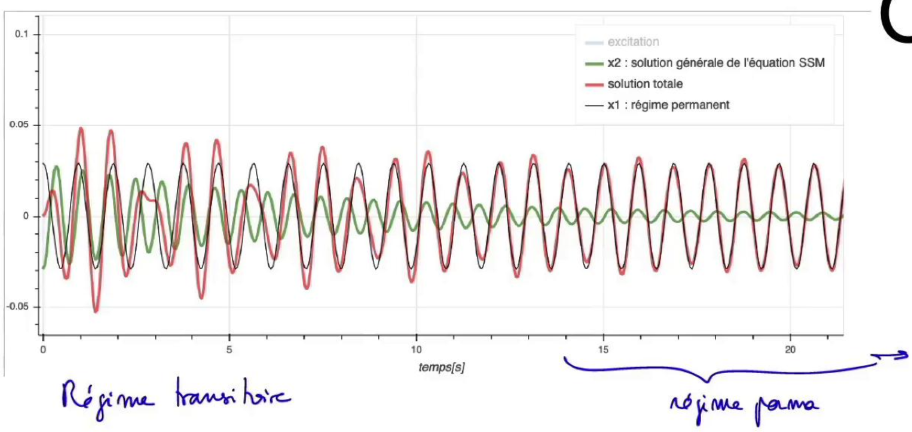
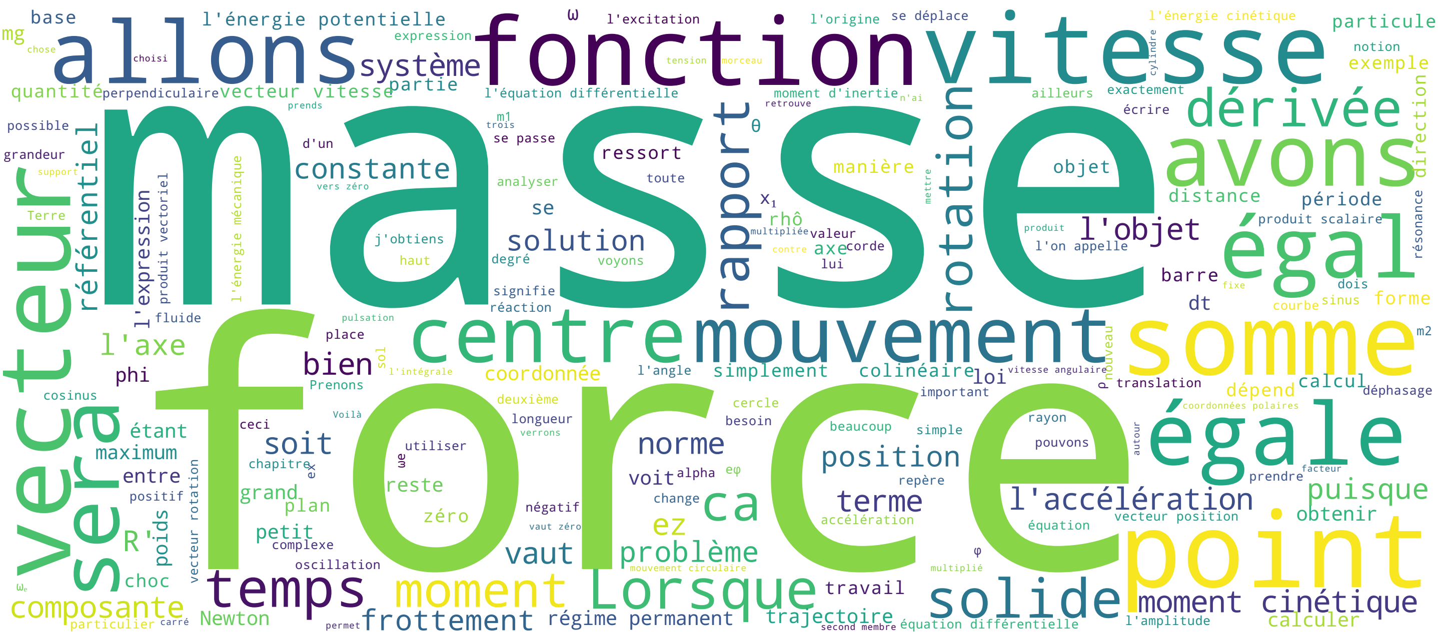


Oscillations forcées

Partie 2: analyse, régime transitoire

Prof. Cécile Hébert



[Video](#)

EPFL

Maintenant que nous avons obtenu les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur forcé, nous allons les analyser pour comprendre ce qu'elles signifient. En particulier, nous allons analyser ces solutions en fonction d'un paramètre donné que moi, utilisateur, je peux faire varier pour un même système. Ce paramètre est ce que l'on appelle la « pulsation d'excitation ». En effet, lorsque je tente de mettre ce système en mouvement, je peux choisir la pulsation du mouvement que j'effectue avec la main.

Notes

Summary

0m 05s

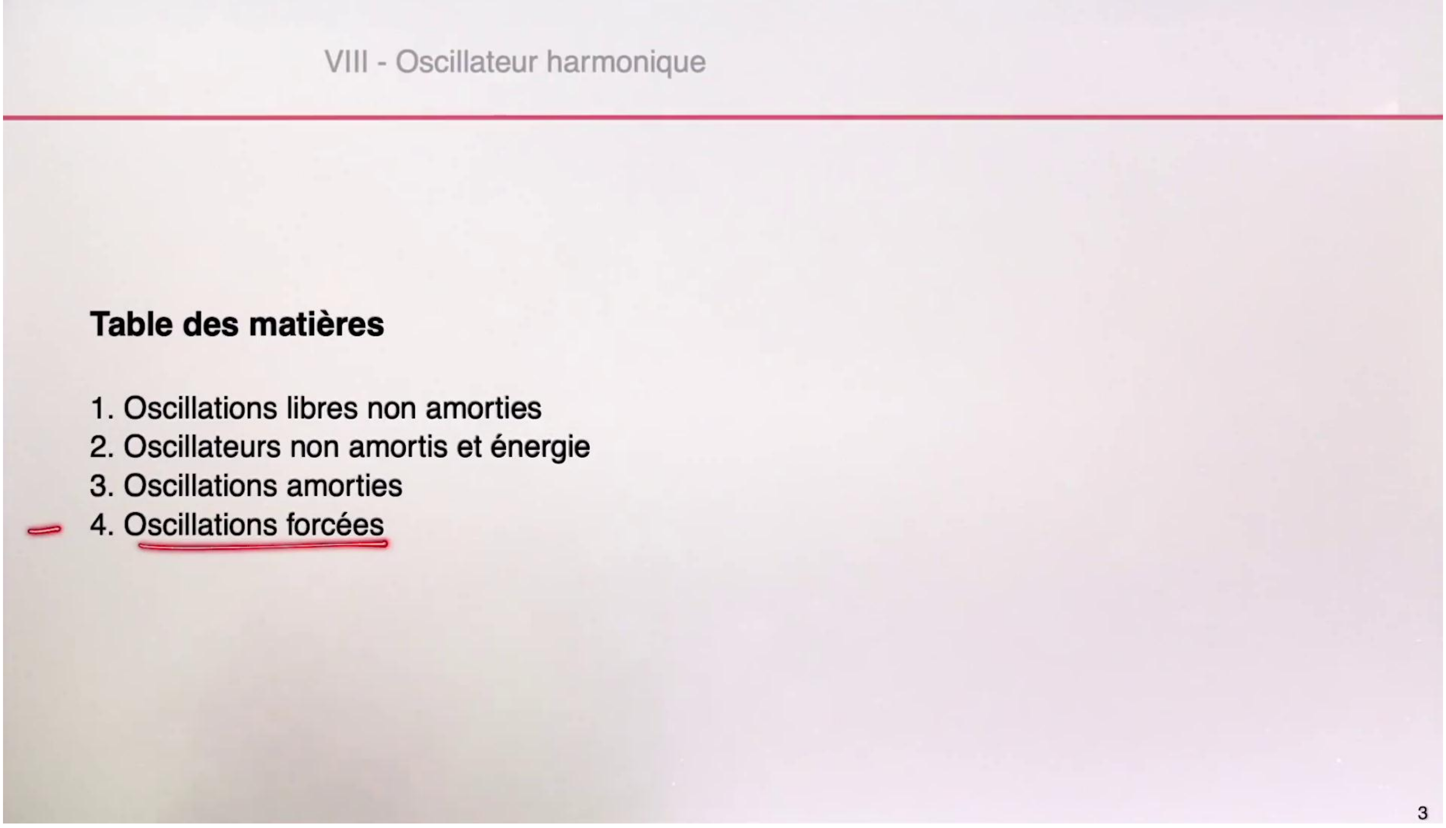
Plan du cours

2

Notes

Summary

0m 53s

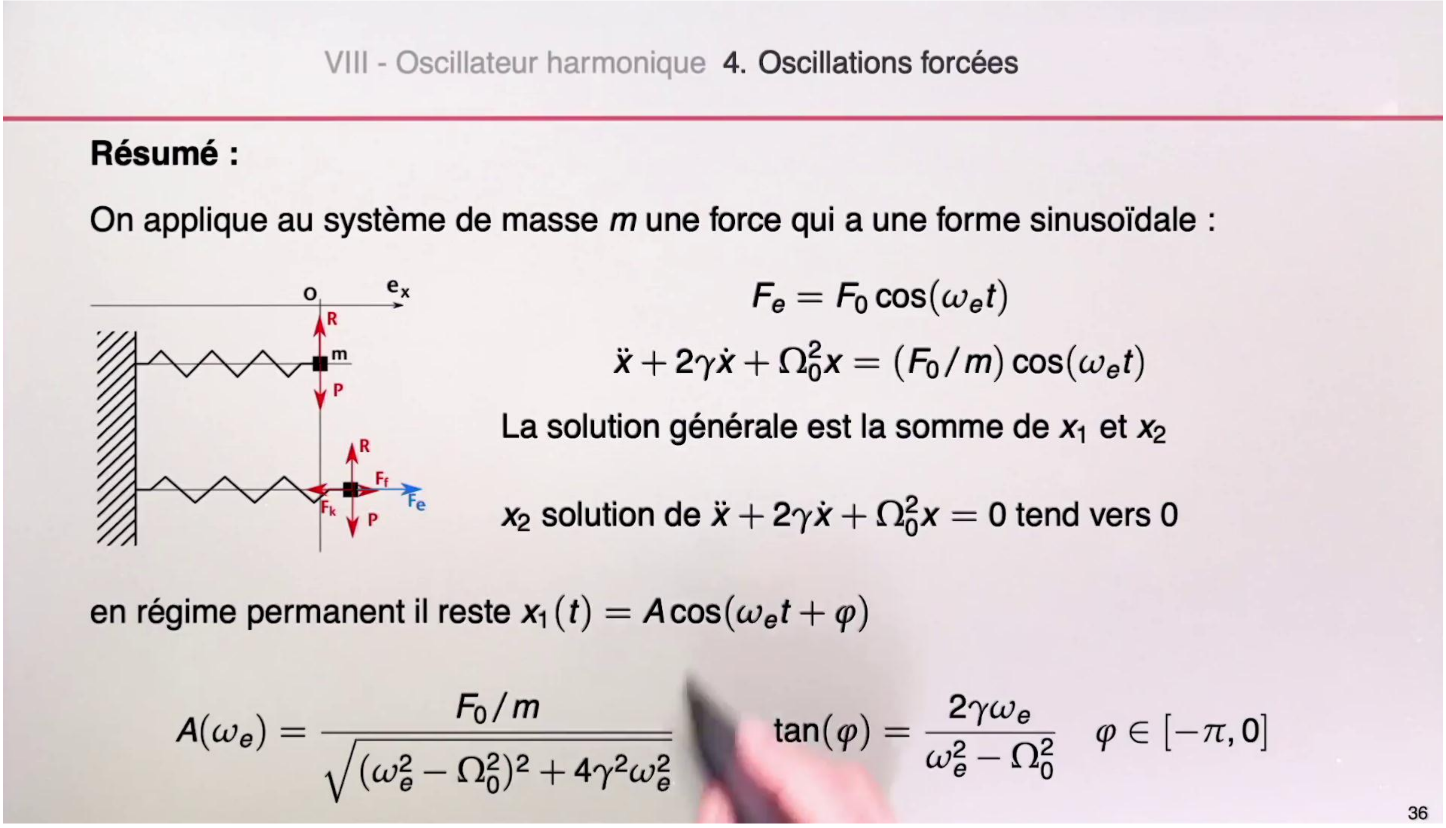


Nous sommes dans le chapitre huit sur l'oscillateur harmonique et nous allons voir les oscillations forcées, mais cette fois l'analyse de la solution trouvée précédemment.

Notes

Summary

0m 53s



En résumé, dans le modèle de l'oscillateur harmonique forcé, on a appliqué au système qui est une masse m une force qui a une forme sinusoïdale. L'équation différentielle obtenue est donc l'équation différentielle de l'oscillateur amorti avec un second membre qui a une forme constante fois $\cos(\omega_e t)$. La solution générale est la somme de deux fonctions x_1 et x_2. X_2 étant la solution de l'équation sans second membre tend toujours vers zéro. X_1 est une solution particulière de cette équation différentielle. Lorsqu'on a attendu assez longtemps, nous sommes en régime permanent et il ne reste que x_1. X_1 obtenu à la forme $A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi)$ qui dépend aussi de ω_e. Nous avons trouvé l'expression de A et l'expression de φ grâce à cette tangente. Dans les problèmes et les exercices. Si vous arrivez à une équation différentielle qui a exactement cette forme. Vous avez parfaitement le droit d'utiliser directement ces solutions sans refaire tout le développement s'il n'est pas demandé. Faites attention. Dans notre approche, nous avons pris une fonction d'excitation en cosinus et nous avons cherché une solution particulière également en cosinus. Nous aurions pu chercher une fonction sinus.

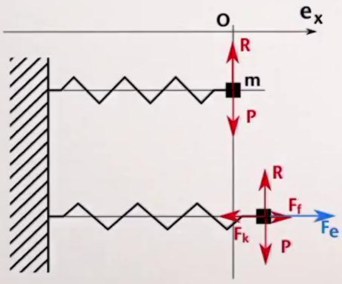
Notes

Summary

1m 03s

Résumé :

On applique au système de masse m une force qui a une forme sinusoïdale :



$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = (F_0/m)\cos(\omega_e t)$$

La solution générale est la somme de x_1 et x_2 $\quad x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

x_2 solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ tend vers 0

en régime permanent il reste $x_1(t) = A\cos(\omega_e t + \varphi)$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \qquad \tan(\varphi) = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

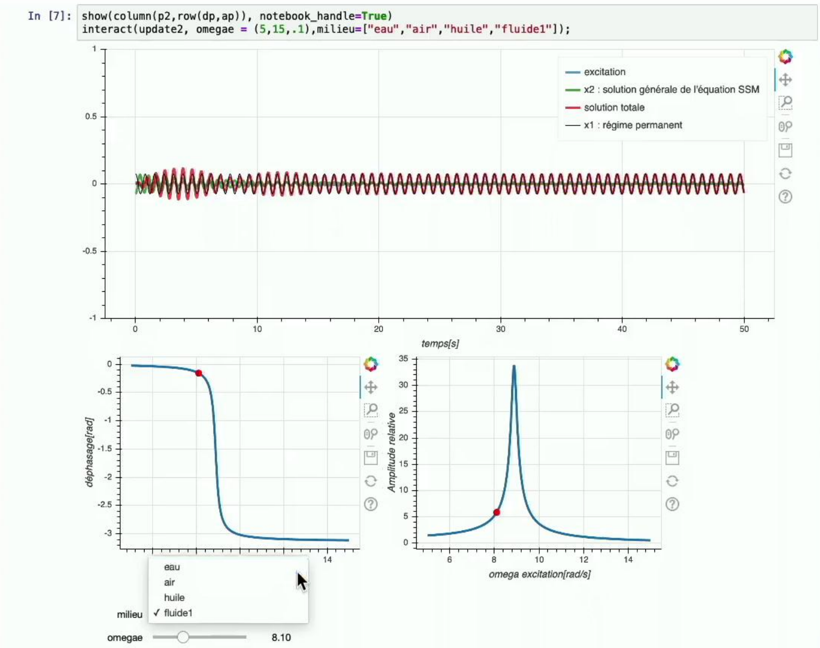
36

Le sinus est simplement la même fonction que cosinus avec un déphasage. Nous aurions trouvé la même expression pour $A(\omega_e)$, mais par contre, φ aurait une expression légèrement différente et en particulier, nous n'aurions pas trouvé $\varphi \in [-\pi, 0]$, mais $\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$. Cette approche en prenant cosinus et sinus est très courante dans les livres d'ingénierie. Elle a l'avantage de simplifier l'expression du déphasage en le mettant implicitement entre ces deux fonctions. J'ai choisi de prendre cosinus et cosinus pour que vous voyiez bien où se situe le déphasage. Nous allons maintenant regarder à quoi ressemble cette fonction $x(t) = x_1(t)+x_2(t)$.

Notes

Summary

2m 37s



37

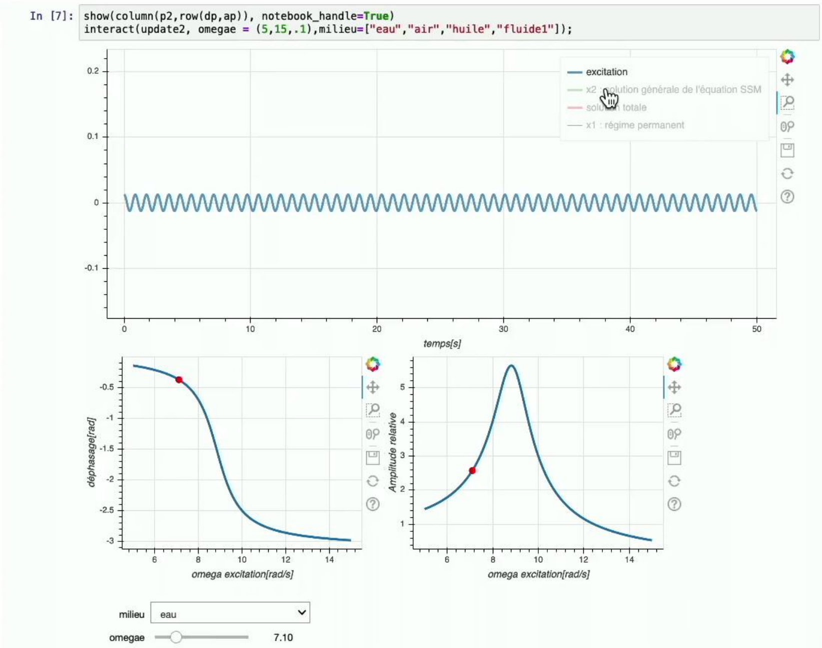
Cette [inaudible 00:03:30] permet de tracer les différentes courbes X en fonction du temps. Ainsi que les fonctions φ et A. Il est possible de choisir entre trois milieux. De l'eau, de l'air, de l'huile et un fluide 1. Le fluide 1, un coefficient d'amortissement intermédiaire entre l'eau et l'air. Je vais commencer les démonstrations avec de l'eau.

Notes

Summary

3m 30s

VIII - Oscillateur harmonique 4. Oscillations forcées



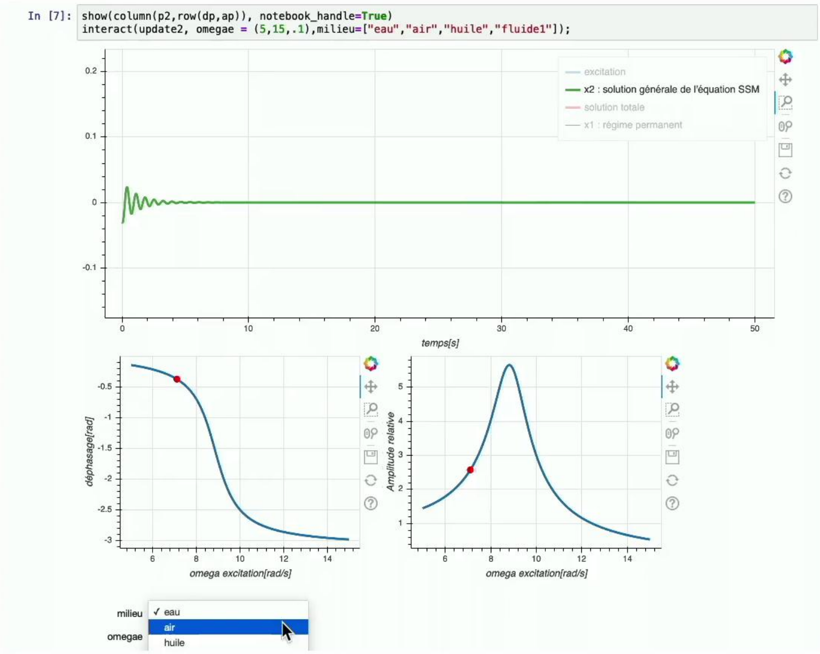
37

Commençons par tracer la courbe de l'excitation. J'ai choisi ici une excitation qui a toujours la même amplitude. Je ne peux faire varier que la pulsation d'excitation ω_e. En zoomant sur la courbe, nous verrons un petit peu mieux l'excitation. C'est une fonction cosinus qui a un maximum à t=0, et présente des oscillations de période donnée. Lorsque je diminue ω_e, la période augmente. Lorsque je m'augmente ω_e, la période diminue. C'est ici et dans ce cas la seule variable que j'ai.

Notes

Summary

3m 57s



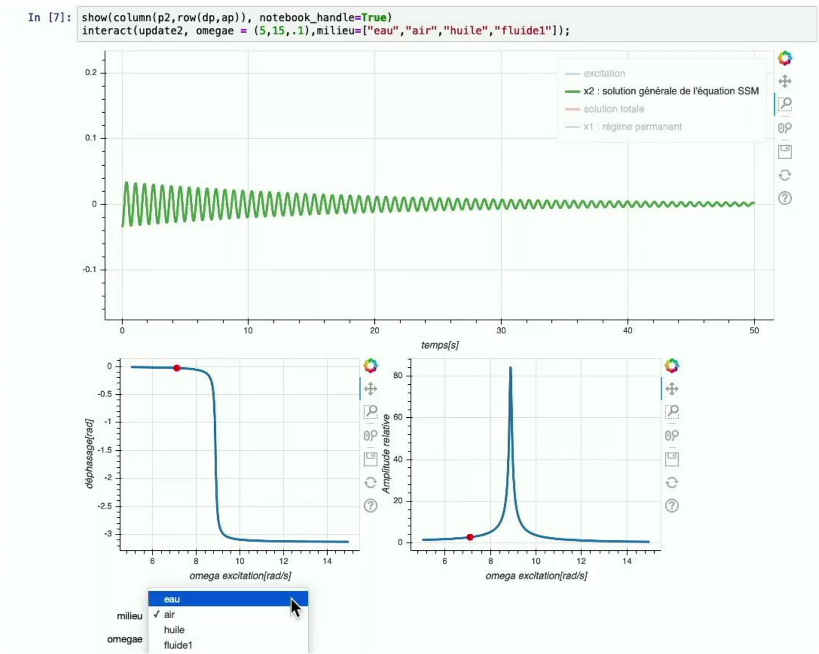
37

Regardons maintenant x_2 solution générale de l'équation sans second membre. C'est une fonction qui oscille au début et décroît en tendant vers zéro.

Notes

Summary

4m 51s



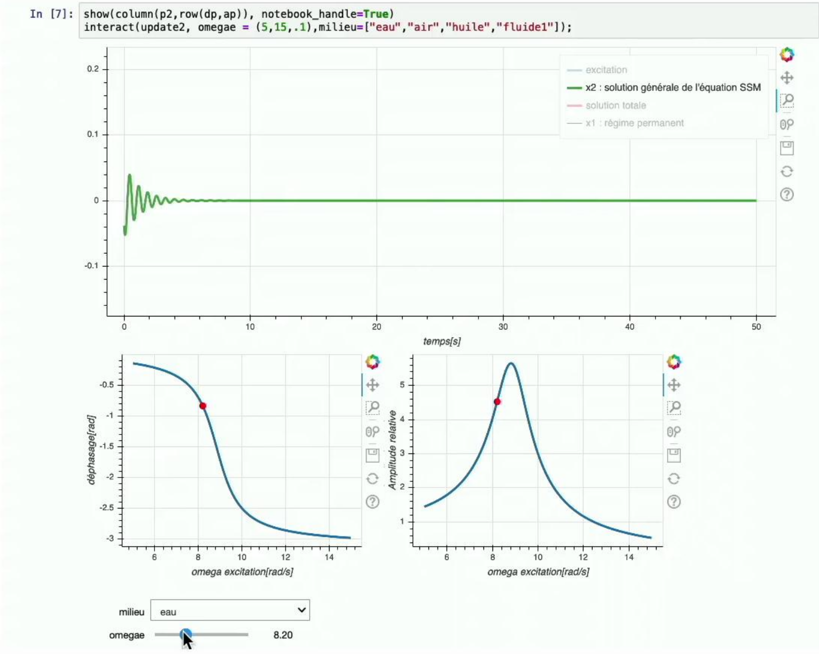
37

Lorsque je me place dans un fluide qui amorti moins, comme l'air, on voit que l'amortissement prend beaucoup plus longtemps. Il faut un temps plus grand pour voir x_2 tendre vers zéro.

Notes

Summary

5m 04s



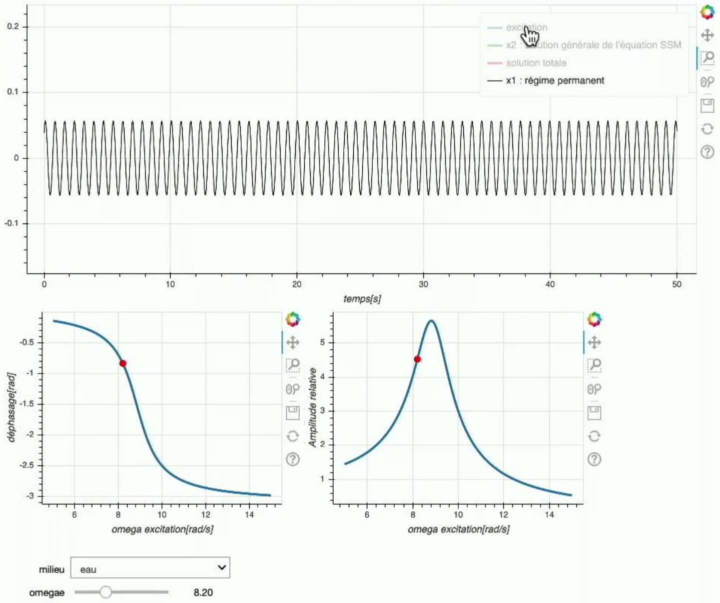
La séparation entre deux maximums ici est ce que l'on appelle la « pseudo période ». Cette pseudo période dépend du système, pas de l'excitation que je mets. Je peux changer ω_e, on voit l'amplitude qui change mais la pseudo période ne change pas. La distance entre deux maximums ici reste la même.

Notes

Summary

5m 20s

```
In [7]: show(column(p2,row(dp,ap)), notebook_handle=True)
        interact(update2, omegae = (5,15,.1),milieu=["eau","air","huile","fluide1"]);
```



37

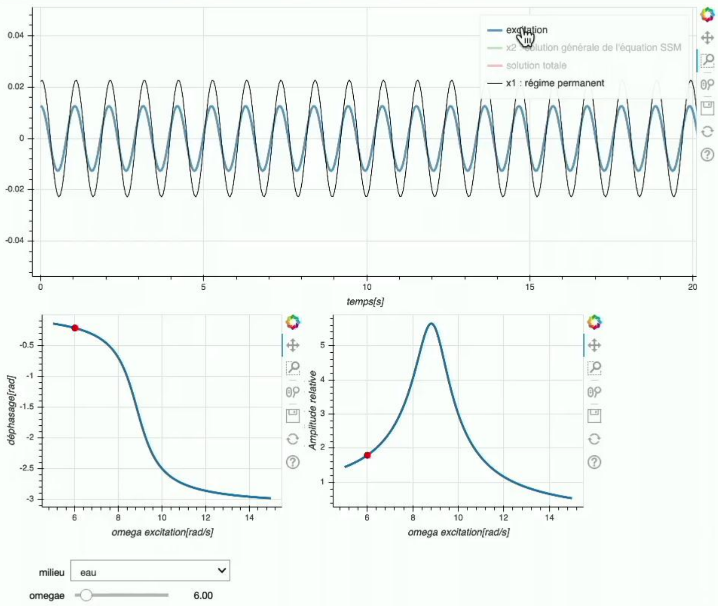
x_1 est la solution particulière de l'équation différentielle. Celle que nous avons appelée « solution en régime permanent ». X_1 est une fonction $A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi)$. Elle a donc la même période que l'excitation.

Notes

Summary

5m 51s

```
In [7]: show(column(p2,row(dp,ap)), notebook_handle=True)
        interact(update2, omegae = (5,15,.1),milieu=["eau","air","huile","fluide1"]);
```



Si je trace la solution en régime permanent et l'excitation sur la même courbe, je vois que lorsque je fais varier ω_e, la période de ces deux fonctions varie de la même manière et reste toujours la même. Zoomons un peu plus. Et faisons varier ω_e. La période de la solution x_1 s'adapte à la période de l'excitation, mais on voit deux choses qui changent. Son amplitude change et le calage des maximums de x_1 par rapport au maximum de x_2 varie aussi. Lorsque j'ai ω_e grand, les deux fonctions oscillent en opposition de phase. Lorsque ω_e est faible, les deux fonctions se mettent à osciller en phase. Nous voyons donc que l'amplitude et le déphasage de x_1 par rapport à l'excitation dépendent tous deux de ω_e.

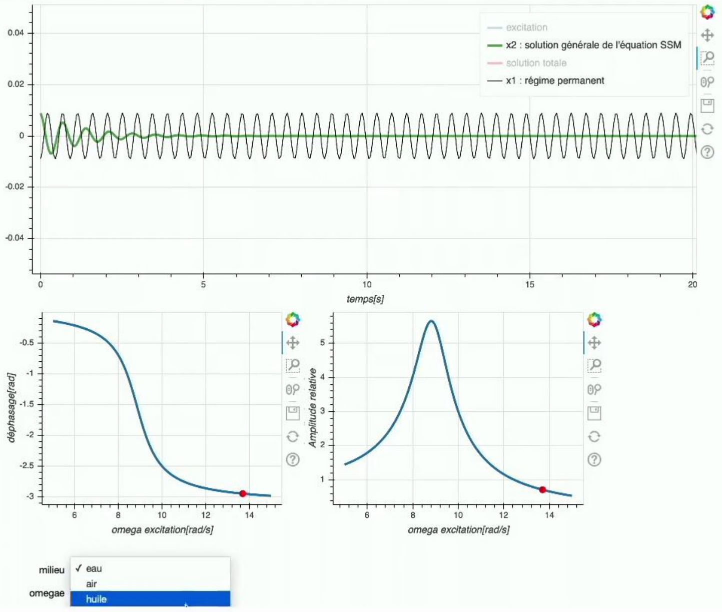
Notes

Summary

6m 10s

VIII - Oscillateur harmonique 4. Oscillations forcées

```
In [7]: show(column(p2,row(dp,ap)), notebook_handle=True)
        interact(update2, omegae = (5,15,.1),milieu=["eau","air","huile","fluide1"]);
```



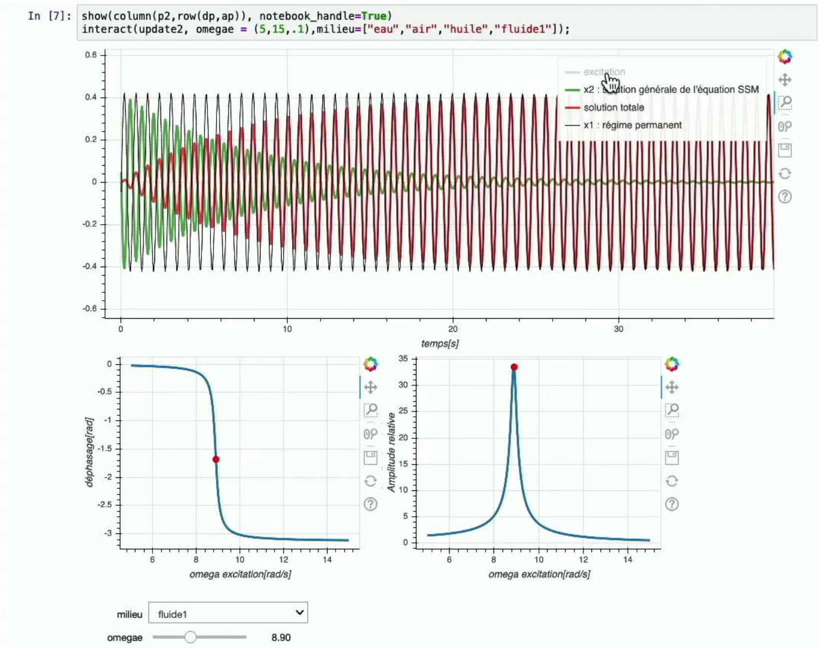
37

Supprimons l'excitation, Reprenons x_1 et x_2. La solution totale sera la somme x_1+x_2. On voit tout de suite que lorsque je fais la somme de ces deux fonctions. Si j'ai attendu assez longtemps et que je suis dans la région où x_2 a tendu vers zéro, la somme des deux ne sera plus que x_1. Il ne restera donc plus que x_1 comme solution. En revanche, si je regarde le système au début de son évolution. X_2 n'est pas négligeable devant x_1 et nous verrons donc bien l'influence de ces deux fonctions. Par ailleurs, lorsque je fais changer ω_e. La période de la fonction x_1 est égale à la période de l'excitation. Les périodes de ces deux fonctions ne sont donc pas les mêmes. En gros, au début, j'ai la somme de deux fonctions qui oscillent mais n'ont pas la même période. Leur somme sera donc quelque chose de compliqué. Passons dans le fluide 1.

Notes

Summary

7m 37s



37

Traçons maintenant la solution $x(t)=x_1+x_2$. Lorsque je fais varier ω_e. On voit bien la différence entre les deux moments de l'évolution. Le début pendant lequel les oscillations s'établissent et le moment où x_2 est devenu suffisamment faible pour que nous soyons dans le régime permanent. La solution totale est égale à x_1. On voit aussi bien la partie chaotique dans l'établissement des oscillations. D'une façon générale, lorsque je fais varier ω_e, je remarque qu'il existe une valeur particulière de ω_e pour laquelle j'arrive à maximiser les oscillations du système. Lorsque nous sommes au maximum des oscillations, nous sommes à ce que nous appelons « la résonance », la pulsation choisie est la pulsation de résonance. Si je compare la solution totale à l'excitation.

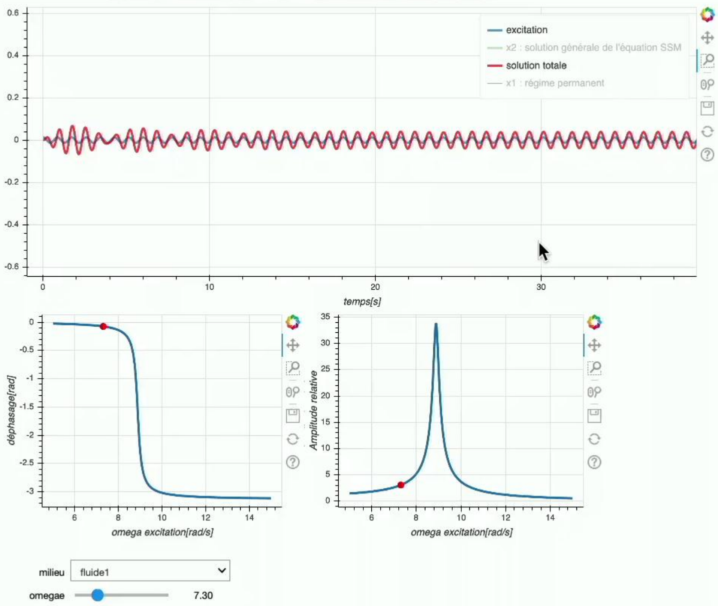
Notes

Summary

9m 03s

VIII - Oscillateur harmonique **4. Oscillations forcées**

In [7]:
```
show(column(p2,row(dp,ap)), notebook_handle=True)
interact(update2, omegae = (5,15,.1),milieu=["eau","air","huile","fluide1"]);
```



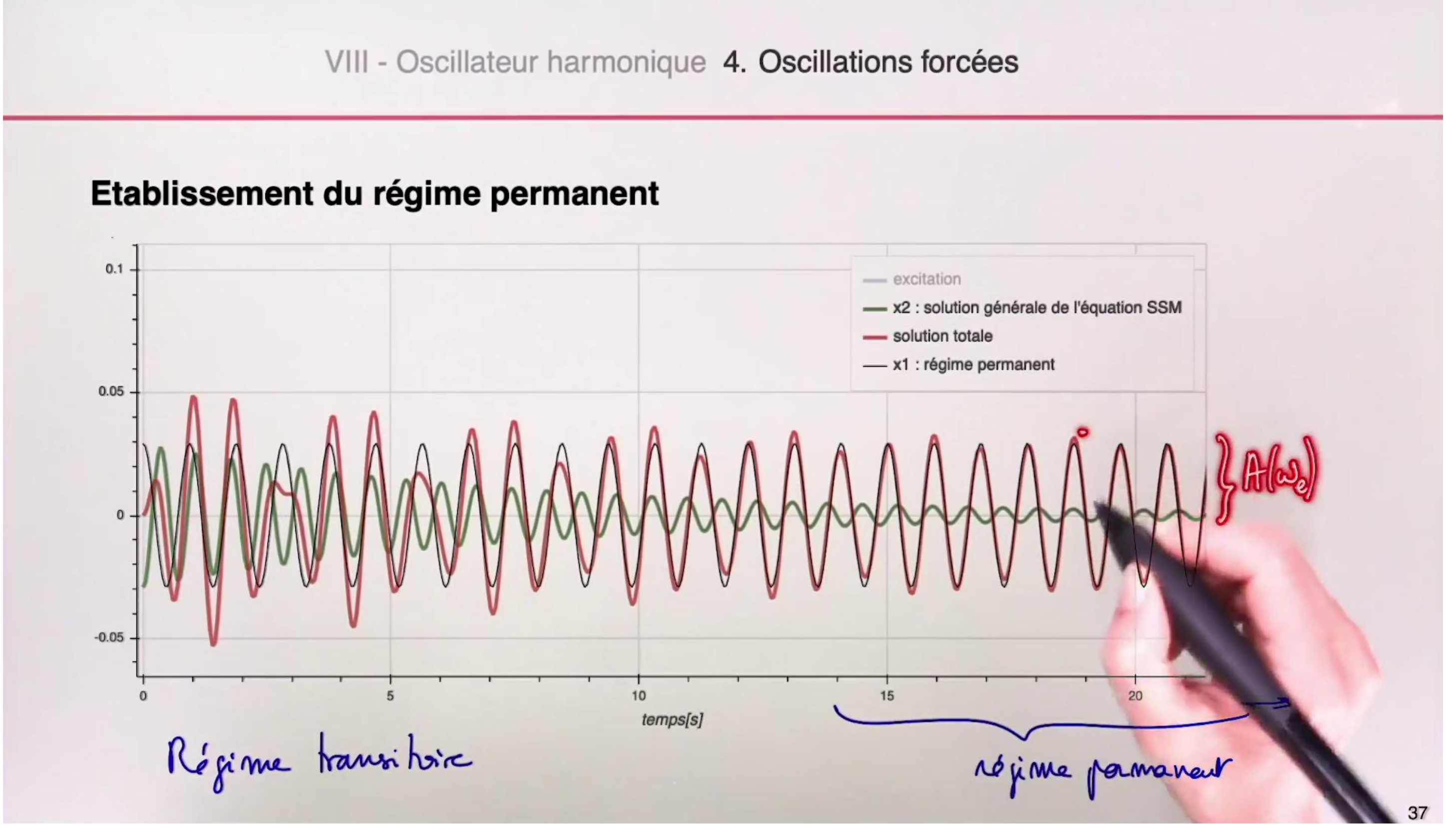
37

On voit que l'amplitude de la réponse, donc de la solution, est beaucoup plus grande que l'amplitude des excitations. J'ai réussi à obtenir un effet très important avec simplement une faible excitation. Si je m'éloigne de la résonance, la différence n'est pas aussi marquée. D'une façon générale, quand on s'intéresse à un oscillateur forcé, on ne s'intéresse pas à cette région-là. On ne s'intéresse qu'à la partie en régime permanent. Cette partie en régime permanent peut être caractérisée par l'amplitude $A(\omega_e)$ fonction qui est représentée ici et par le déphasage entre l'excitation et la réponse.

Notes

Summary

10m 19s

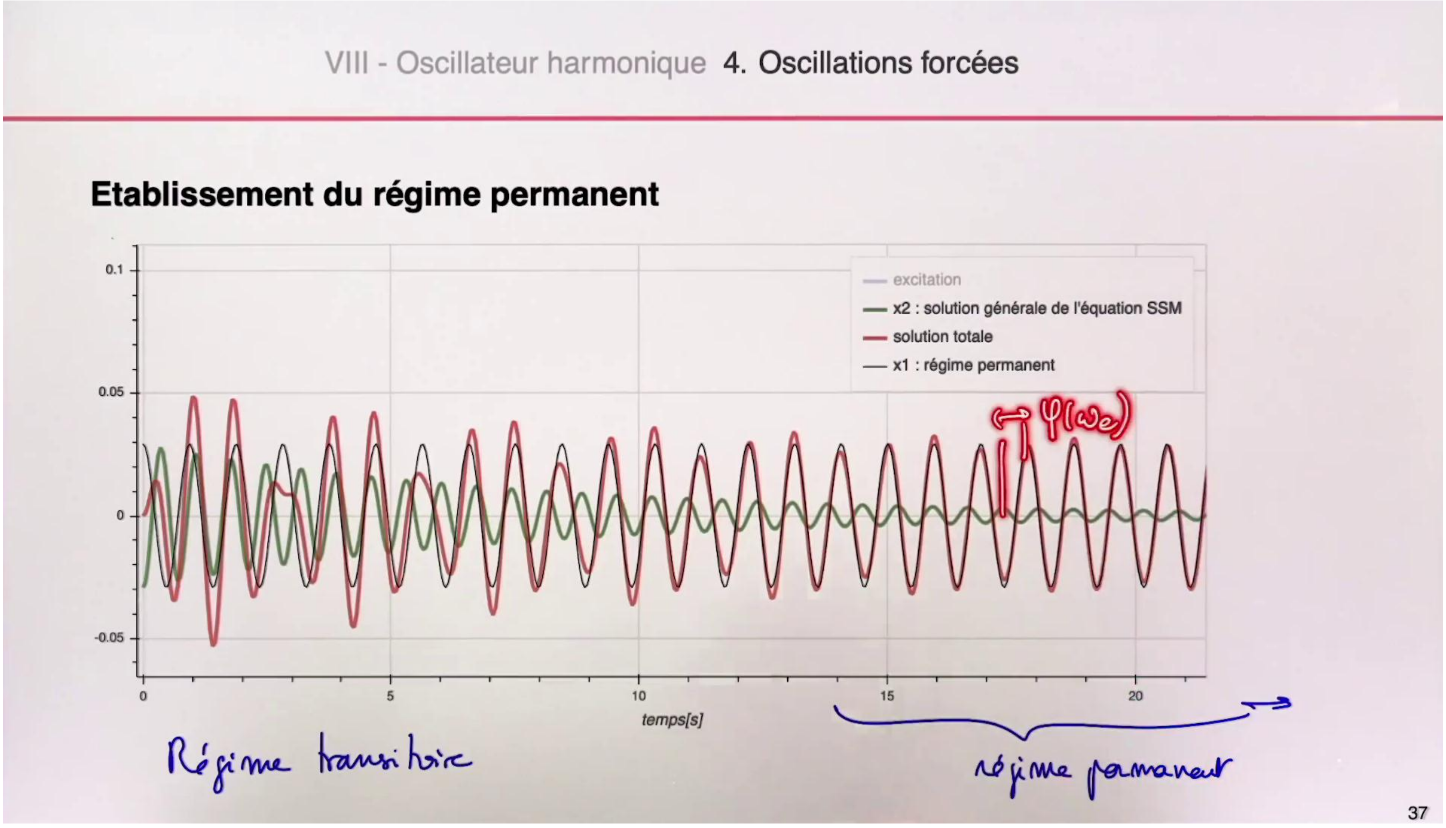


En résumé, lorsqu'on regarde l'évolution temporelle de l'oscillateur forcé. Au début, à la mise en marche, nous sommes dans ce que l'on appelle « le régime transitoire ». Et une fois que la solution générale de l'équation sans second membre est devenue suffisamment faible devant la solution en régime permanent, nous sommes dans le régime permanent. Ce régime permanent est caractérisé par l'amplitude des oscillations et le déphasage entre l'excitation et la réponse. Cette amplitude est la fonction $A(\omega_e)$ et le déphasage...

Notes

Summary

11m 08s

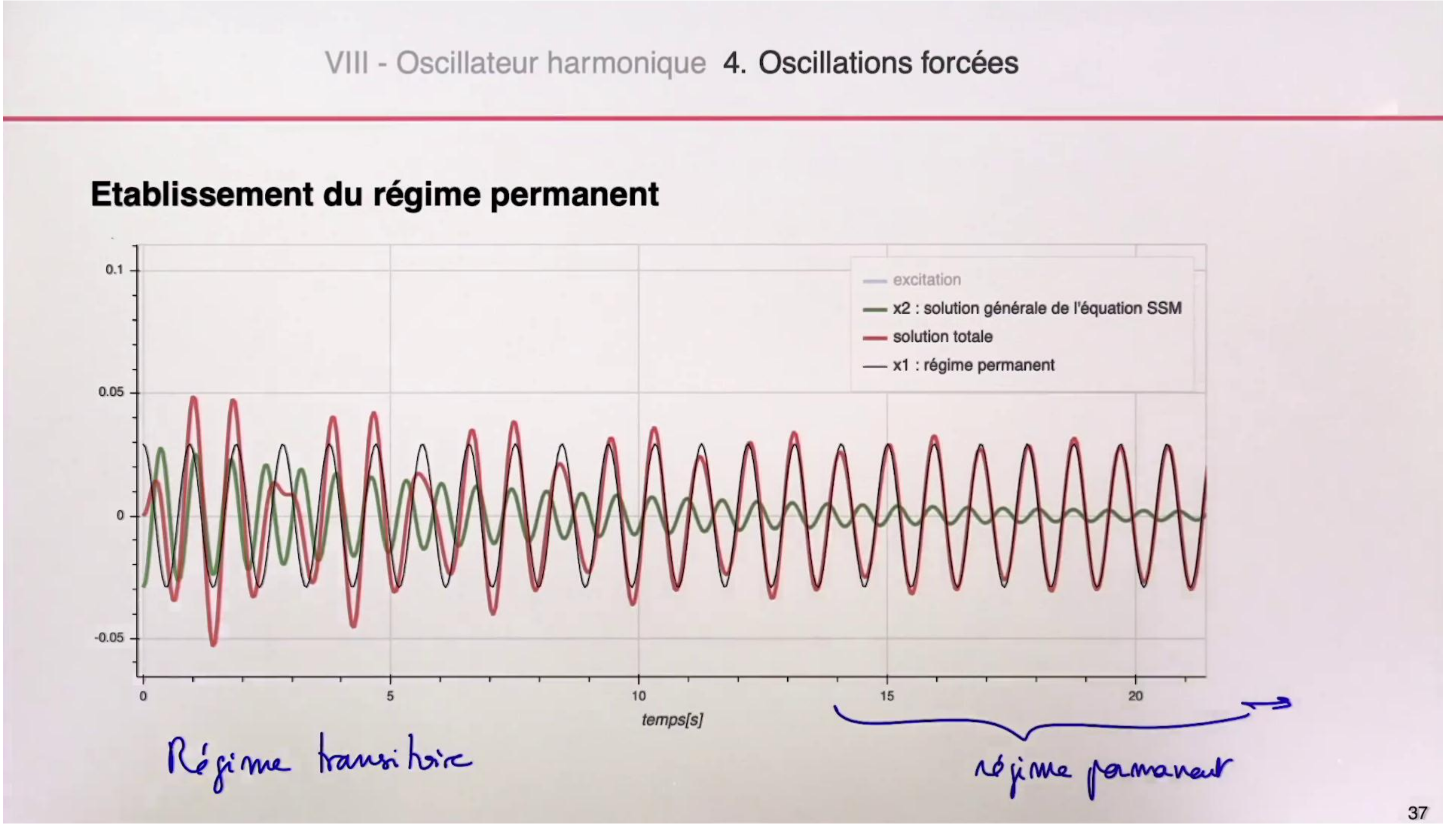


Et le déphasage, la fonction $\varphi(\omega_e)$.

Notes

Summary

11m 57s



Nous allons donc maintenant étudier ce régime permanent et en particulier les deux fonctions A et φ.

Notes

Summary

12m 03s

Voilà, nous avons commencé à analyser les solutions obtenues pour l'oscillateur forcé. Nous avons en particulier vu qu'il y a deux parties dans le temps. Ce que l'on appelle le régime transitoire, pendant lequel les oscillations se mettent en place et le régime permanent pendant lesquels elles sont bien établies. Dans la prochaine vidéo, nous allons analyser en détail le régime permanent qui est en général celui qui nous intéresse pour un oscillateur forcé.

Notes

Summary

12m 11s