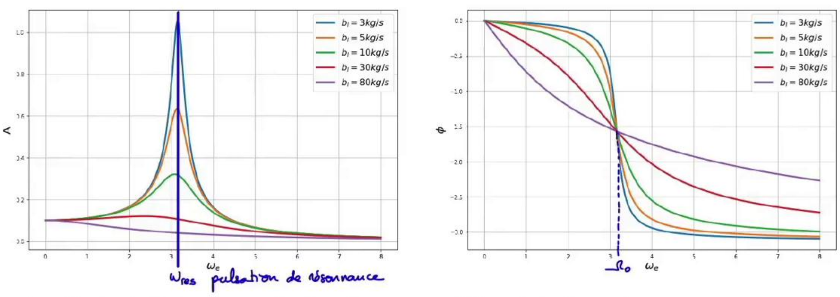
Oscillations forcées

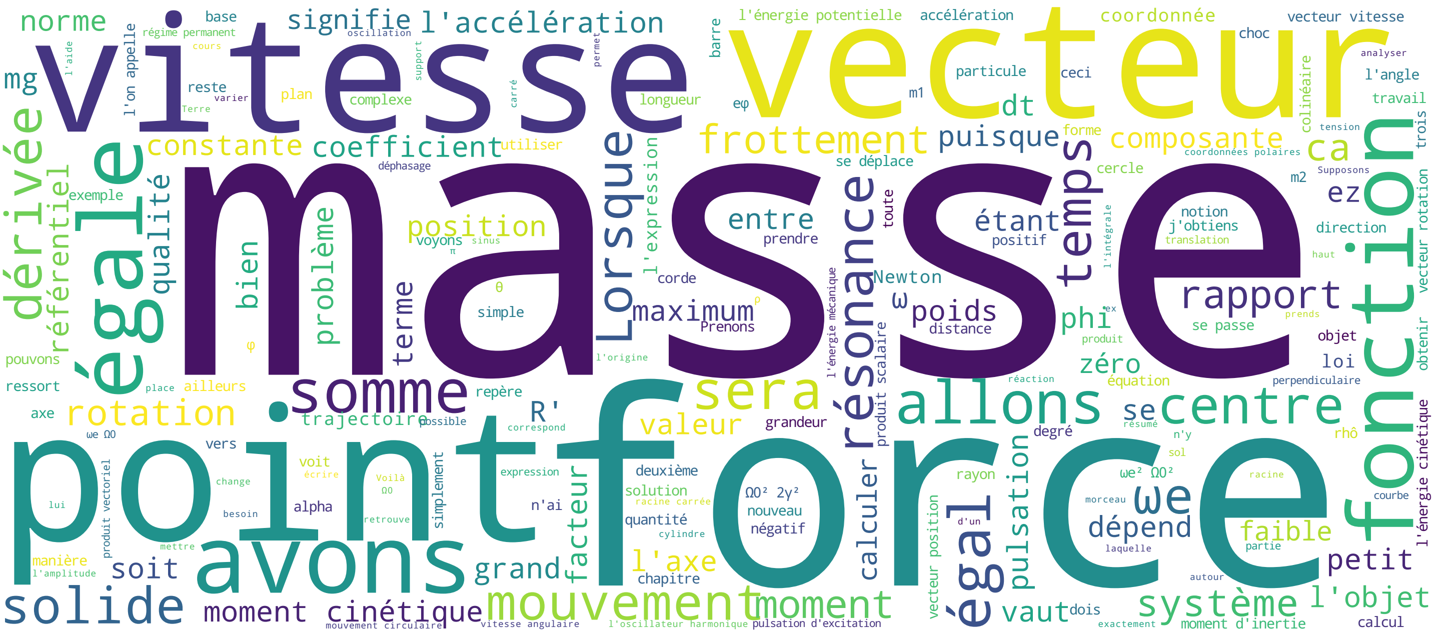
Partie 3: analyse, régime permenent

Prof. Cécile Hébert

Analyse du régime permanent $x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$



Amplitude et déphasage en fontion de ω_e pour différents frottements.



Video

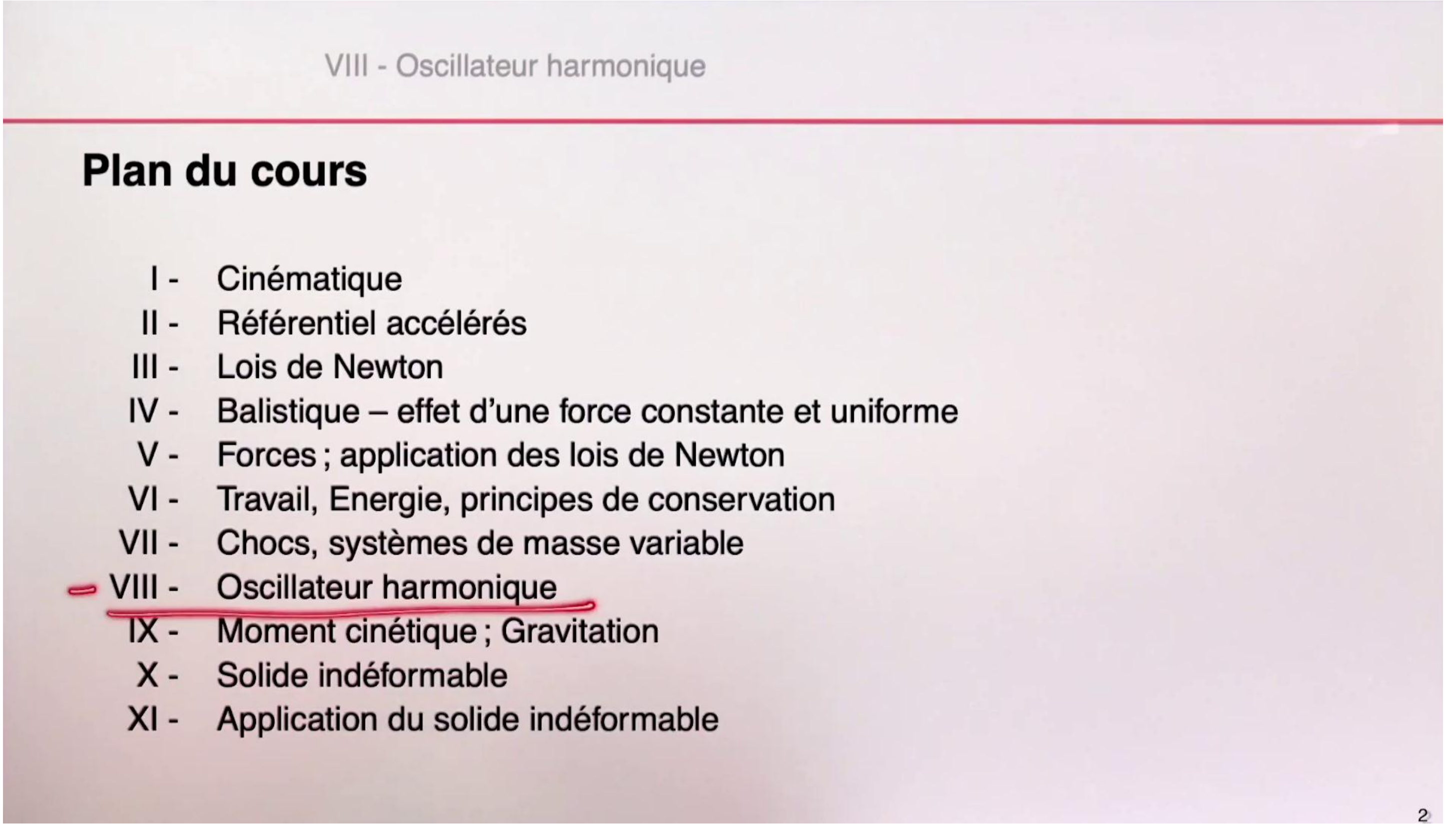
EPFL

Dans cette vidéo, nous allons continuer à analyser les solutions trouvées lors du problème de l'oscillateur harmonique amorti et forcé. Nous allons nous intéresser au régime permanent, et nous allons regarder l'allure des solutions en fonction de la pulsation d'excitation ωe.

Notes

Summary

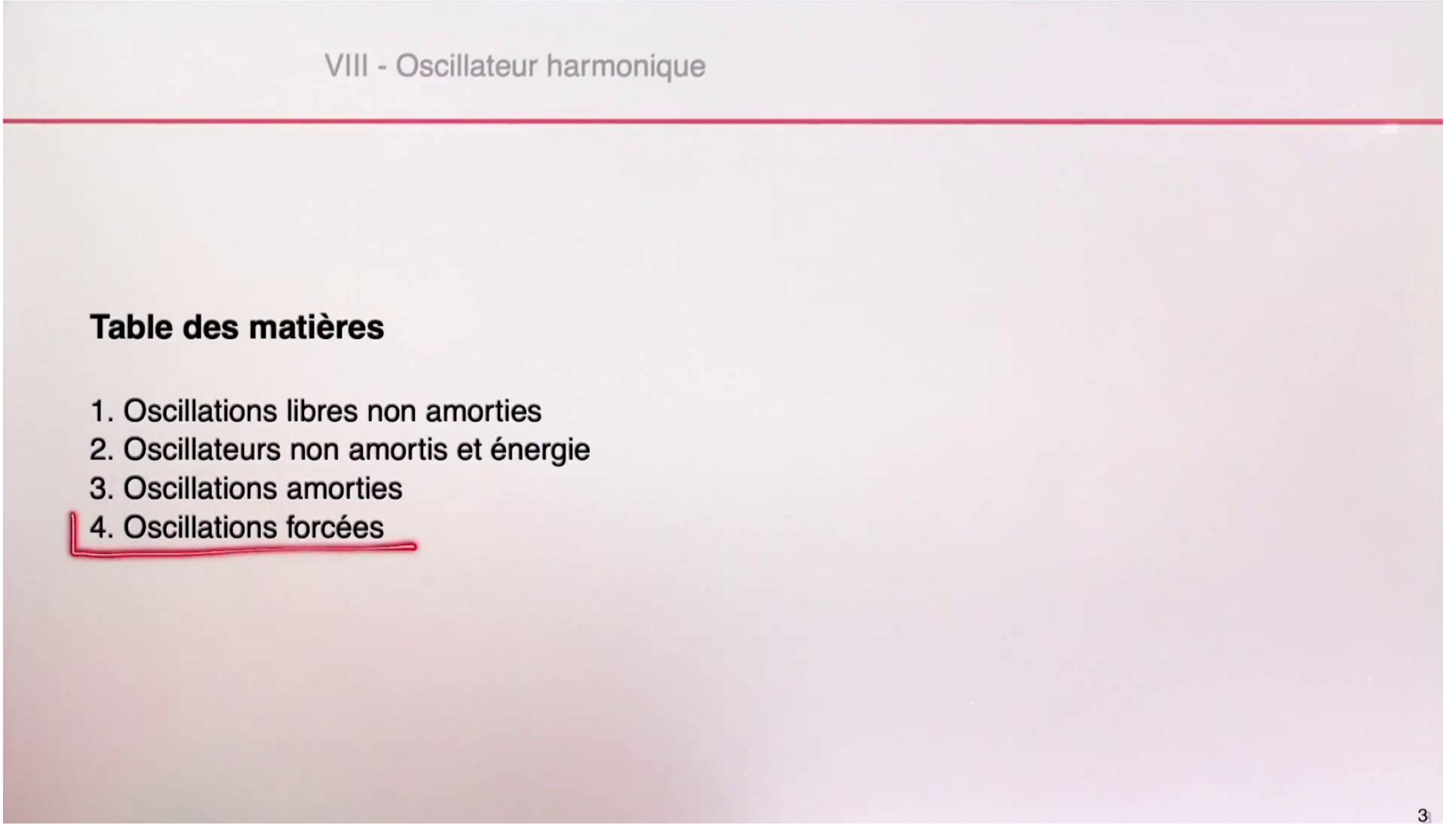
0m 05s



Notes

Summary

0m 24s



Nous sommes dans le chapitre VIII sur l'oscillateur harmonique et nous allons voir la fin des oscillations forcées.

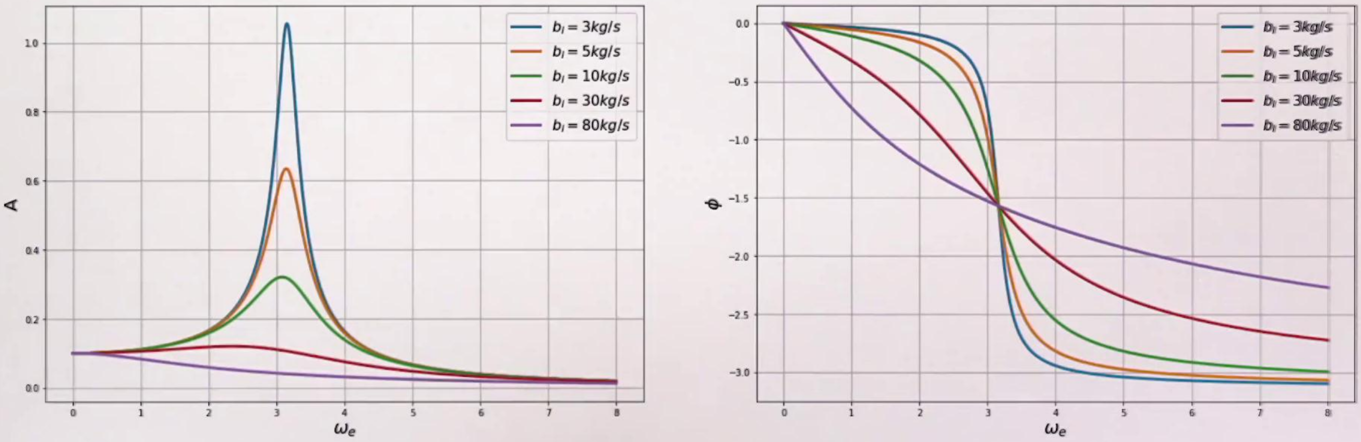
Notes

Summary

0m 24s

VIII - Oscillateur harmonique **4. Oscillations forcées**

Analyse du régime permanent $x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$



Amplitude et déphasage en fontion de ω_e pour différents frottements.

38

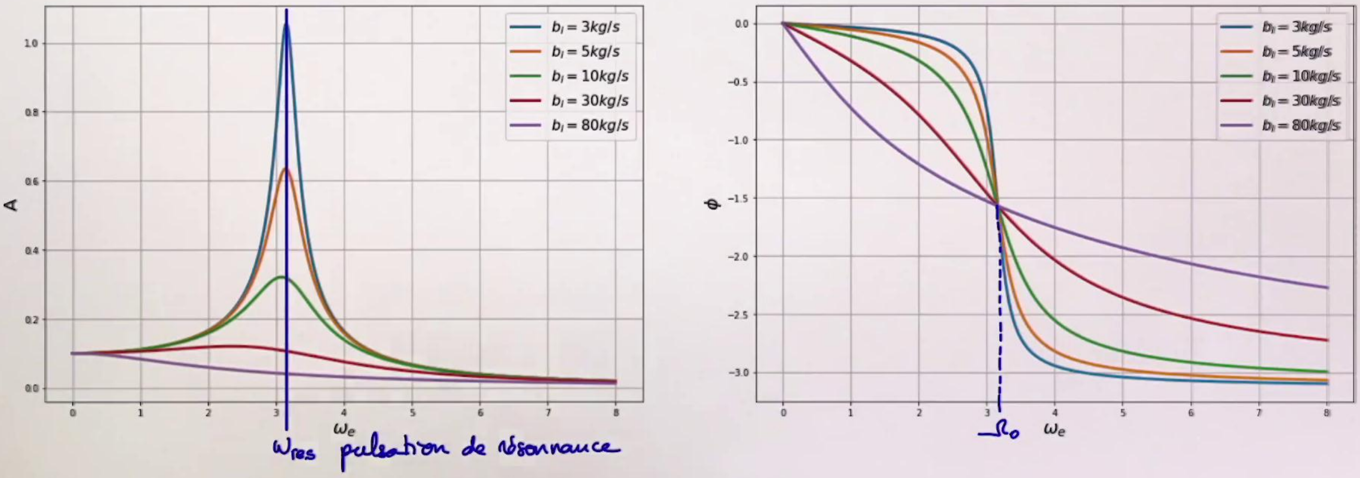
Nous supposons donc maintenant que notre oscillateur harmonique forcé est en régime permanent. x(t)=x1(t) qui vaut A(ωe)cos(ωet+φ) la fonction x est donc une fonction sinusoïdale périodique de pulsation ωe qui est très exactement la pulsation d'excitation. Pour la caractériser, nous avons l'amplitude qui dépend de ωe et le déphasage qui dépend aussi de ωe. Nous allons étudier ces deux fonctions A et φ. Si je trace la fonction ωe pour différents coefficients de frottement, d'un coefficient de frottement relativement faible à un coefficient de frottement beaucoup plus important. L'allure générale de la fonction A(ωe) est une fonction positive qui part toujours de la même valeur, qui augmente, arrive à un maximum et tend ensuite vers 0. La position et la valeur du maximum dépendent du coefficient de frottement. Lorsque le coefficient de frottement est faible, le maximum est très haut. Lorsque le coefficient de frottement augmente, le maximum diminue. Et j'ai même un moment où je n'ai plus du tout de maximum, si le coefficient de frottement est assez grand. Ce maximum de l'amplitude se produit toujours pour une valeur particulière de ωe.

Notes

Summary

0m 32s

Analyse du régime permanent $x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$



Amplitude et déphasage en fontion de ω_e pour différents frottements.

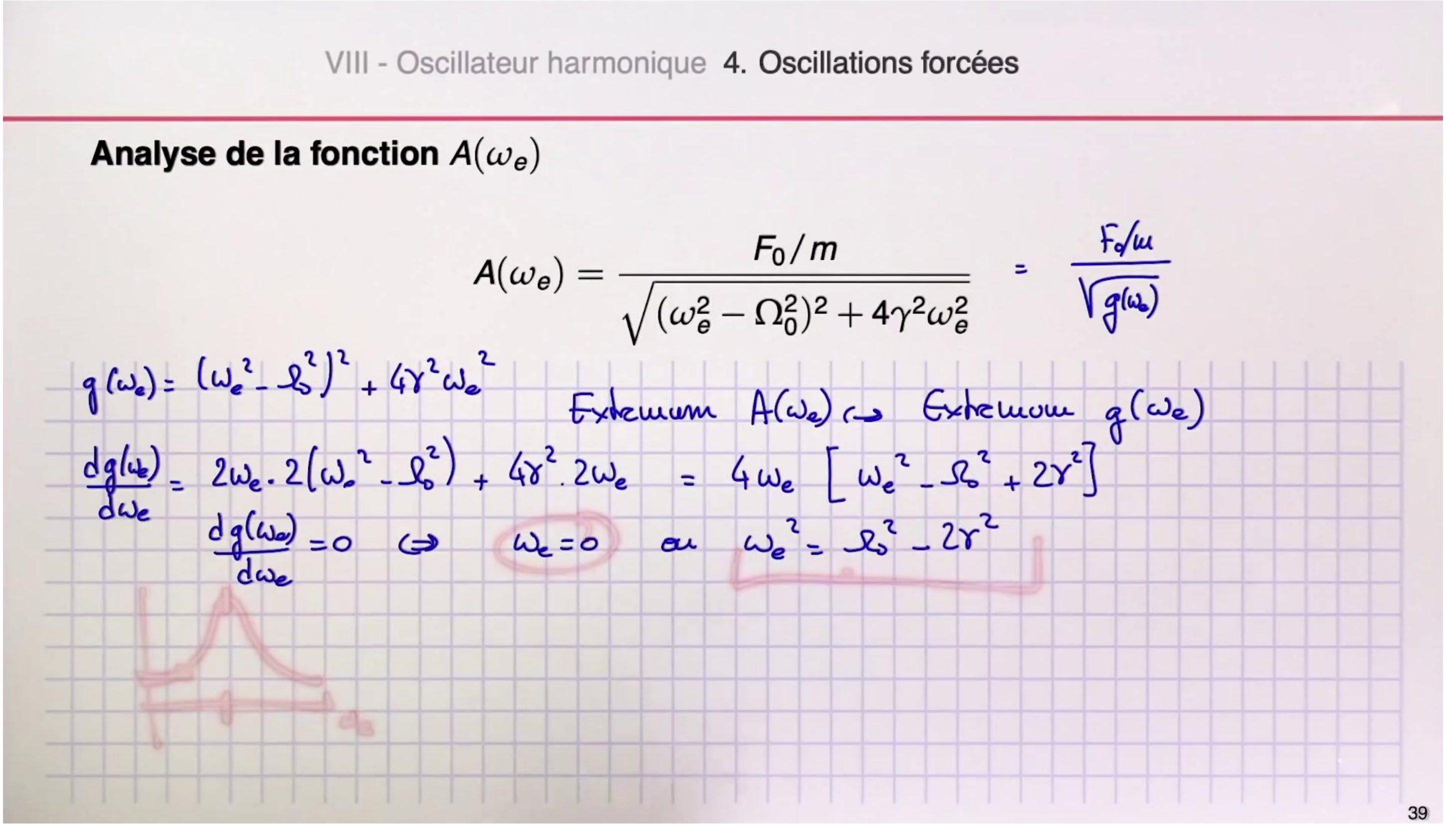
38

Avec un coefficient de frottement assez faible, le ωe qui amène à la résonance tombe à peu près au même moment. Lorsque le coefficient de frottement augmente, on voit le maximum qui se décale vers la gauche. La valeur de ωe qui permet d'obtenir le maximum de l'amplitude est ce qu'on appelle la pulsation de résonance, ωres. En revanche, si on regarde la courbe du déphasage, on remarque que le déphasage vaut toujours très exactement −π/2 pour une valeur particulière de ωe. Cette valeur particulière de ωe est en fait la pulsation propre ω0. Le déphasage est donc de −π/2 à ωe=ω0. On remarque que lorsque le coefficient de frottement est faible et la résonance assez marquée, ωres semble à peu près égal à ω0. En revanche, lorsque la résonance est moins marquée, que le coefficient de frottement est grand, le ω de résonance est différent de ω0.

Notes

Summary

2m 10s

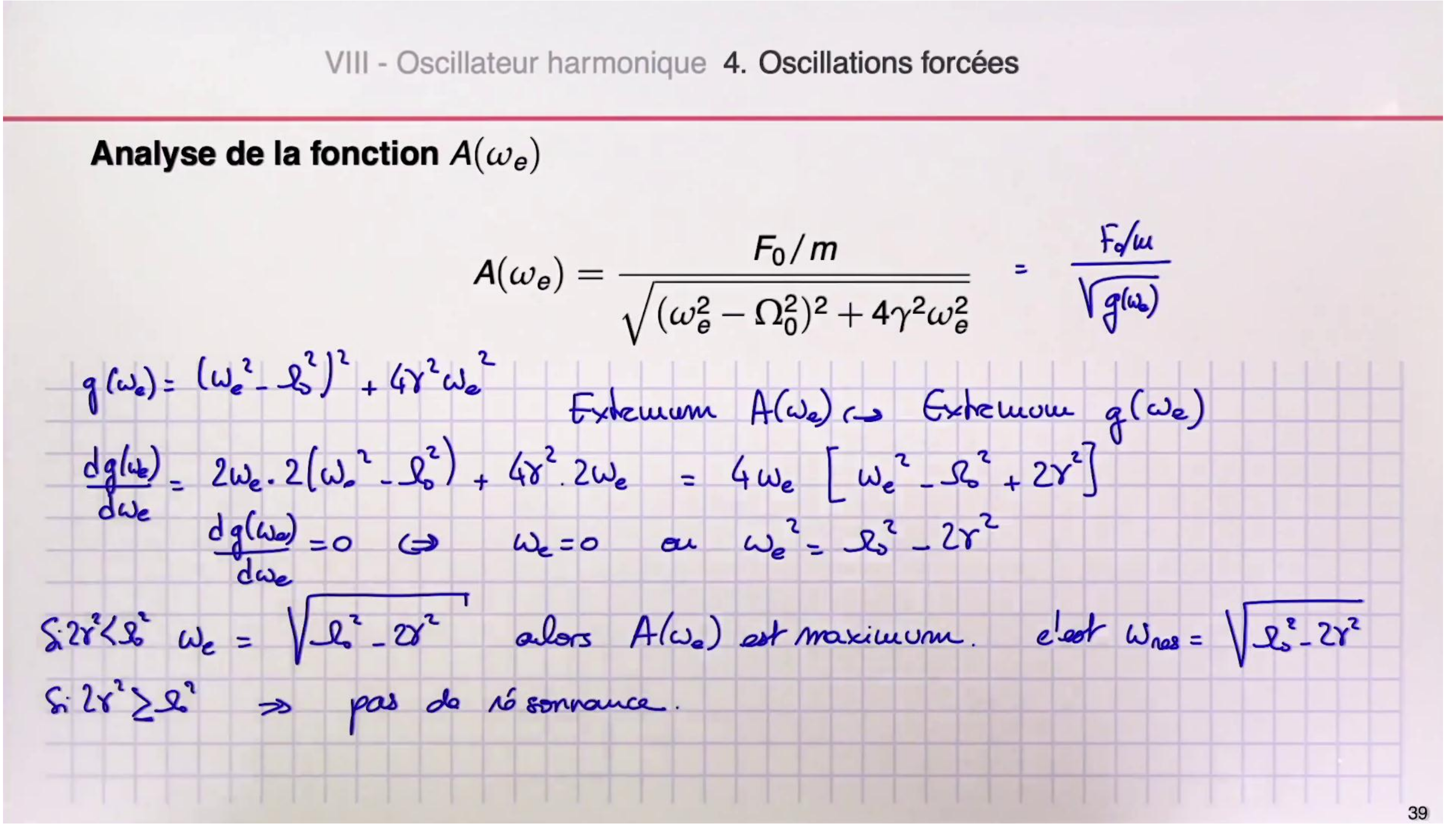


Pour obtenir la pulsation de résonance, nous avons besoin de savoir quand la dérivée de cette fonction par rapport à ωe va s'annuler. C'est là que nous aurons un maximum de $A(\omega e)$. Mais en fait, nous avons ici une constante sur racine carrée d'une fonction de ωe. Je peux donc réécrire ceci comme étant $F0/m/\sqrt{}g(\omega e)$. La fonction $g(\omega e)$ étant égale à $(\omega e^2-\Omega 0^2)^2+4\gamma^2\omega e^2$ $\sqrt{}$ est une fonction strictement croissante. $1/\sqrt{}$ est une fonction strictement décroissante. Un extremum de $A(\omega e)$ se trouvera pour un extremum de $g(\omega e)$. Il me suffit donc de chercher les minimum maximum de $g(\omega e)$ pour avoir les extremums de A. Ça sera beaucoup plus simple. Nous allons donc calculer $dg(\omega e)$ par rapport à ωe. Ce qui fait $2\omega e.2(\omega e^2-\Omega 0^2)+4\gamma^2.2\omega e$ Je peux donc mettre directement $4\omega e$ en facteur et obtenir $4\omega e[\omega e^2-\Omega 0^2+2\gamma^2]$. Nous aurons donc l'annulation de cette dérivée pour $\omega e=0$ ou $\omega e^2=\Omega 0^2-2\gamma^2$ $\omega e=0$ correspond au début des valeurs de ωe. C'est le début de la fonction $A(\omega e)$. Cela signifie que nous avons une tangente horizontale en $\omega e=0$. Ensuite, la fonction varie, nous avons vu qu'elle a un maximum et le maximum se trouve à ωe tel que $\omega e^2=\Omega 0^2-2\gamma^2$. Cela signifie que lorsque $\omega e=\sqrt{\Omega 0^2-2\gamma^2}$, alors $A(\omega e)$ est maximum.

Notes

Summary

3m 42s

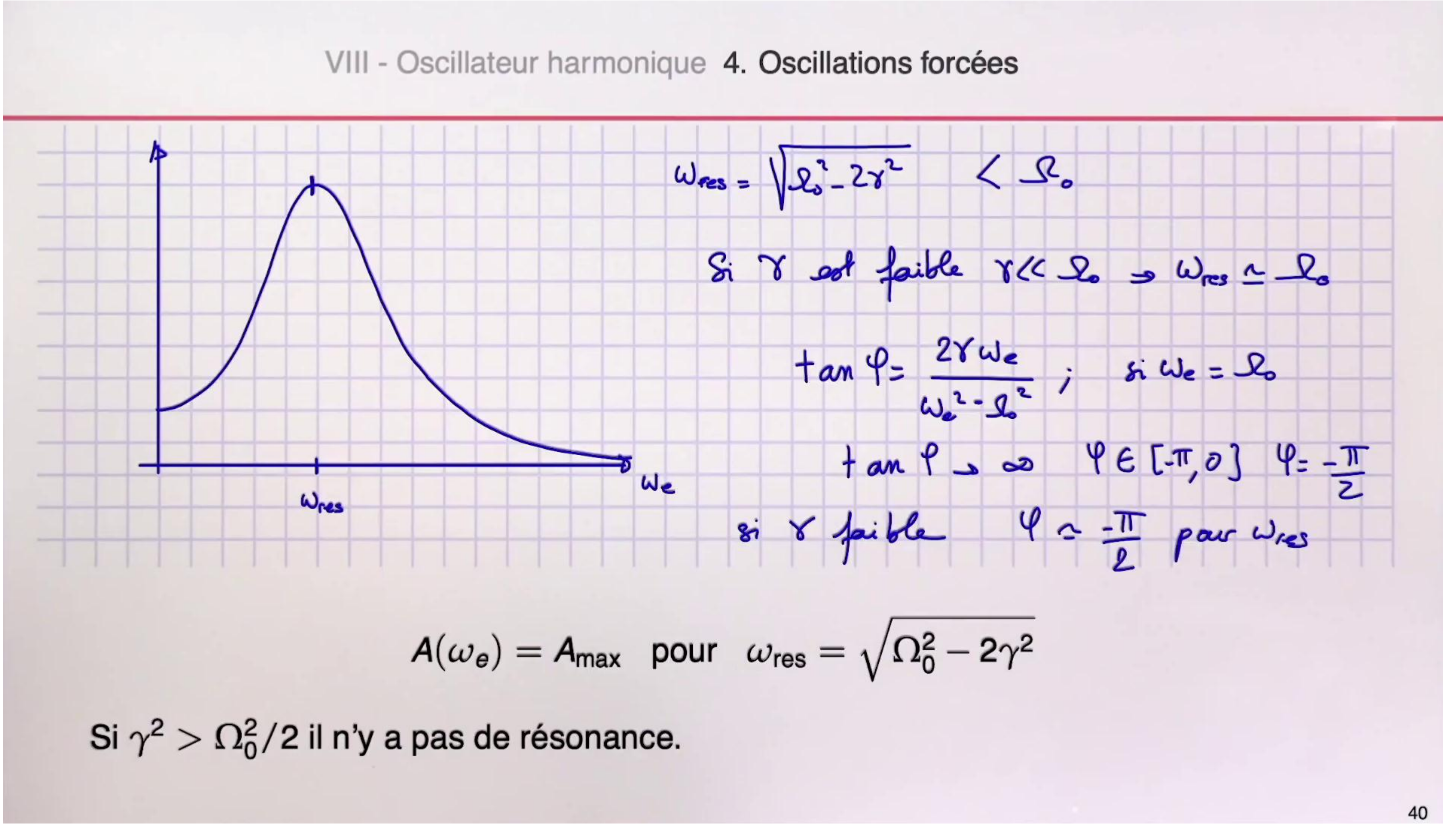


C'est ce que nous appelons la pulsation de résonance. Cette pulsation de résonance est donc égale à $\sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Attention ! Si ce terme dans la racine est négatif, je ne peux pas prendre la racine, donc la pulsation de résonance n'existe pas. Cela signifie que si $2\gamma^2 > \Omega_0^2$, je n'ai pas de résonance. Cette résonance n'existe que si $2\gamma^2 < \Omega_0^2$. Si $2\gamma^2 > \Omega_0^2$, à ce moment-là, il n'y a pas de résonance. En fait, si les deux termes sont égaux, cela signifie que la pulsation de résonance vaut 0, il n'y a pas non plus de résonance, car $\omega_e = 0$ correspond à pas d'oscillation.

Notes

Summary

6m 07s

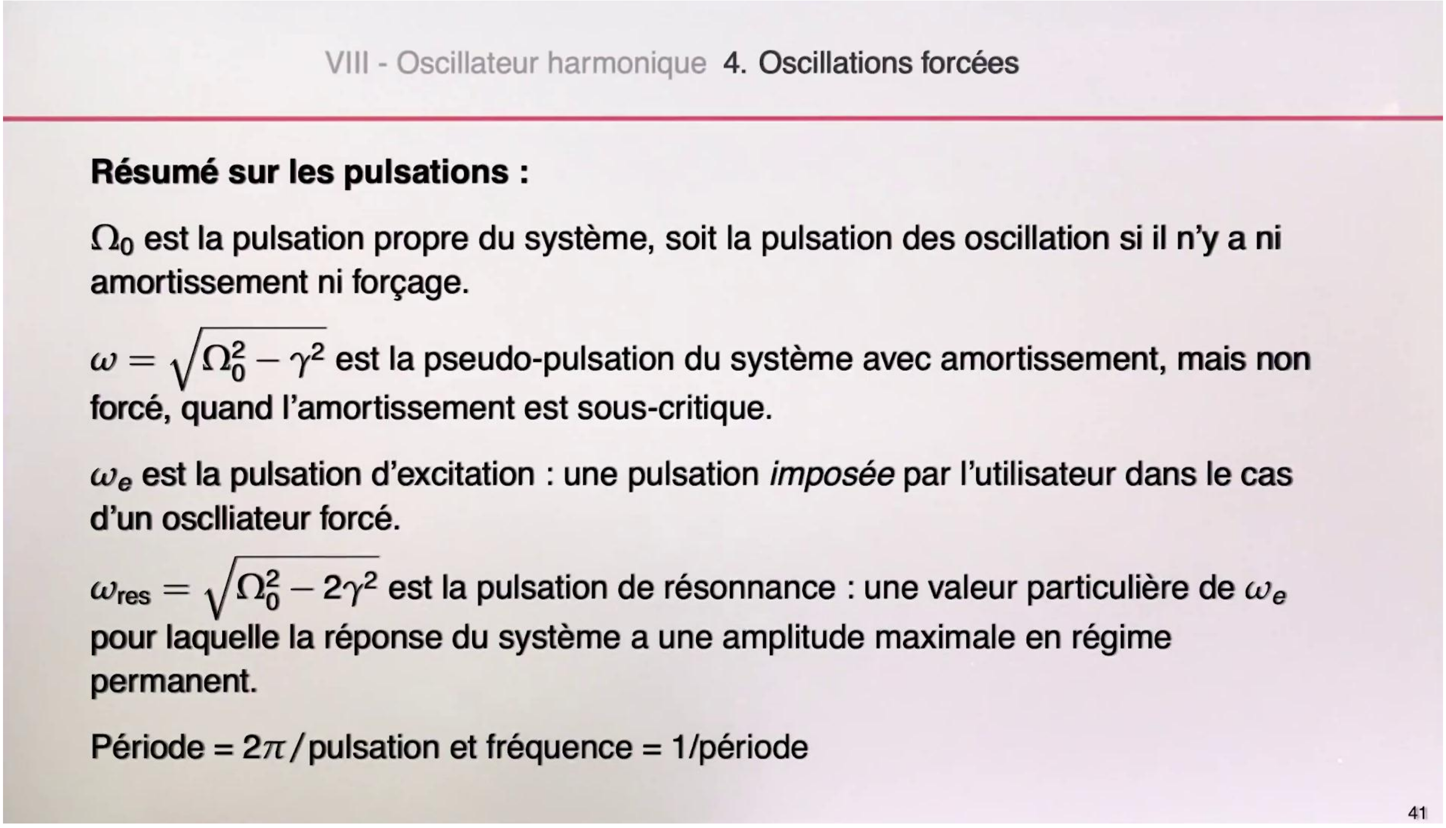


En résumé, la fonction $A(\omega e)$ a l'allure suivante : elle augmente, passe par un maximum, tend ensuite vers 0. Le maximum étant obtenu à $\omega e=\omega res$ et ωres vaut $\sqrt{\Omega 0^2-2\gamma^2}$. ωres est donc toujours strictement inférieure à $\Omega 0$, mais si γ est faible, à ce moment-là, $\gamma \ll \Omega 0$ et la pulsation de résonance sera à peu près égale à la pulsation propre. C'est ce que nous avons vu avec l'évolution des courbes. Lorsque γ diminue, la résonance est de plus en plus marquée et elle se place à une pulsation qui est égale à $\Omega 0$. Lorsque γ augmente, la résonance est moins marquée et on la voit nettement à $\omega res<\Omega 0$. Par ailleurs, nous avions $\tan\varphi$ qui vaut $2\gamma\omega e/\omega e^2-\Omega 0^2$. Si $\omega e=\Omega 0$, $\tan\varphi$ tend vers l'infini, comme en plus $\varphi[-\pi,0]$, nous avons $\varphi=-\pi/2$. Donc, pour une pulsation d'excitation égale à $\Omega 0$, le déphasage est de $-\pi/2$. Si en plus γ est faible, cela nous donnera que $\varphi\approx-\pi/2$ pour la résonance. En effet, pour γ faible, la résonance est à peu près à $\Omega 0$, pour lequel φ est toujours $-\pi/2$. En résumé, l'amplitude en fonction de ωe a un maximum Amax pour $\omega e=\omega res$ qui vaut $\sqrt{\Omega 0^2-2\gamma^2}$. Si ce terme est négatif, $\gamma^2>\Omega 0^2/2$, il n'y a pas de résonance.

Notes

Summary

7m 01s



Depuis le début du cours, nous avons vu quatre pulsations différentes. Il est temps de faire un résumé sur toutes ces pulsations. Ω0 est ce que l'on appelle la pulsation propre du système. C'est la pulsation des oscillations s'il n'y a ni amortissement ni forçage. C'est l'oscillateur harmonique libre. Lorsque nous avons rajouté de l'amortissement à ce système, nous avons obtenu la pseudo pulsation : $\sqrt{\Omega 0^2-\gamma^2}$. C'est la pseudo pulsation du système avec amortissement. Cela correspond à la pseudo période qui est la distance temporelle entre deux maximums successifs dans l'oscillateur harmonique, ces deux maximum étant à des amplitudes de plus en plus faibles. Ces pulsations correspondent au système. Elles sont données par bl, k et m. ωe est la pulsation d'excitation. C'est une pulsation qui est imposée par l'utilisateur dans le cas d'un oscillateur forcé. En faisant varier ωe, il est possible de trouver une pulsation ωe pour laquelle la réponse du système est maximum, c'est ce que l'on appelle la pulsation de résonance. C'est une valeur particulière de ωe pour laquelle la réponse du système a une amplitude maximale en régime permanent. À nouveau, ωres ne dépend que du système. Nous avons toujours la période qui vaut 2π/pulsation et la fréquence 1/période.

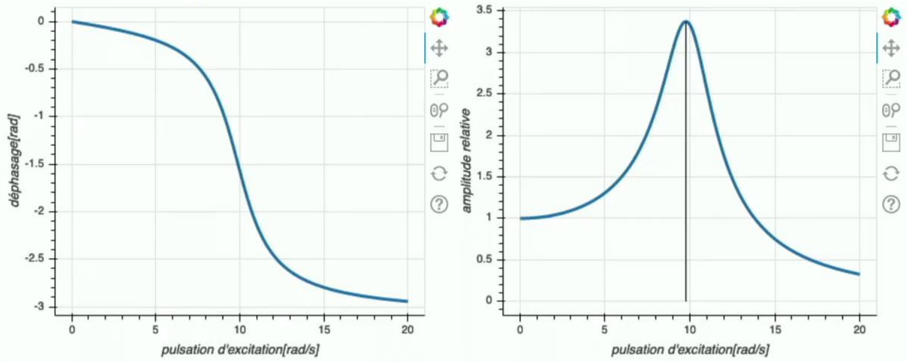
Notes

Summary

9m 34s

VIII - Oscillateur harmonique 4. Oscillations forcées

```
In [10]: show(row(dp2,ap2), notebook_handle=True)
         interact(update3,k=(1,50,1),m=(.1,1,.1),bl=(0,10,.1));
```



k 10
m 0.10
bl 0.30

```
omega_resonnance = 9.77[rad/s]
facteur de qualité, Q = 3.33
```

42

Nous allons maintenant observer l'évolution des courbes de défasage et d'amplitude en fonction des paramètres du système. Nous pouvons varier la raideur du ressort, la masse accrochée et le coefficient de frottement. Bien sûr, nous pouvons aussi varier la pulsation d'excitation, mais elle est ici sur le graphe. Nous regardons ce qui se passe pour chacune des pulsations d'excitation possibles. Et nous avons directement lisible sur ce graphe de manière condensée l'allure de la fonction x(t) en régime permanent, puisque nous savons que c'est une fonction cosinus, que nous avons son amplitude et son déphasage. Bien évidemment, lorsque j'augmente le coefficient d'amortissement, je peux faire disparaître la résonance. Lorsque j'ai un coefficient d'amortissement très faible, je vois la résonance qui devient de plus en plus marquée.

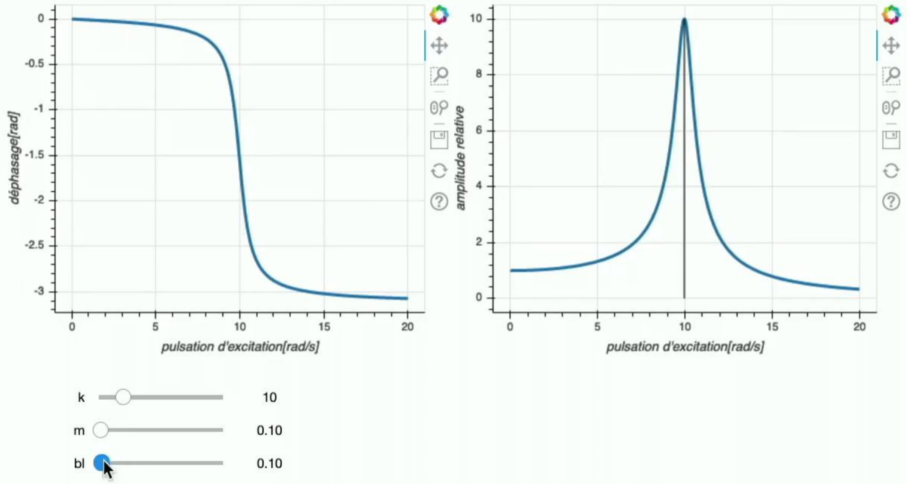
Notes

Summary

11m 04s

VIII - Oscillateur harmonique **4. Oscillations forcées**

```
In [10]: show(row(dp2,ap2), notebook_handle=True)
         interact(update3,k=(1,50,1),m=(.1,1,.1),bl=(0,10,.1));
```




```
omega_resonnance = 9.97[rad/s]
facteur de qualité, Q = 10.00
```

42

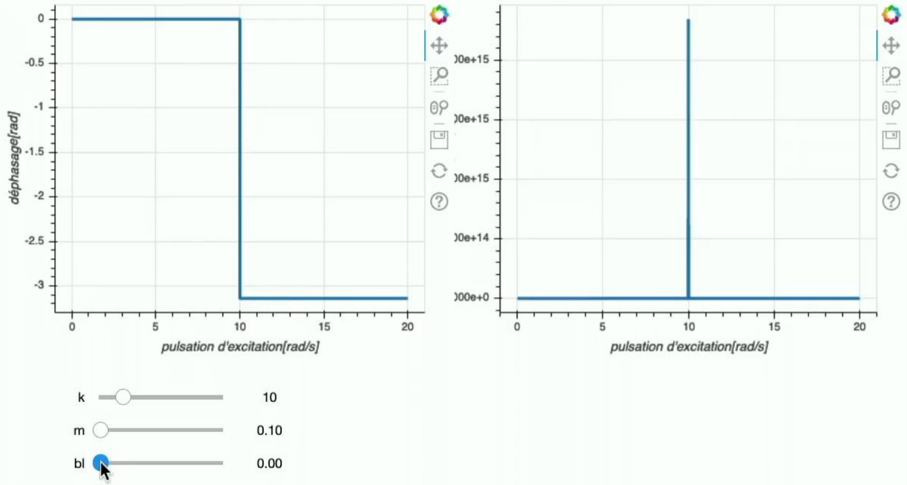
Nous avons ici l'amplitude relative, c'est donc l'amplitude de la réponse divisée par l'amplitude de l'excitation. Pour les paramètres choisis, elle est à 10, c'est-à-dire que la masse bouge avec une amplitude 10 fois plus grande que ce que je lui imprime lorsque je la force à bouger. Je peux mettre bl à 0.

Notes

Summary

12m 01s

```
In [10]: show(row(dp2,ap2), notebook_handle=True)
         interact(update3,k=(1,50,1),m=(.1,1,.1),bl=(0,10,.1));
```




```
omega_resonnance = 10.00[rad/s]
le facteur de qualité Q est infini
```

42

Nous voyons alors une fonction qui diverge. L'amplitude vaut 0 pour toutes les valeurs, sauf pour ωe où elle est égale à ∞. Bien entendu, ce n'est pas physique. Je ne peux pas avoir une oscillation infinie. Cela signifie que si j'ai un coefficient de frottement trop faible, le système mécanique va se rompre avant l'établissement du régime permanent.

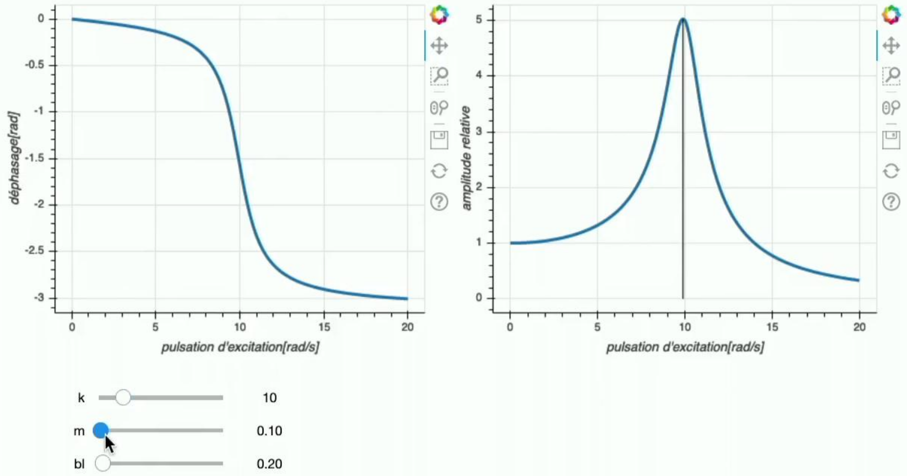
Notes

Summary

12m 26s

VIII - Oscillateur harmonique **4. Oscillations forcées**

```
In [10]: show(row(dp2,ap2), notebook_handle=True)
         interact(update3,k=(1,50,1),m=(.1,1,.1),bl=(0,10,.1));
```




```
omega_resonnance = 9.90[rad/s]
facteur de qualité, Q = 5.00
```

42

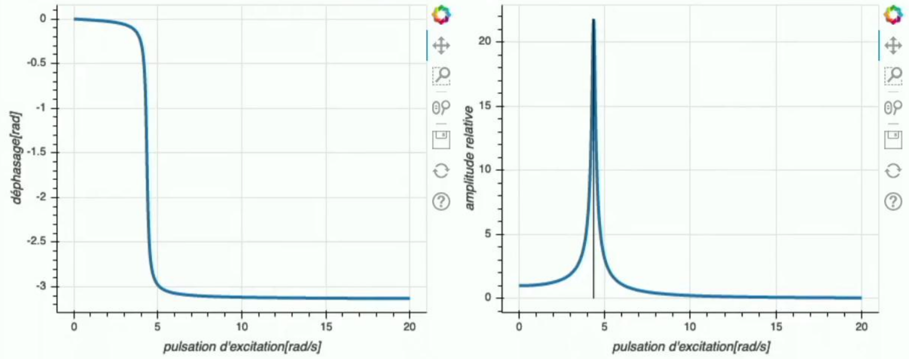
Augmentons un petit peu le coefficient de frottement et jouons maintenant avec k et m. Nous pouvons faire varier la position de la résonance ainsi que son amplitude.

Notes

Summary

12m 51s

```
In [10]: show(row(dp2,ap2), notebook_handle=True)
         interact(update3,k=(1,50,1),m=(.1,1,.1),bl=(0,10,.1));
```



k 19
m 1.00
bl 0.20

```
omega_resonnance = 4.36[rad/s]
facteur de qualité, Q = 21.79
```

43

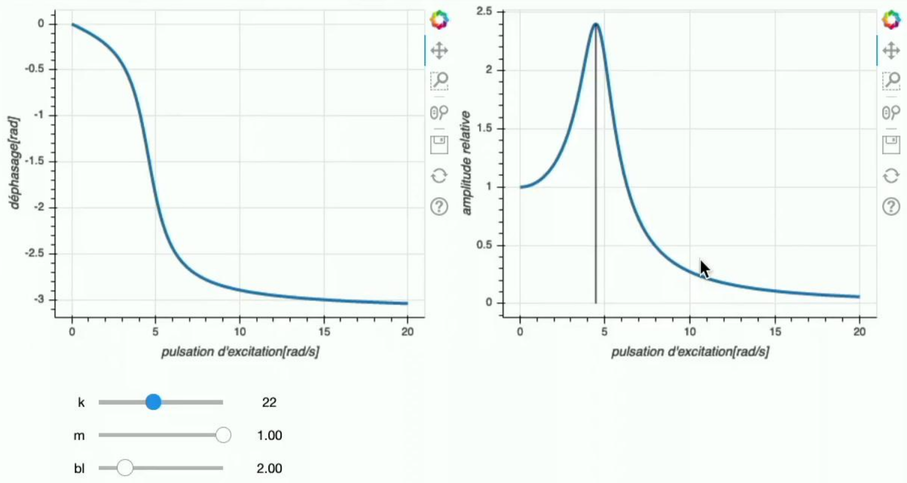
En augmentant m et en augmentant un petit peu la valeur de k, nous arrivons à une résonance que l'on appelle très piquée.

Notes

Summary

13m 17s

```
In [10]: show(row(dp2,ap2), notebook_handle=True)
         interact(update3,k=(1,50,1),m=(.1,1,.1),bl=(0,10,.1));
```




```
omega_resonnance = 4.47[rad/s]
facteur de qualité, Q = 2.35
```

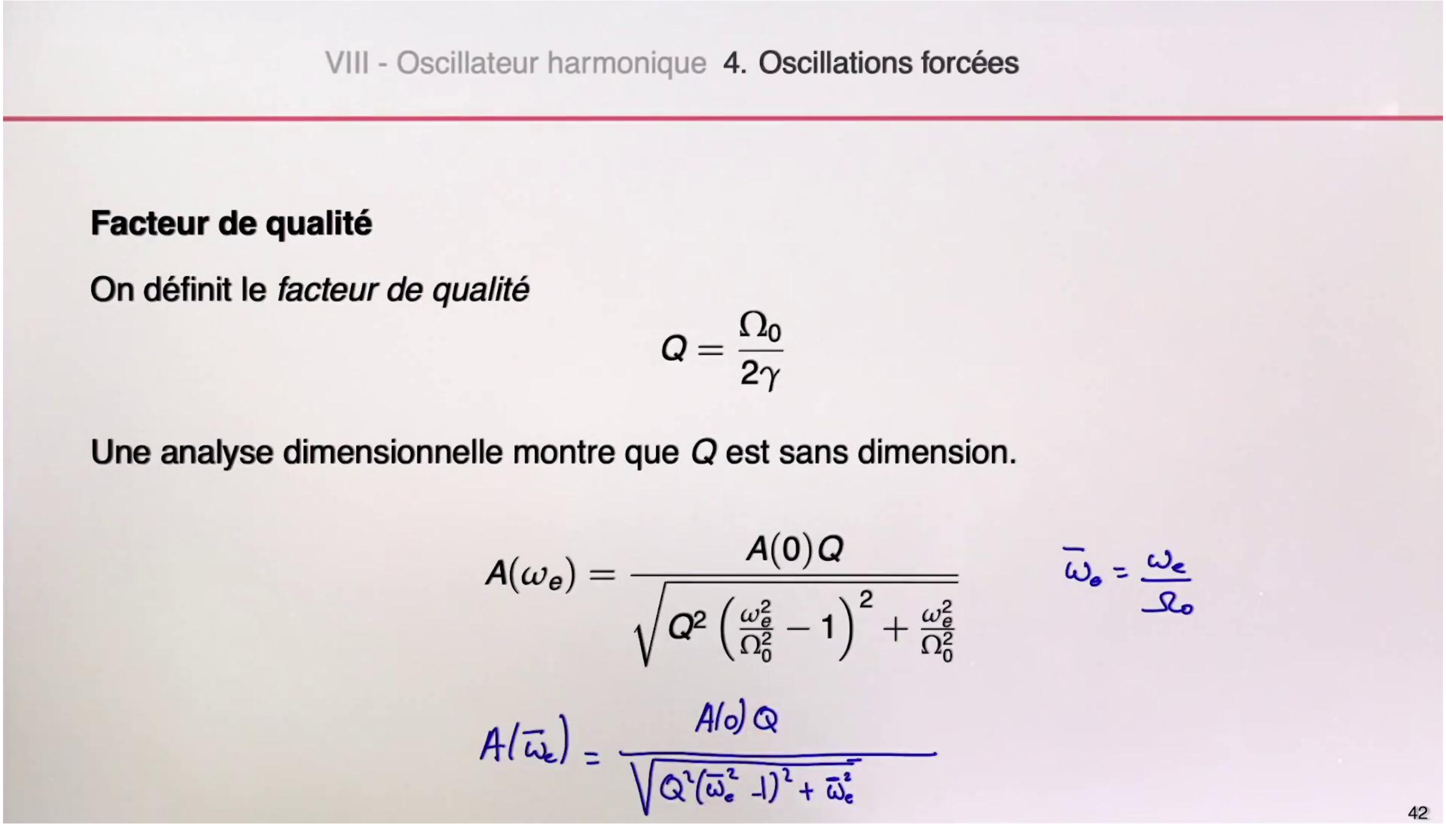
43

Je peux maintenant diminuer l'amplitude de la résonance en augmentant le coefficient de frottement. J'ai une résonance qui devient de plus en plus molle. Je ne fais maintenant plus varier k et m. Je vais simplement diminuer le coefficient de frottement. Je vois la pulsation de résonance qui augmente et tend vers la valeur correspondant à Ω0. Ces courbes ont toujours à peu près la même allure. Nous allons chercher un moyen de les représenter de manière universelle.

Notes

Summary

13m 43s



Afin d'obtenir une description universelle de ces courbes d'amplitude et de déphasage, on définit ce que l'on appelle le facteur de qualité. Le facteur de qualité est défini par $\Omega 0/2\gamma$. $\Omega 0$ étant une pulsation et γ en seconde -1, le facteur de qualité est sans dimension. Un calcul un peu fastidieux, mais sans grand intérêt, permet de réécrire $A(\omega e)$ en faisant disparaître γ et en le remplaçant par Q. On a donc $A(\omega e)$ exprimé avec $A(0)$ l'amplitude $A(\omega e)=0$, le facteur de qualité ωe et $\Omega 0^2$. Si je définis la grandeur ωe barre comme étant $\omega e/\Omega 0$, c'est tout simplement la pulsation d'excitation divisée par la pulsation propre. En gros, ça sera égal à 1 quand j'aurai choisi $\omega e=\Omega 0$. L'expression de mon amplitude devient alors $A(0)Q/\sqrt{r}Q^2(\omega e$ barre$-1^2)+\omega e$ barre^2, et ne dépend que du facteur de qualité et de ωe barre.

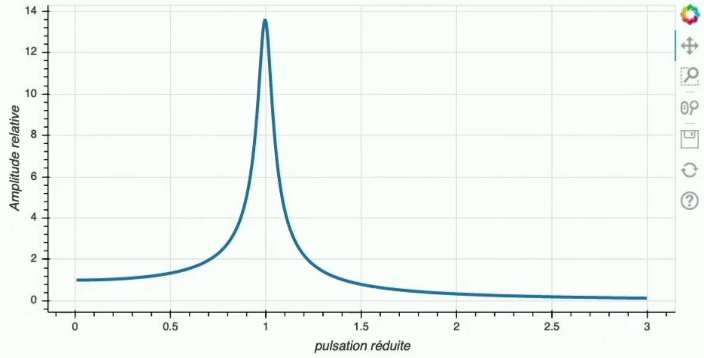
Notes

Summary

14m 32s

VIII - Oscillateur harmonique 4. Oscillations forcées

```
In [12]: show(ap3, notebook_handle=True)
         interact(update4,Qual=(0.1,50,0.1));
```



Qual 13.60

X_resonnance = 0.999

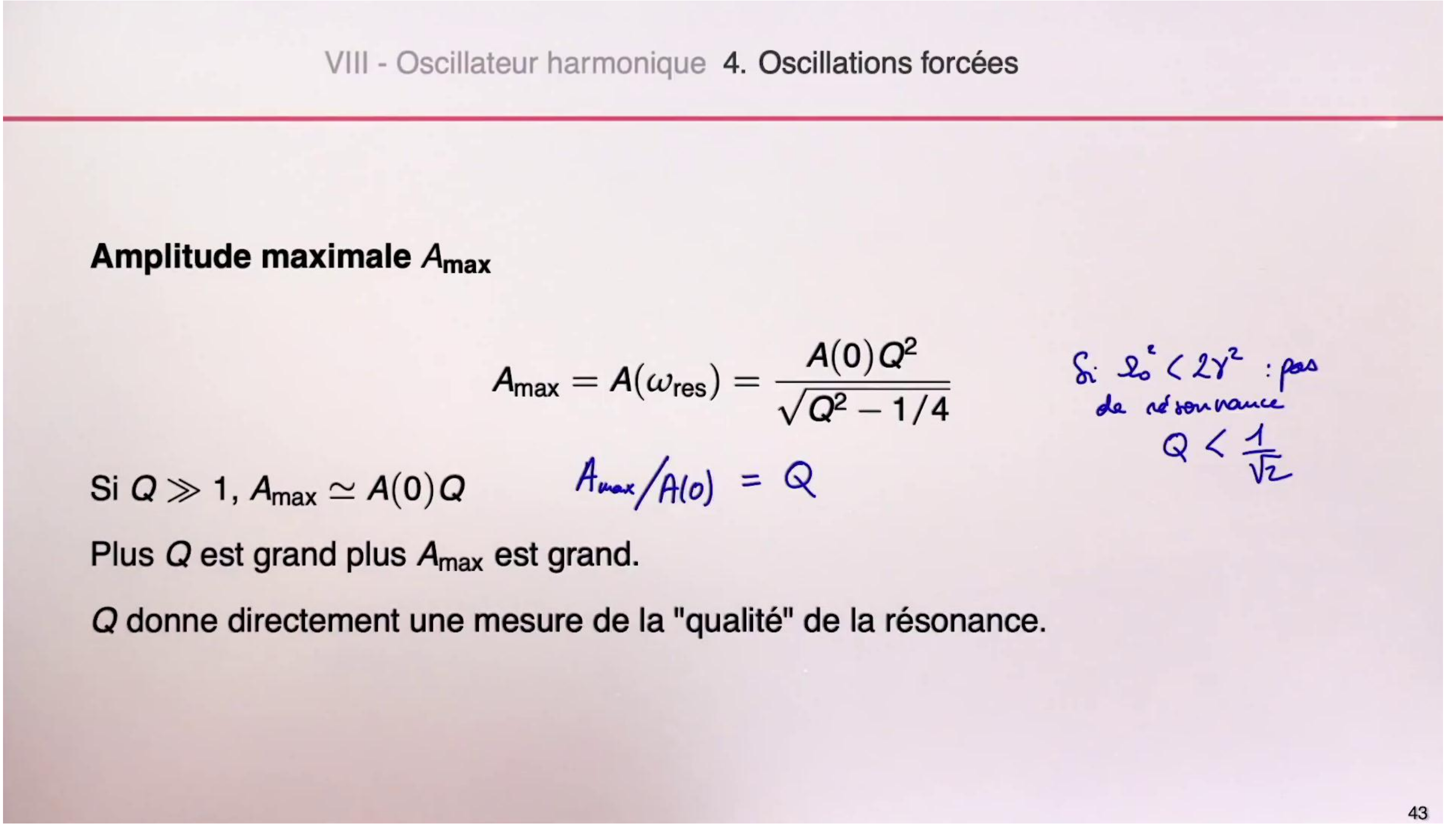
42

Je peux maintenant tracer la fonction A(ωe barre) en fonction de cette pulsation réduite, ωe/Ω0, et ne faire changer que le facteur de qualité. Lorsque le facteur de qualité augmente, la résonance est de plus en plus piquée. Lorsque le facteur de qualité diminue, j'ai une résonance de plus en plus plate, voire pas de résonance du tout. Il me faut un facteur de qualité supérieur à 1/√2 pour voir apparaître un maximum, donc une résonance. Lorsque le facteur de qualité augmente, la position de la résonance s'approche de la pulsation réduite 1. Or, la pulsation réduite vaut 1 lorsque ωe=Ω0. Lorsque le facteur de qualité est très grand, l'amplitude relative est égale au facteur de qualité.

Notes

Summary

16m 01s



L'amplitude maximum, qui est l'amplitude à la résonance, s'exprime à l'aide du facteur de qualité comme $A(0)Q^2/\sqrt{Q^2-1/4}$. Si $\Omega_0^2<2\gamma^2$, il n'y a pas de résonance. Cela correspond à $Q<1/\sqrt{2}$. Pour qu'il y ait une résonance, on doit donc avoir $Q^2>1/2$, donc on a toujours $Q^2-1/4$ qui est strictement positif, dès qu'il y a une résonance. Si en plus nous sommes dans le cas $Q\gg1$, à ce moment-là, nous pouvons négliger le $-1/4$ dans la racine carrée. Il reste $\sqrt{Q^2}$, soit Q. Q^2/Q nous donne $A_{max}\approx A(0)Q$. L'amplitude relative $A_{max}/A(0)$ a la résonance, est alors égale au facteur de qualité Q. Lorsque nous avons une résonance piquée, le facteur de qualité nous indique directement l'amplitude relative. Plus le facteur de qualité est grand, plus A_{max} est grand. C'est pour cela qu'on l'appelle facteur de qualité, il mesure la qualité de la résonance.

Notes

Summary

17m 36s

Voilà, nous en avons fini avec ce chapitre sur les oscillations. Nous sommes allés en complexité croissante, de l'oscillateur libre simple à l'oscillateur harmonique forcé et dans cette dernière partie, vous avez vraiment abordé des notions très importantes pour tous les problèmes dans lesquels on a des mouvements périodiques entretenus par une force externe. Vous retrouverez ces notions dans beaucoup d'autres domaines de la physique ou de l'ingénierie.

Notes

Summary

19m 04s