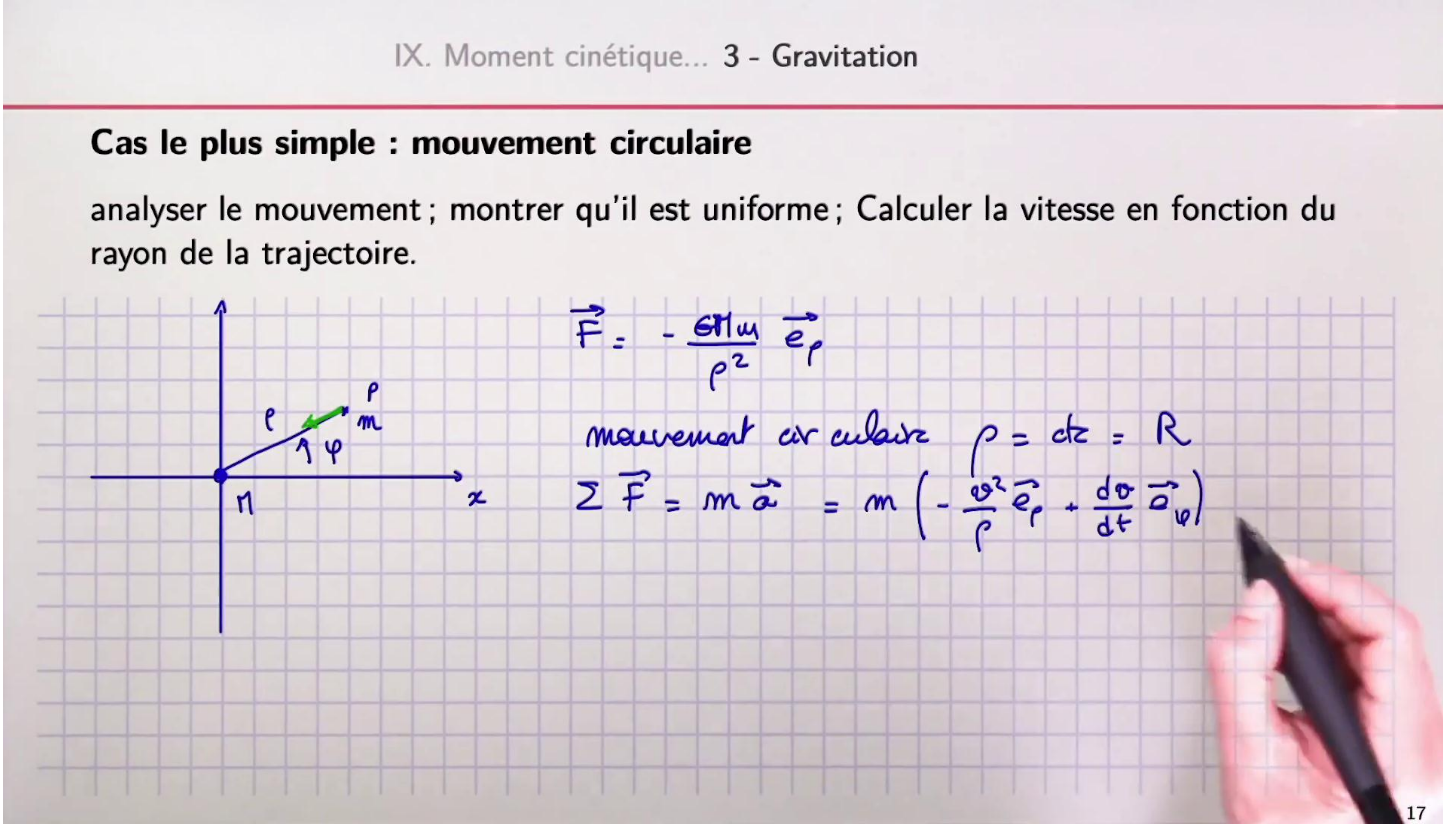
16

Le mouvement d'un objet dans le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle est une conique. La masse ponctuelle occupe le foyer. Il existe trois types de coniques. Les ellipses, les paraboles et les hyperboles. Si nous faisons l'intersection d'un cône avec un plan perpendiculaire à l'axe du cône, nous obtenons un cercle. Prenons un plan incliné par rapport à l'axe du cône. L'intersection sera une ellipse. Si nous prenons un plan parallèle à la génératrice du cône, nous obtiendrons comme intersection une parabole. Et pour l'intersection d'un cône avec un plan plus incliné, on obtient une hyperbole. C'est pour ça que ces courbes s'appellent des coniques. Le cercle est un cas particulier de l'ellipse. L'ellipse et le cercle sont toutes les deux des courbes fermées. Alors que la parabole et l'hyperbole sont des courbes ouvertes. Un objet placé dans le champ de gravitation du Soleil peut avoir toutes ces trajectoires. Mais bien entendu, Kepler, pour établir ses lois, a dû regarder les objets qui repassaient souvent. Donc, il n'a pu observer que des courbes fermées. C'est pour ça qu'il s'était limité aux ellipses. De passer aux lois de Newton, il est possible donc d'élargir la vue des lois de Kepler.

Notes

Summary

12m 26s

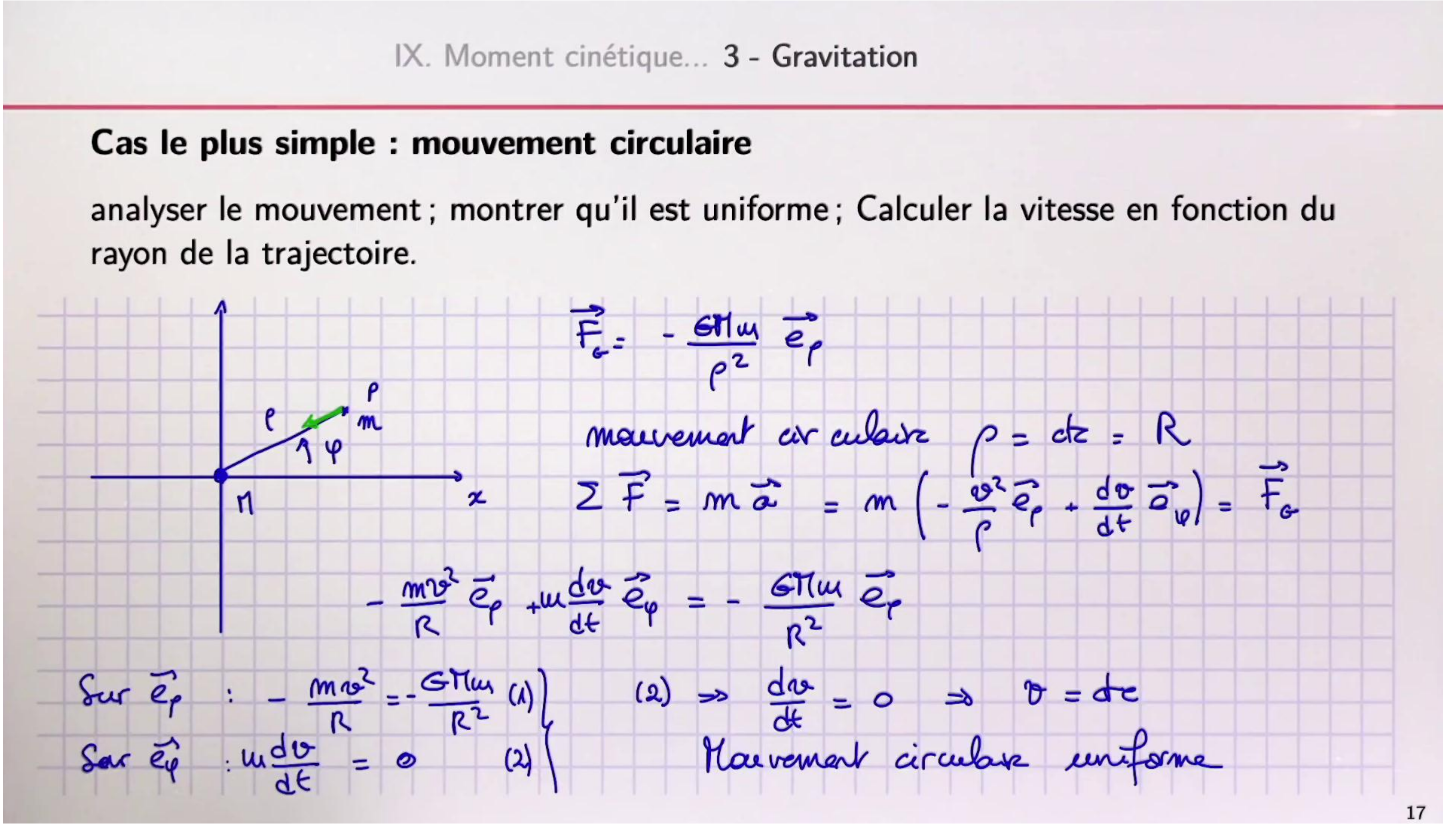


Ces calculs génériques avec les coniques sont relativement complexes. Nous allons nous intéresser au cas le plus simple d'un mouvement circulaire. Le but va être d'analyser le mouvement, montrer que s'il est circulaire, alors il est uniforme et calculer la vitesse de l'objet en fonction du rayon de la trajectoire. Nous allons donc nous placer dans la situation suivante. Nous supposons qu'il y a un corps céleste, par exemple la Terre, de masse M, qui exerce une attraction gravitationnelle sur un objet que nous allons placer en P. Tout se passe dans un plan. Nous allons utiliser les coordonnées polaires qui sont bien adaptées à ce type de mouvement. La force gravitationnelle de M sur m est dirigée vers M. La force gravitationnelle s'exprime donc ici $-GMm/\rho^2\ e_\rho$. Par ailleurs, nous avons fait une hypothèse forte. Nous avons supposé que le mouvement est circulaire. Si le mouvement est circulaire, nous avons forcément ρ égale constante et nous avons appelé R, le rayon du cercle. Nous allons écrire les lois Newton, somme des forces égale ma, en coordonnées polaires. L'accélération en coordonnées polaires est donnée par $-v^2/\rho\ e_\rho + dv/dt\ e_\varphi$. Ceci doit être égal à la force de gravitation Fg.

Notes

Summary

14m 23s



Par ailleurs, ρ égal R. Je vais donc pouvoir remplacer ρ ici. J'ai donc $-mv^2/R$ eρ + mdv/dt eφ qui doit être égal à $-GMm/R^2$ eρ. Cela nous donne deux équations, une sur eρ qui est $-mv^2/R = -GMm/R^2$ et une équation sur eφ qui est mdv/dt, j'ai oublié un m, égal rien du tout sur eφ, donc 0. Je vais commencer par utiliser cette deuxième équation. Elle implique que dv/dt = 0, donc v = constante. Attention, c'est la norme du vecteur vitesse. Le vecteur vitesse n'est pas constant, mais sa norme est constante. J'ai un mouvement circulaire et la norme de v est constante, c'est donc bien un mouvement uniforme. Si le mouvement est circulaire, il est donc uniforme.

Notes

Summary

16m 14s

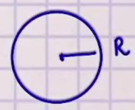
IX. Moment cinétique... **3 - Gravitation**

$$\frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{R}} = \frac{GM\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \text{cte}$$

Période T = temps pour faire un tour (longueur $2\pi R$)

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM}$$ 3e loi de Kepler !



$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$ Si on connaît R et T on peut mesurer M

18

L'équation 1 de tout à l'heure serait écrit. $mv^2/R = GMm/R^2$ Je peux simplifier par m, simplifié un R, et cela me donne l'expression de v qui vaut $\sqrt{GM/R}$. Je retrouve bien une constante puisque j'ai un mouvement circulaire, R est constant, M, c'est la masse de la Terre et G, la constante de gravitation universelle. Donc la vitesse est constante et j'ai son expression. La période t, c'est le temps qu'il faut pour faire un tour. La longueur d'un tour, c'est $2\pi r$. Le temps pour parcourir ce tour avec la vitesse v est donc $2\pi R/v$, soit $2\pi R\sqrt{(R/GM)}$, soit $2\pi\sqrt{(R^3/GM)}$. En élevant tout cela au carré, j'obtiens $T^2 = 4\pi^2R^3/GM$. C'est la troisième loi de Kepler. Pour un mouvement circulaire, ce qui correspond au grand axe est tout simplement le diamètre du cercle, le demi grand axe et le rayon. Par ailleurs, je peux réexprimer avec ça la masse M de la planète. Cela me donne $M = 4\pi^2R^3/GT^2$. $4\pi^2$ est une constante, G est une constante. Si je connais le rayon de la trajectoire circulaire et la période de la trajectoire, je suis capable de mesurer M. Il est donc possible de mesurer la masse du Soleil à l'aide des rayons des trajectoires des planètes et des temps de révolution. On observe autre chose.

Notes

Summary

17m 49s

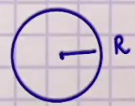
IX. Moment cinétique... **3 - Gravitation**

$$\frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{R}} = \frac{GM\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = cte$$

Période T = temps pour faire un tour (longueur $2\pi R$)

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM}$$ 3ᵉ loi de Kepler !



$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$ Si on connaît R et T on peut mesurer M

18

Plus le rayon est grand, plus la vitesse est faible. Prenons deux planètes, une sur une trajectoire de rayon faible et une sur une trajectoire d'un grand rayon. Celle sur la trajectoire de rayon plus faible a une norme de vitesse plus grande. Celle sur la trajectoire plus éloignée a la norme de sa vitesse qui est plus faible. En plus, elle a beaucoup plus de chemin à parcourir. Le temps qu'il lui faudra pour faire un tour complet du Soleil sera beaucoup plus grand que pour la planète proche du Soleil.

Notes

Summary

20m 17s

Voilà, nous avons donc vu cette dernière force, la force de gravitation, et nous avons pu l'analyser grâce aux notions de moments de la force de gravitation et de moments cinétiques. Nous avons vu aussi une propriété importante des mouvements à force centrale lorsque l'objet est soumis à une force qui pointe toujours vers un centre. Dans la prochaine vidéo, nous verrons comment associer les notions d'énergie à la force de gravitation.

Notes

Summary

20m 53s