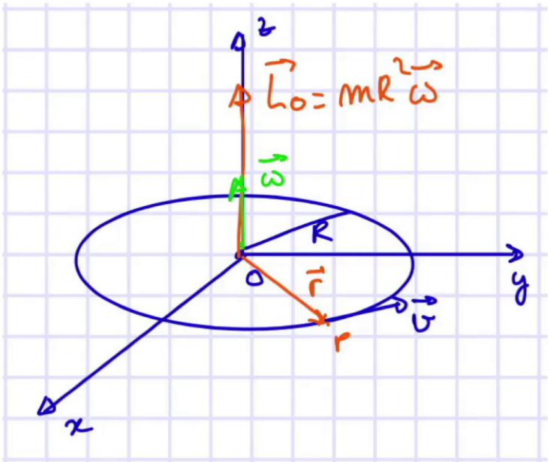
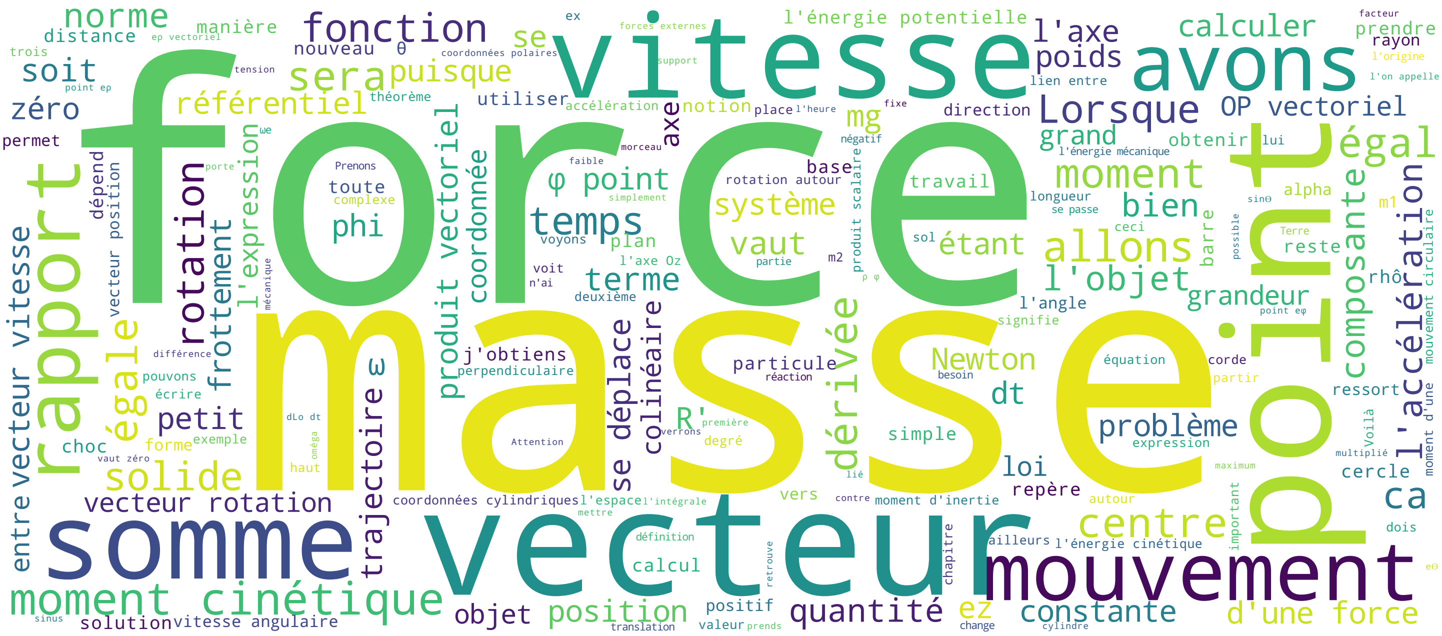
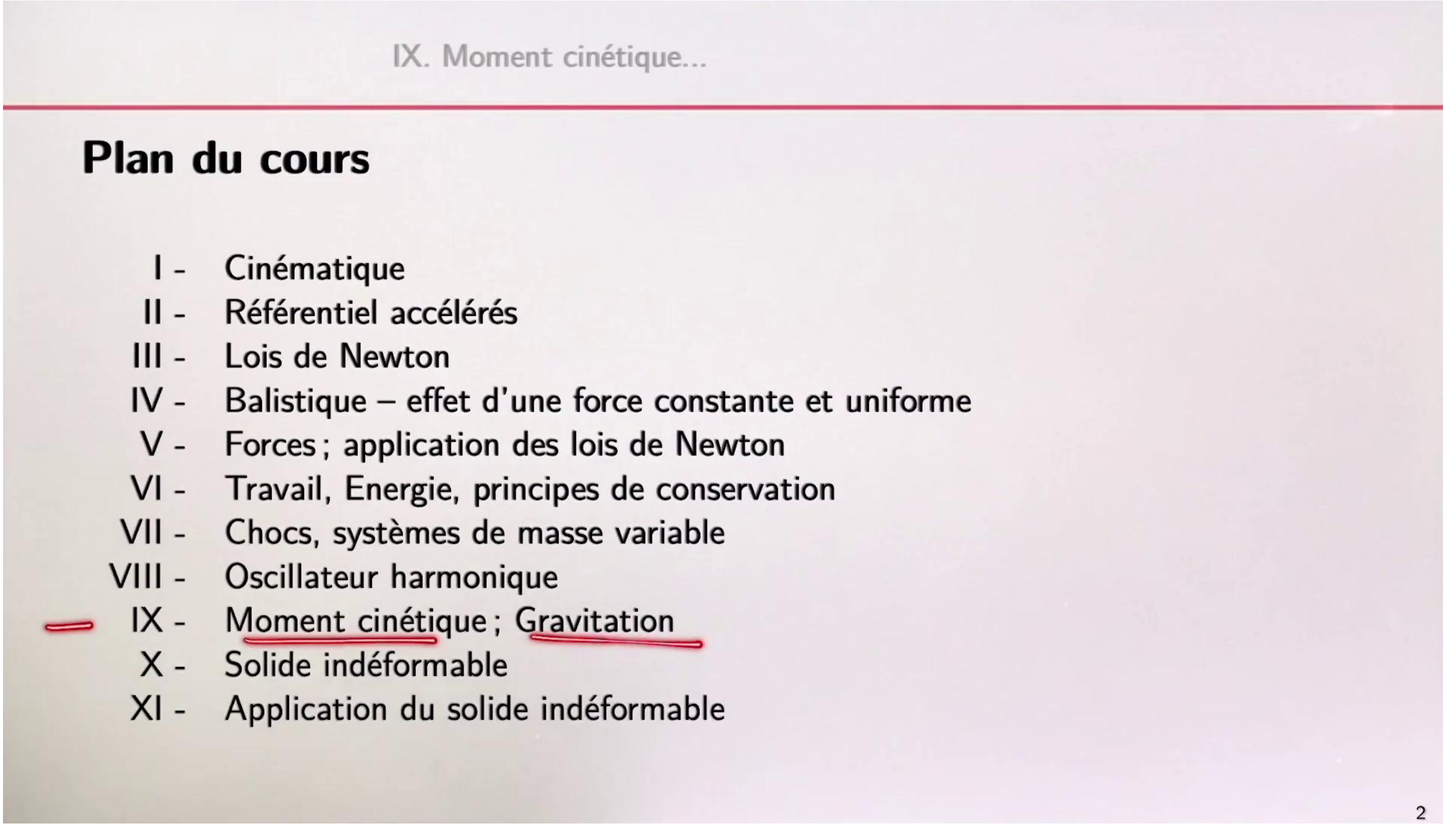


Moment cinétique Moment d'une force

Prof. Cécile Hébert



Video

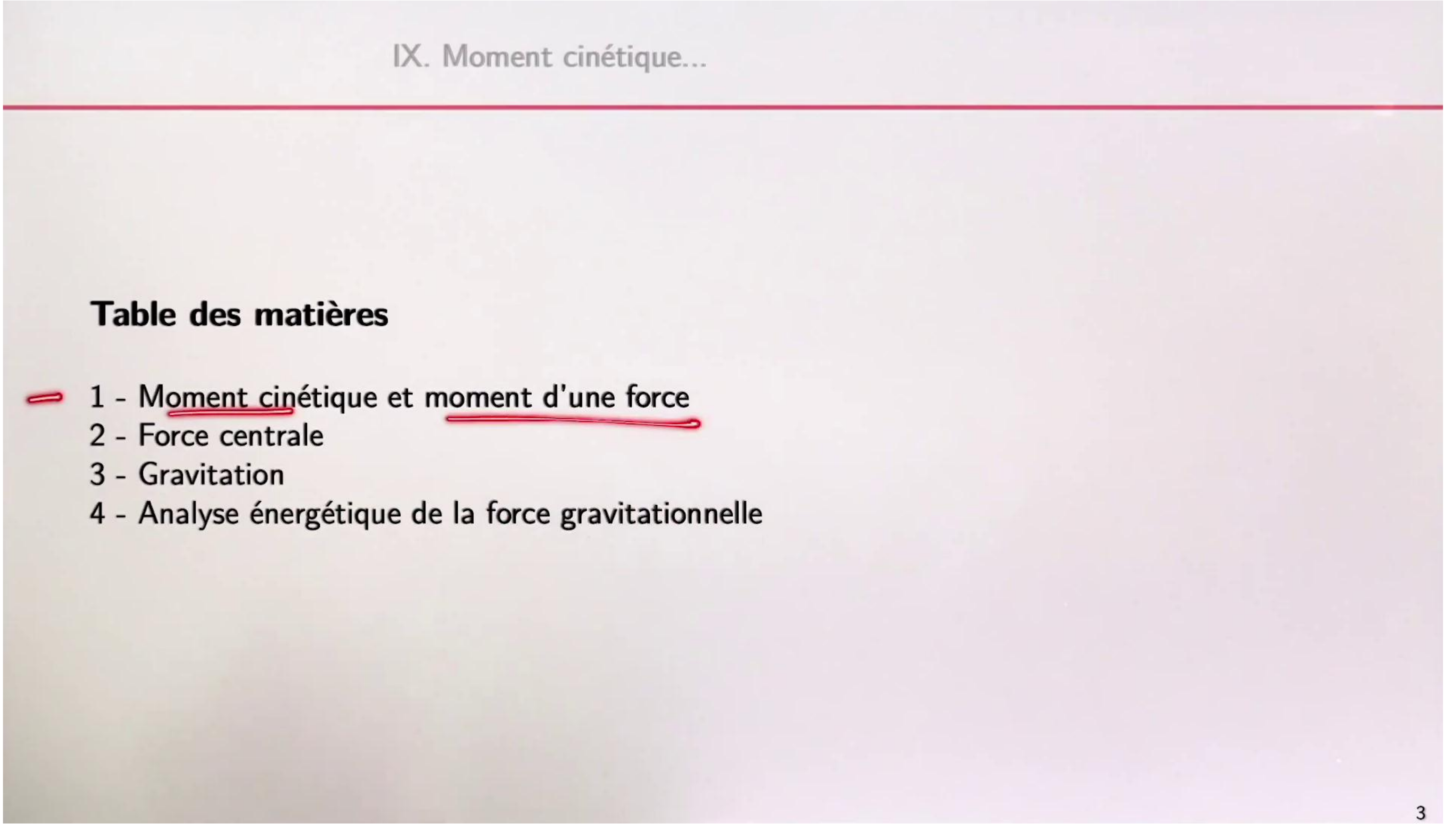


Bonjour, nous allons maintenant aborder un nouveau chapitre qui va comporter des nouvelles notions, celles de moments cinétiques et de moments d'une force. Ces grandeurs sont des constructions un peu abstraites faites à partir de grandeurs déjà connues, telles que la quantité de mouvement ou les forces. Elles nous permettront de décrire différemment les lois de Newton que nous connaissons déjà. Décrire ces nouvelles grandeurs nous permet de traiter de manière plus simple des mouvements de rotation. Cela sera un outil indispensable pour la mécanique du solide que nous verrons plus tard. Dans cette première partie, nous allons simplement définir les grandeurs, moment d'une force et moment cinétique d'un objet.

Notes

Summary

0m 05s

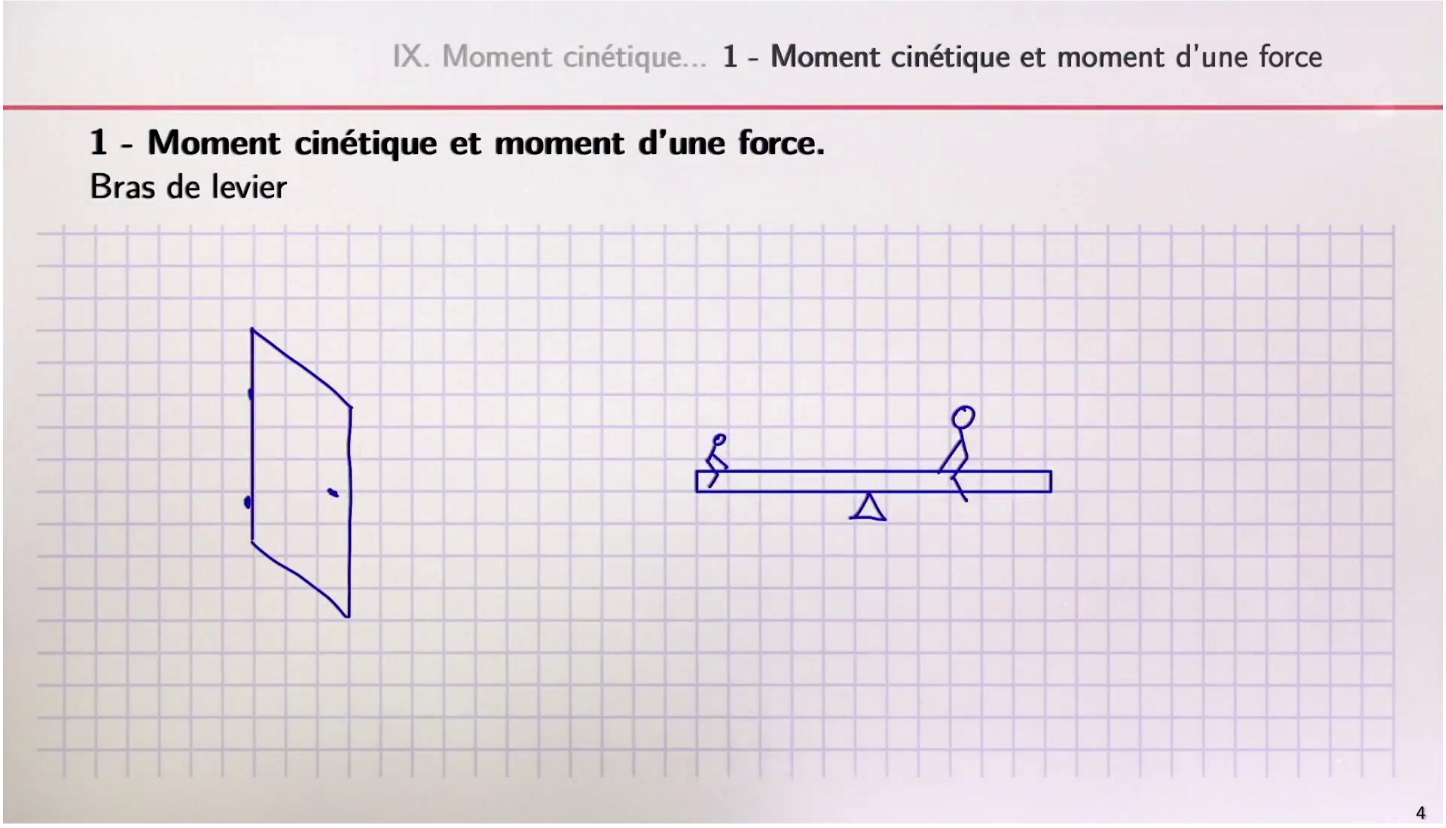


Nous sommes dans le chapitre 9, moment cinétique : Gravitation; et nous allons voir la première partie, moment cinétique et moment d'une force.

Notes

Summary

0m 53s

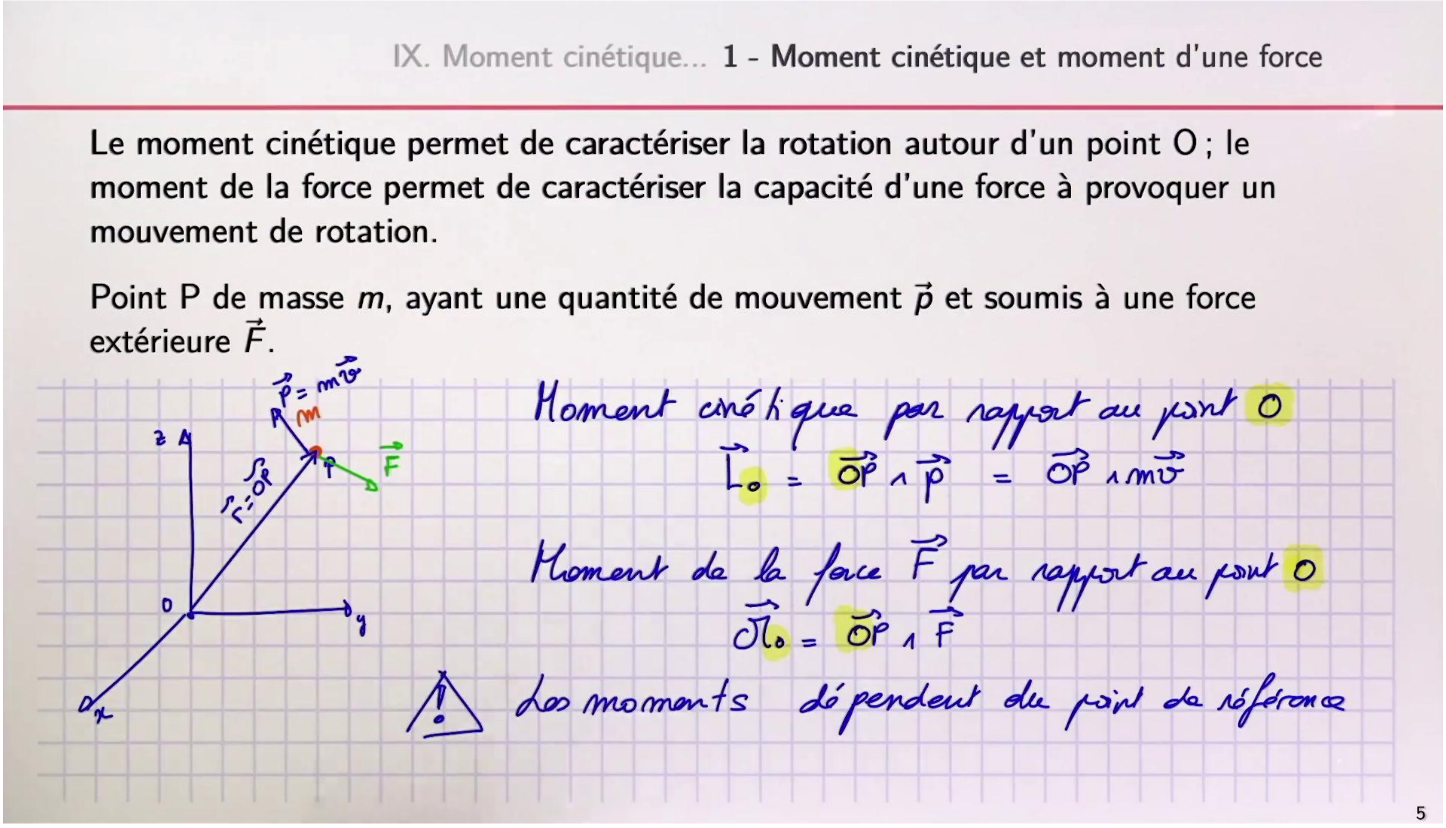


Ces notions sont liées à la rotation et en particulier, le moment d'une force est lié à ce que l'on appelle le bras de levier. C'est un effet que vous avez certainement pu expérimenter dans la vie quotidienne. Prenons une porte que vous souhaitez ouvrir avec les gonds et la poignée. Pour faire efficacement tourner cette porte autour de son axe avec les gonds, vous allez pousser la porte du côté de la poignée. Vous savez très bien que si vous essayez de pousser proche des gonds, ça sera beaucoup plus difficile de faire tourner la porte. La différence ici, c'est la distance entre l'axe de rotation et l'endroit où vous exercez la force. Comme autre exemple, prenons une de ces balançoires que l'on trouve dans les parcs. C'est une poutre qui peut basculer sur un pivot. Vous pouvez asseoir un enfant d'un côté de la poutre et si vous placez un adulte exactement symétrique par rapport à l'enfant, vous savez bien que la balançoire restera clouée au sol et l'enfant sera en haut et ne pourra pas descendre. Pour équilibrer cette balançoire, l'adulte doit se placer plus proche du point de pivot. À nouveau, ce qui est important ici, c'est la distance entre l'axe de rotation et l'endroit où la force est exercée. Le point commun dans ces deux cas est que la force cherche à mettre un objet en mouvement autour d'un axe de rotation. Donc cherche à provoquer un mouvement de rotation.

Notes

Summary

1m 03s



Nous allons voir deux notions. Le moment cinétique permet de caractériser la rotation autour du point O. Le moment de la force permet de caractériser la capacité d'une force à provoquer ce mouvement de rotation. Prenons un point P de masse m ayant une quantité de mouvement P et soumis à une force extérieure F. Plaçons-le dans un référentiel d'origine O en coordonnées cartésiennes. Le vecteur position est le vecteur r égal OP. Je place la force F. Le point se déplace à une vitesse v, il a une masse m, cela lui donne une quantité de mouvement p égal mv. Par définition, le moment cinétique par rapport au point O de l'objet de masse m et de vitesse v, donc de quantité de mouvement p, est la grandeur LO égale OP vectorielle la quantité de mouvement. Par définition, le moment de la force F par rapport au point O est la grandeur MO égale OP vectorielle F. Attention, le moment cinétique est le moment d'une force, donc les deux moments dépendent du point de référence. Nous avons ici, par rapport au point O, c'est pour ça que nous avons le O écrit dans le moment et c'est bien le vecteur OP. Par rapport au point O, nous avons O ici et c'est OP. Si l'objet est soumis à plusieurs forces, F1, etc, la force totale Ftot est la somme des forces.

Notes

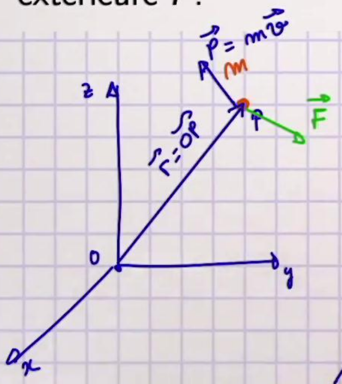
Summary

2m 52s

IX. Moment cinétique... **1 - Moment cinétique et moment d'une force**

Le moment cinétique permet de caractériser la rotation autour d'un point O ; le moment de la force permet de caractériser la capacité d'une force à provoquer un mouvement de rotation.

Point P de masse m, ayant une quantité de mouvement $\vec{p}$ et soumis à une force extérieure $\vec{F}$.



Moment cinétique par rapport au point O

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p} = \vec{OP} \wedge m\vec{v}$$

Moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

⚠ Les moments dépendent du point de référence

si il y a plusieurs forces : $\vec{F}_1 - \vec{F}_N$ $\quad \vec{F}_{tot} = \sum \vec{F} \quad \vec{\mathcal{M}}_O = \sum \vec{\mathcal{M}}_O^i = \sum_i \vec{OP} \wedge \vec{F}_i$

5

Le moment total des forces par rapport à O est la somme des moments des forces individuelles par rapport à O, ce qui est la somme sur i des OP vectoriel Fi. À nouveau, j'ai le moment par rapport à O, je dois prendre tous les moments par rapport à O, donc ici, je n'ai que OP.

Notes

Summary

5m 00s

IX. Moment cinétique... **1 - Moment cinétique et moment d'une force**

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

2^d loi de Newton : $\sum \vec{F}^i = \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OP} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{OP})}_{\vec{v}} \wedge \vec{p} + \vec{OP} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \wedge (m\vec{v})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{OP} \wedge \vec{F}}_{\vec{\mathcal{M}}_O}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O = \sum \vec{\mathcal{M}}_O^i$$

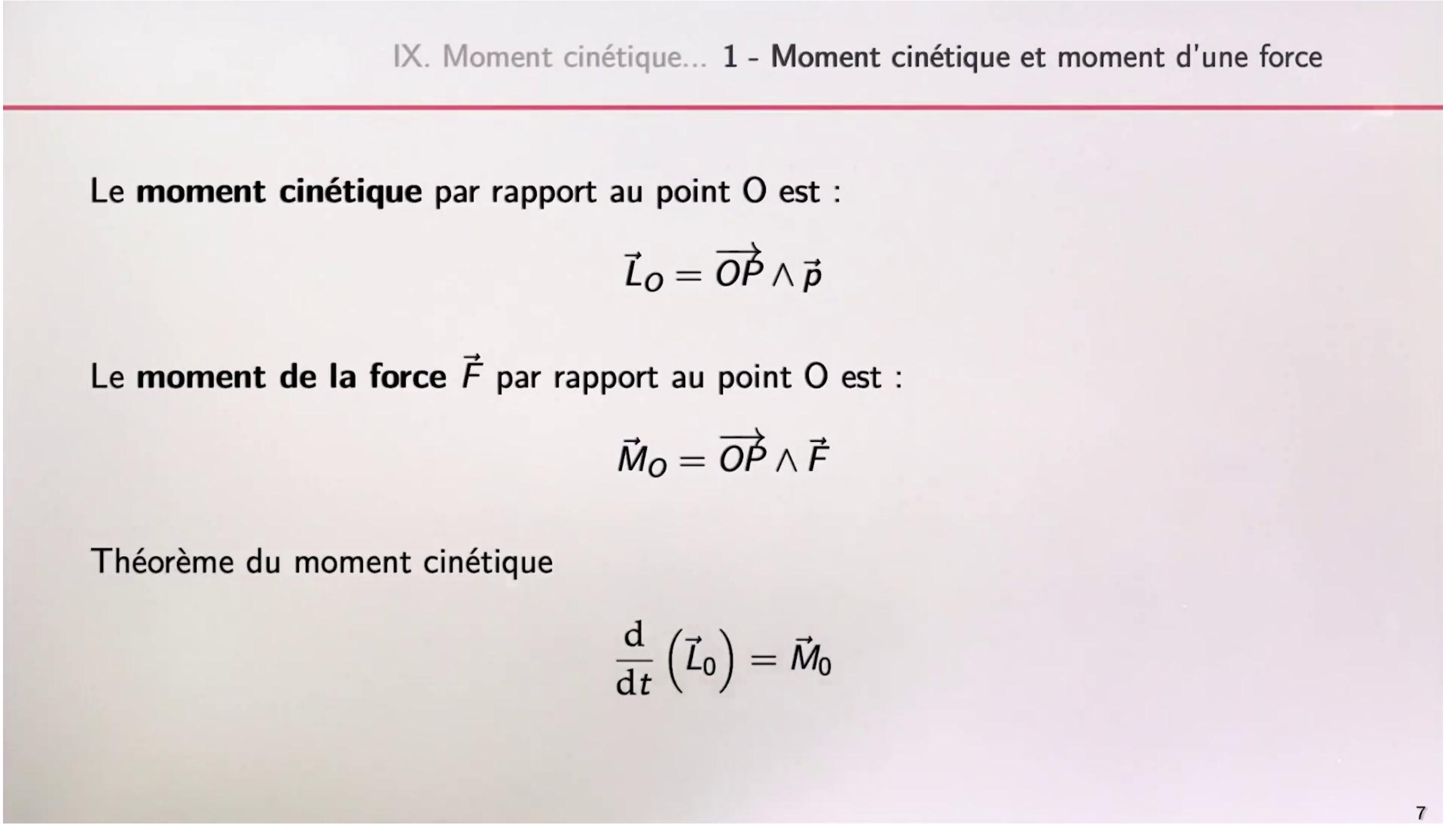
6

Nous avons donc LO égal OP vectoriel p et MO égal OP vectoriel F. Or, la seconde loi de Newton nous donne un lien entre quantité de mouvement et force. La somme des forces est la dérivée de la quantité de mouvement. Nous pouvons nous attendre à avoir un lien entre moment de force et moment cinétique. Et puisque ici, j'ai p, j'ai la dérivée de p, je vais dériver le moment cinétique. DLo/dt est la dérivée par rapport au temps de OP vectoriel p. La dérivée du produit vectoriel se calcule comme la dérivée d'un produit. C'est d/dt de OP vectoriel p plus OP vectoriel dp/dt. La dérivée de OP est le vecteur vitesse. J'ai donc v vectoriel la quantité de mouvement qui est mv plus OP vectoriel dp/dt qui n'est rien d'autre que la somme de toutes les forces externes que j'ai notée F. v étant collinaire à mv, ce produit vectoriel vaut 0. Par définition, ce OP vectoriel est le moment des forces. Je trouve donc que la dérivée par rapport au temps de Lo, dLo/dt est égale à Mo. Mo est la somme des moments des forces individuelles par rapport à O. Cette expression est ce que l'on appelle le théorème du moment cinétique et cela n'est rien d'autre que la réécriture de la seconde loi Newton dans le cas des mouvements de rotation pour lesquels ce qui est important, c'est le moment cinétique et le moment d'une force.

Notes

Summary

5m 28s

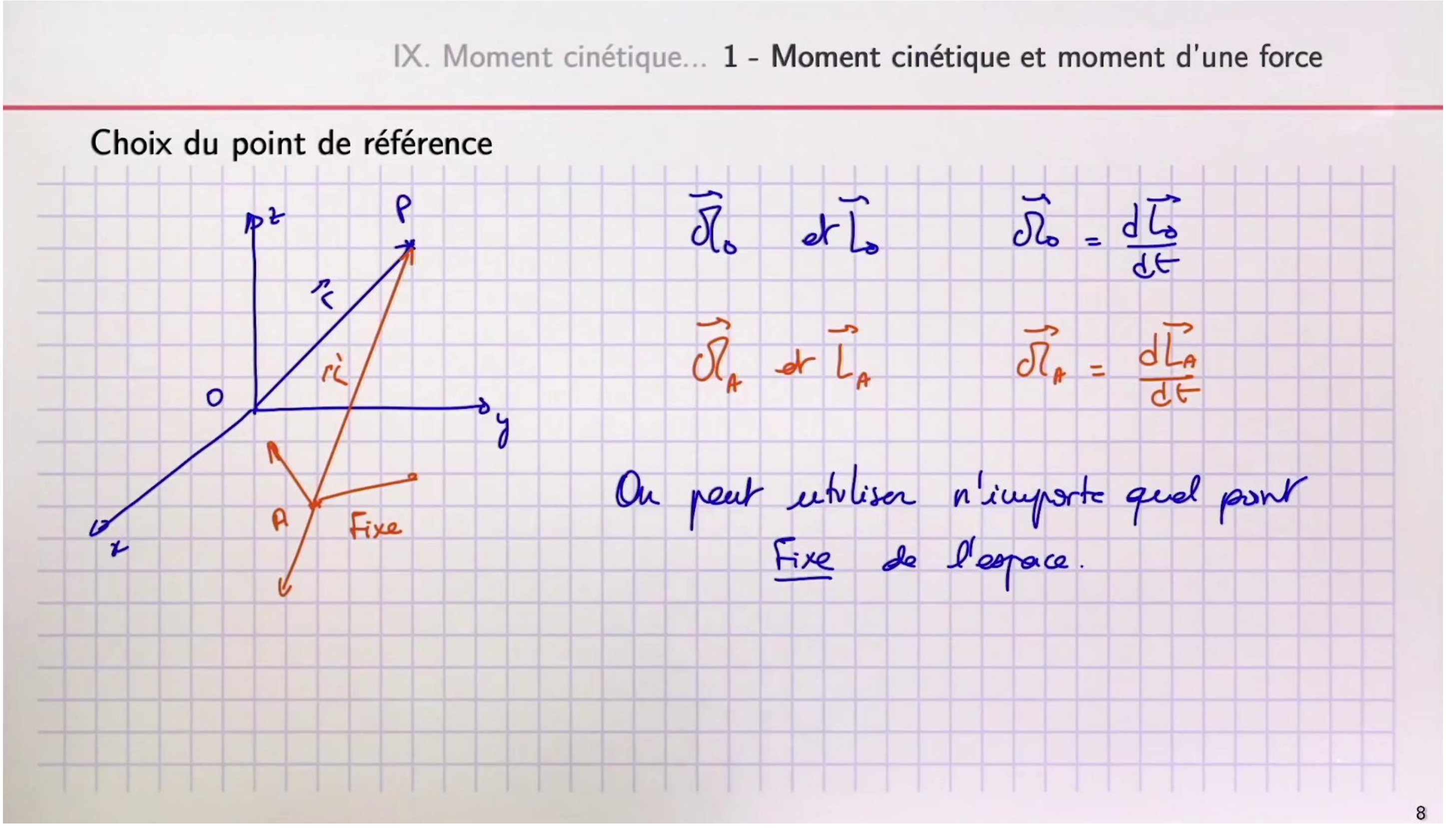


En résumé, nous avons défini le moment cinétique par rapport à O, Lo; le moment d'une force par rapport au point O, Mo, et si F est la force totale, nous avons le théorème du moment cinétique dLo/dt = Mo.

Notes

Summary

7m 41s

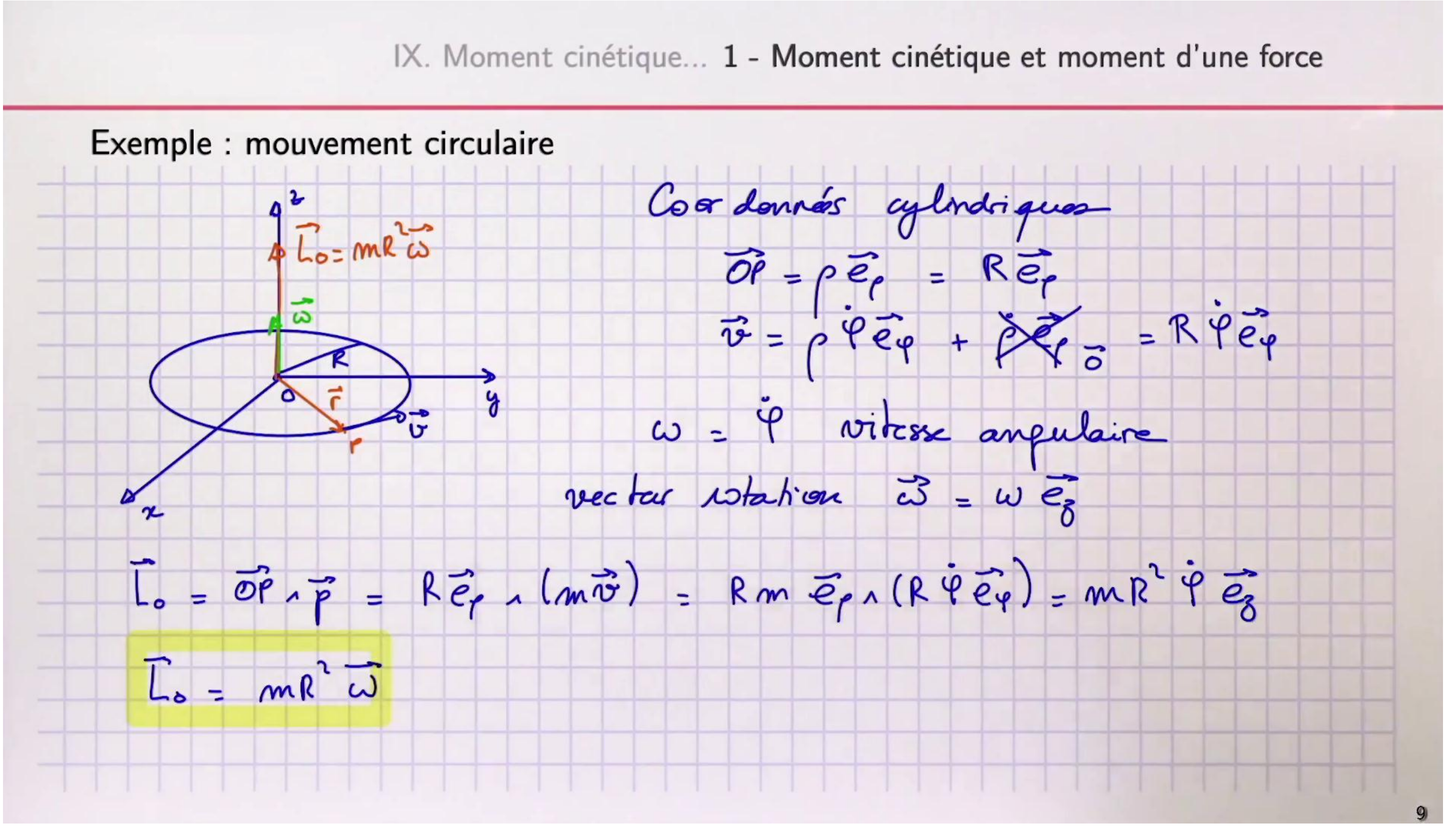


Il faut faire attention au choix du point de référence. Pour l'instant, nous avons pris l'origine du référentiel. C'est donc un point fixe de l'espace. Cela nous a permis de calculer Mo et Lo et d'écrire Mo égal dLo/dt. Nous aurions pu prendre comme origine un autre point de l'espace A, même éventuellement avec d'autres axes. Mais ici, A est fixe et l'autre repère est également fixe. Simplement, j'ai juste pris d'autres façons de les écrire. Attention, ici, j'ai bien pris un repère qui est fixe dans R, il est juste ailleurs. À ce moment, je peux calculer le moment cinétique et le moment des forces par rapport au point A. J'ai MA et LA. Je peux également écrire que MA = dLA/dt. Donc, je peux écrire ce théorème du moment cinétique par rapport à n'importe quel point fixe de l'espace. Nous verrons plus tard, dans le cadre du solide, qu'il est possible d'élargir un petit peu cette restriction et que certains points mobiles peuvent fonctionner aussi.

Notes

Summary

8m 02s

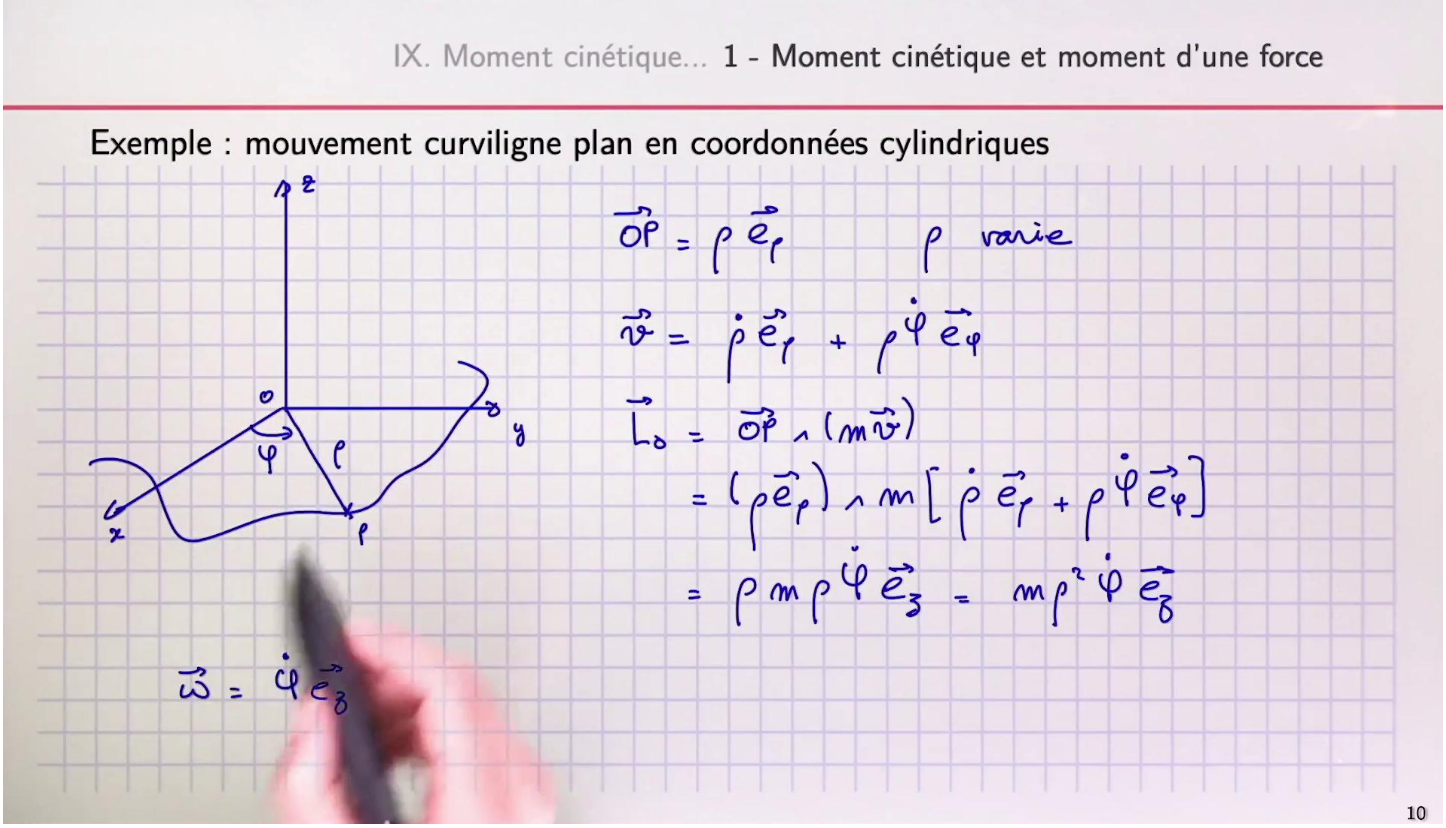


Nous allons maintenant prendre deux exemples. Commençons par le cas d'un mouvement circulaire. Supposons que le point P se déplace dans le plan Oxy selon un cercle de rayon R et de centre O. Plaçons-nous en coordonnées cylindriques. Le vecteur OP = ρ eρ, il vaut donc R eρ, puisque P se déplace sur un cercle. Le vecteur vitesse est égal à ρ φ point eφ plus ρ point eρ. Comme le point se déplace sur un cercle, ρ égale constante, ce terme vaut 0. Il reste ρ égal R φ point eφ. Le vecteur vitesse est bien entendu tangent au cercle. Appelons Ω égal φ point la vitesse angulaire. Nous avons déjà vu que nous pouvons caractériser ce mouvement par le vecteur rotation Ω égal Ω ez. Nous pouvons donc calculer le moment cinétique Lo du point P par rapport à O, qui vaut OP vectoriel la quantité de mouvement, OP étant R eρ vectoriel mv. C'est donc Rm eρ vectoriel R φ point eφ. C'est mR carré φ point eρ eφ me donne ez. Or, φ point ez est Ω ez soit le vecteur rotation. Lo est donc égal à mR carré vecteur Ω. Nous voyons que dans le cas précis de ce mouvement, le moment cinétique est colinéaire à l'axe Oz, proportionnel au vecteur rotation Ω, donc à la vitesse angulaire, et dépend de la distance à l'axe par R carré. Plus la vitesse angulaire est grande, plus Lo est grande.

Notes

Summary

9m 39s



Prenons un deuxième exemple, celui d'un mouvement curviligne plan en coordonnées cylindriques. Quelle est la différence avec le mouvement de tout à l'heure ? Je replace mon repère en coordonnées cylindriques, l'axe z étant l'axe vertical, le mouvement se fait dans le plan, la position de P est caractérisée par la distance OP qui vaut ρ et l'angle φ entre Ox et OP. La différence avec tout à l'heure, c'est que OP qui vaut ρ eρ ne peut pas s'écrire avec R, ρ varie. La vitesse sera donc égale à ρ point eρ plus ρ φ point eφ. Lorsque je vais écrire Lo, je vais faire OP vectoriel mv, mais avec les coordonnées cylindriques, cela me donne ρ eρ vectoriel mv qui est ρ point eρ plus ρ φ point eφ. La première partie du produit vectoriel est un produit vectoriel eρ eρ. Les deux vecteurs étant colinéaires, le produit vectoriel vaudra 0. Je n'aurai donc que le produit vectoriel de eρ avec eφ. eρ vectoriel eφ, c'est ez. Il me restera donc ρ m ρ φ point eρ vectoriel eφ ez, soit m ρ carré φ point ez. Je peux à nouveau appeler Ω le vecteur φ point ez. C'est un vecteur rotation qui caractérise la rotation de P autour de l'axe Oz. Le fait que la distance OP varie, ρ varie, ne change rien au fait que P tourne aussi autour de l'axe Oz.

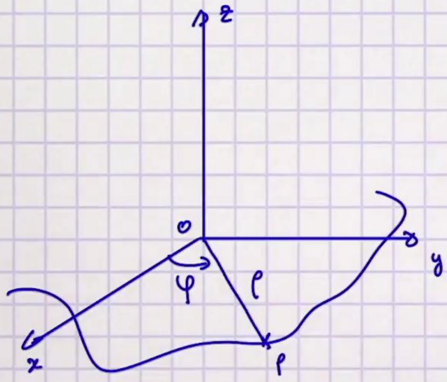
Notes

Summary

12m 19s

IX. Moment cinétique... 1 - Moment cinétique et moment d'une force

Exemple : mouvement curviligne plan en coordonnées cylindriques



$\vec{OP} = \rho\, \vec{e}_\rho$ ρ varie

$\vec{v} = \dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$

$$\vec{L}_o = \vec{OP} \wedge (m\vec{v})$$
$$= (\rho \vec{e}_\rho) \wedge m\left[\dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi\right]$$
$$= \rho\, m\, \rho\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_z = m\rho^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$

$\vec{L}_o = m\rho^2\, \vec{\omega}$

10

Cela me donne donc Lo égal m ρ carré Ω. À nouveau, dans ce cas, j'ai pu exprimer la grandeur moment cinétique à l'aide d'un vecteur qui caractérisent la rotation autour de Oz.

Notes

Summary

14m 46s

Voilà, nous avons défini le moment d'une force et le moment cinétique d'un objet. Ce sont des nouvelles quantités, mais qui sont définies à partir de quantités connues. Leur difficulté est qu'elles sont plus abstraites que les quantités sur lesquelles elles sont basées. Vous avez pris l'habitude de la notion de force. Vous avez beaucoup utilisé la quantité de mouvement, qui est déjà une grandeur abstraite construite à partir de la masse et de la vitesse. Et voilà maintenant que nous construisons de nouvelles grandeurs vectorielles à partir du produit vectoriel et de ses vecteurs connus. Petit à petit, en les utilisant, vous verrez la puissance qu'elles ont et pourquoi elles sont bien adaptées aux mouvements de rotation.

Notes

Summary

15m 05s