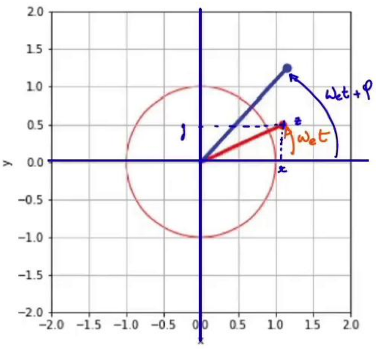
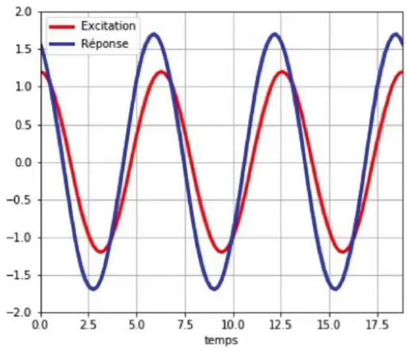
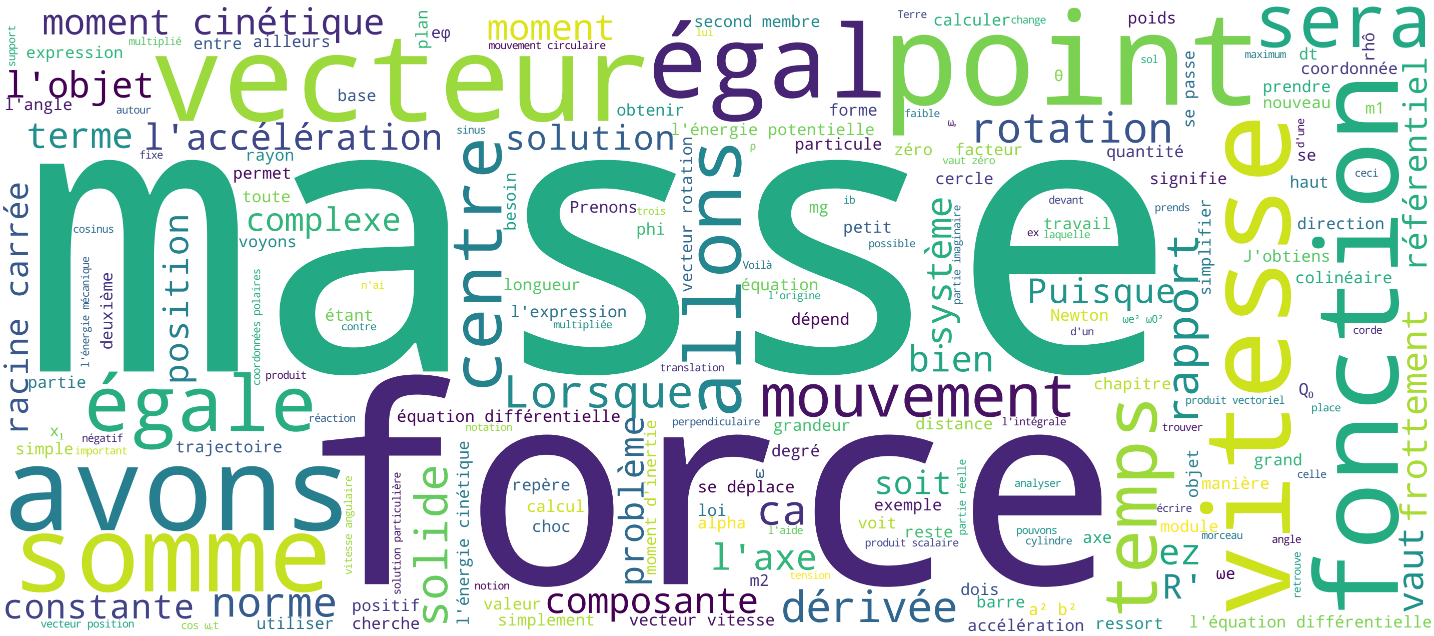



# Oscillations forcées

## Partie 1: dérivation

Prof. Cécile Hébert




Video

Maintenant, en plus des frottements qui vont faire que le mouvement finit par s'arrêter, nous allons ajouter une force périodique. Par exemple, je peux obliger cet oscillateur à osciller en bougeant la main qui le tient. En fonction de la fréquence à laquelle je bouge la main, on voit que le mouvement de la masse est différent. Je peux même arriver à un moment où il saute de manière incontrôlée.

Notes

Summary

0m 05s

## Plan du cours

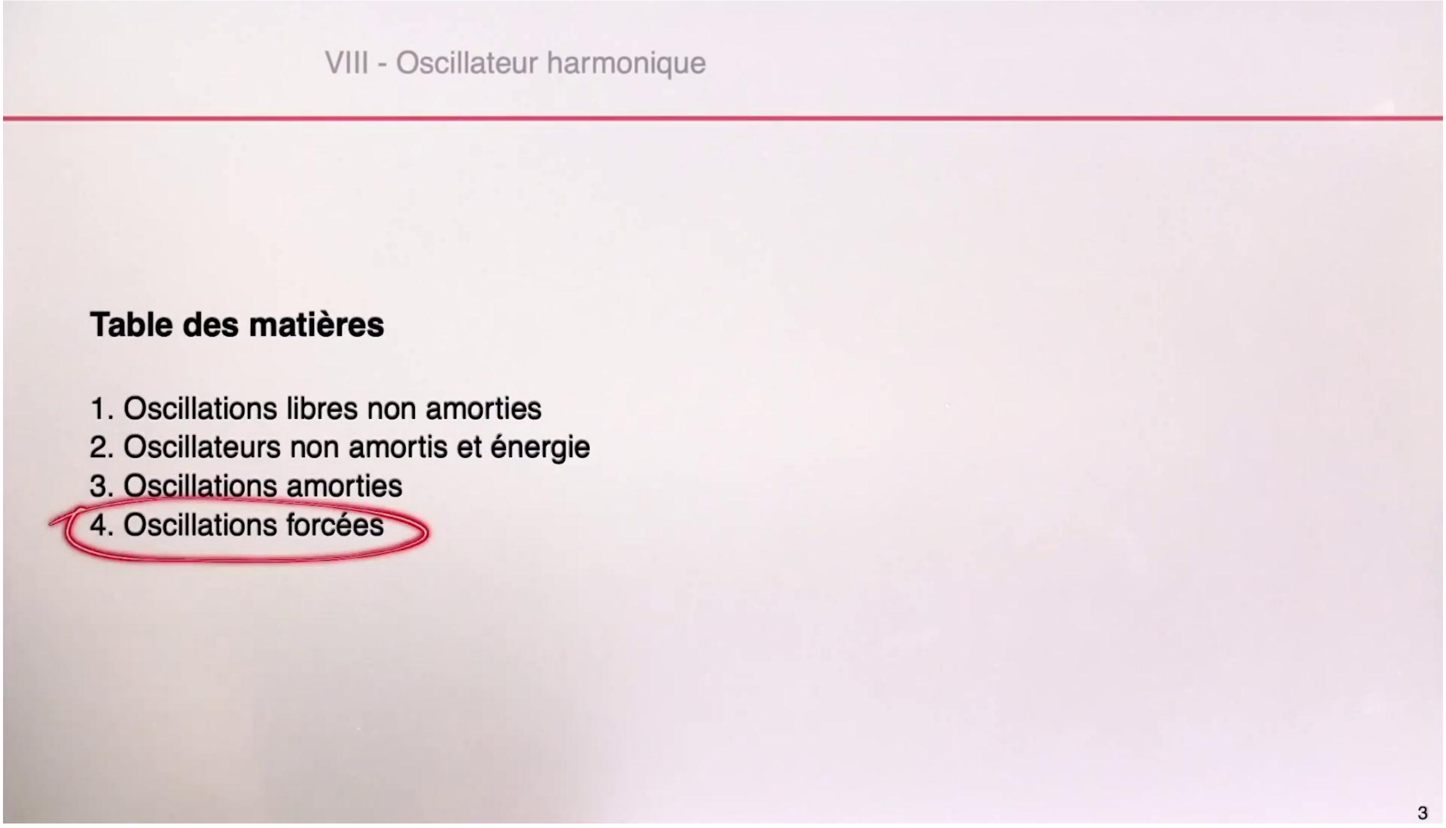




Notes

Summary

0m 47s

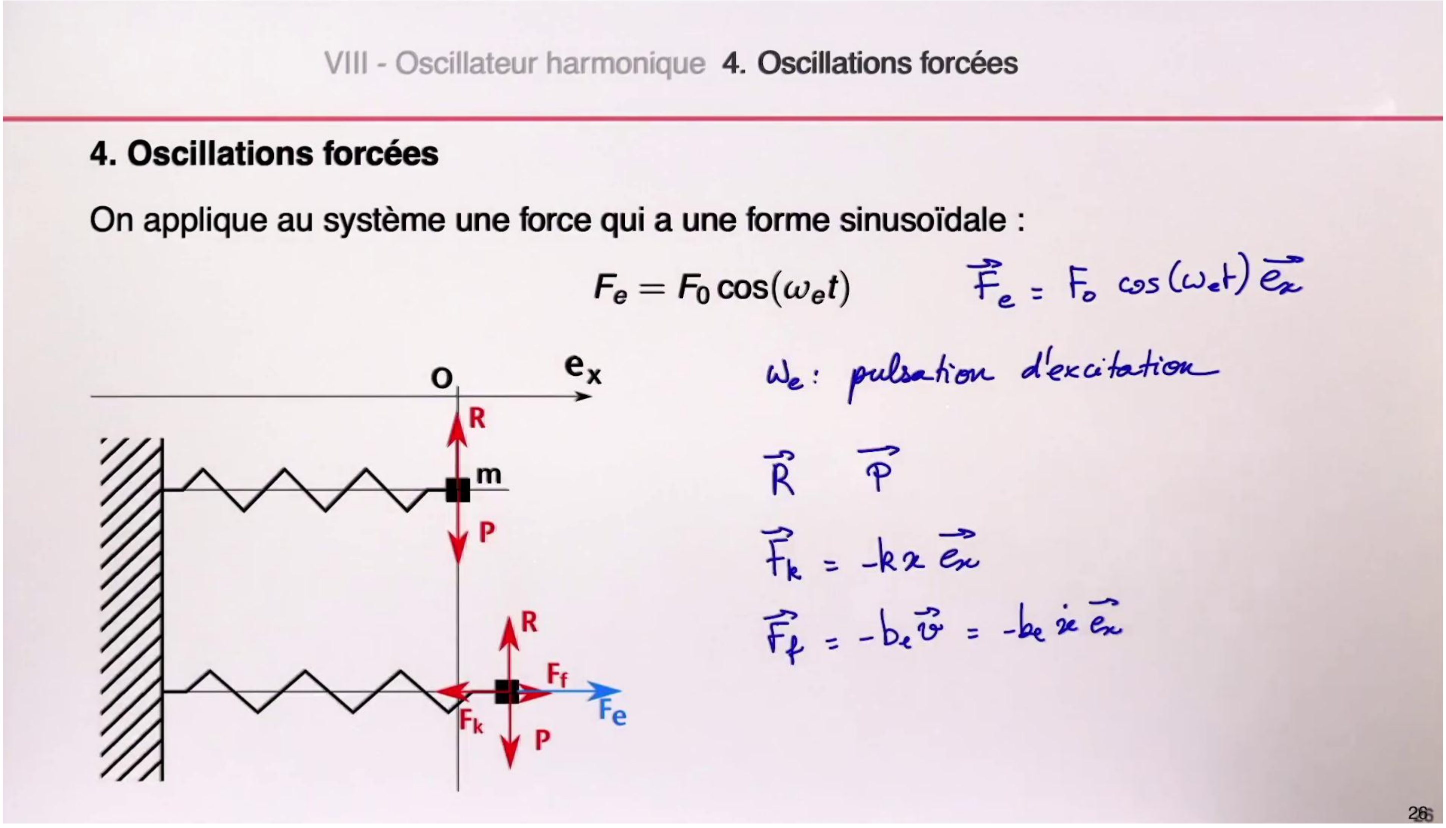



Nous sommes dans le chapitre 8, sur l'oscillateur harmonique et nous allons voir les oscillations forcées.

Notes

Summary

0m 48s

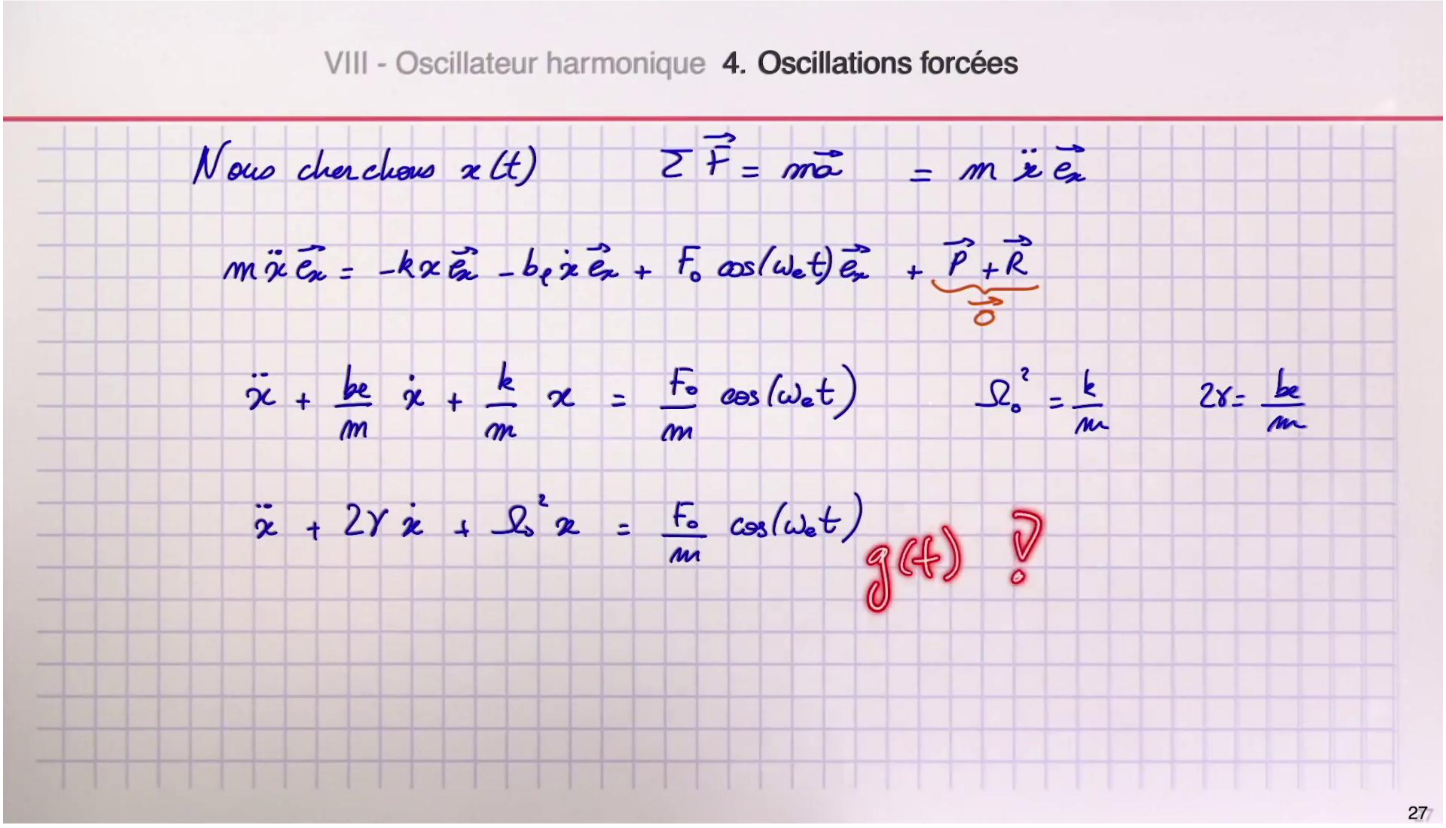



Nous allons utiliser un oscillateur modèle. Nous reprenons le même oscillateur que précédemment, mais cette fois, on applique au système, qui est la masse m, une force qui a une forme sinusoïdale. C'est donc une fonction $F_0\cos(\omega_e t)$. C'est une force externe que l'utilisateur applique au système, et c'est donc l'utilisateur qui choisit $\omega_e$. En gros, j'ai un système qui peut déjà naturellement osciller. Si je le laisse osciller tout seul, il aura une certaine pulsation, et moi, utilisateur, je lui imprime une force périodique, qui a une pulsation différente. Vectoriellement, la force appliquée par l'utilisateur est $F_e = F_0\cos(\omega_e t)\bar{e}_x$. $\Omega_e$ est la pulsation d'excitation. Les autres forces appliquées sur le système n'ont pas changé. Il y a toujours la réaction du support et le poids, ainsi que la force de rappel du ressort $Fk = -kx\bar{e}_x$ et la force de frottement qui vaut $-blv$, soit $-bl\dot{x}\bar{e}_x$.

Notes

Summary

0m 56s




La démarche n'a pas changé, nous cherchons x(t). Pour cela, nous appliquons les lois de Newton afin de trouver l'équation différentielle. L'accélération étant $\ddot{x}e_x$, nous avons, somme des forces égale $m\ddot{x}\bar{e}_x$. Nous obtenons donc $m\ddot{x}\bar{e}_x = -kx\bar{e}_x - bl\dot{x}\bar{e}_x + F_0\cos(\omega_e t)\bar{e}_x + P + R$. P + R au 0. Je vais projeter cette équation sur $\bar{e}_x$, divisé par m et passer ces deux termes de l'autre côté. J'obtiens donc $\ddot{x}$ + bl/m $\dot{x}$ + k/m x = $F_0$/m $\cos(\omega_e t)$. Avec les mêmes notations que précédemment, $\Omega_0^2$ = k/m, 2Ɣ = bl/m. Mon équation différentielle devient donc $\ddot{x}$ + 2Ɣ$\dot{x}$ + $\Omega_0^2$x = $F_0$/m $\cos(\omega_e t)$ Cette équation différentielle ressemble à celle de l'oscillateur amorti. La différence, c'est que le second membre dans l'oscillateur amorti valait 0. Ici, le second membre est une fonction du temps.

Notes

Summary

2m 18s

Nous cherchons $x(t)$ $\quad \sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\,\vec{e}_x$

$$m\ddot{x}\,\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x - b_e\dot{x}\,\vec{e}_x + F_0\cos(\omega_e t)\,\vec{e}_x + \underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{\vec{0}}$$

$$\ddot{x} + \frac{b_e}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t) \qquad \Omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad 2\gamma = \frac{b_e}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t)$$

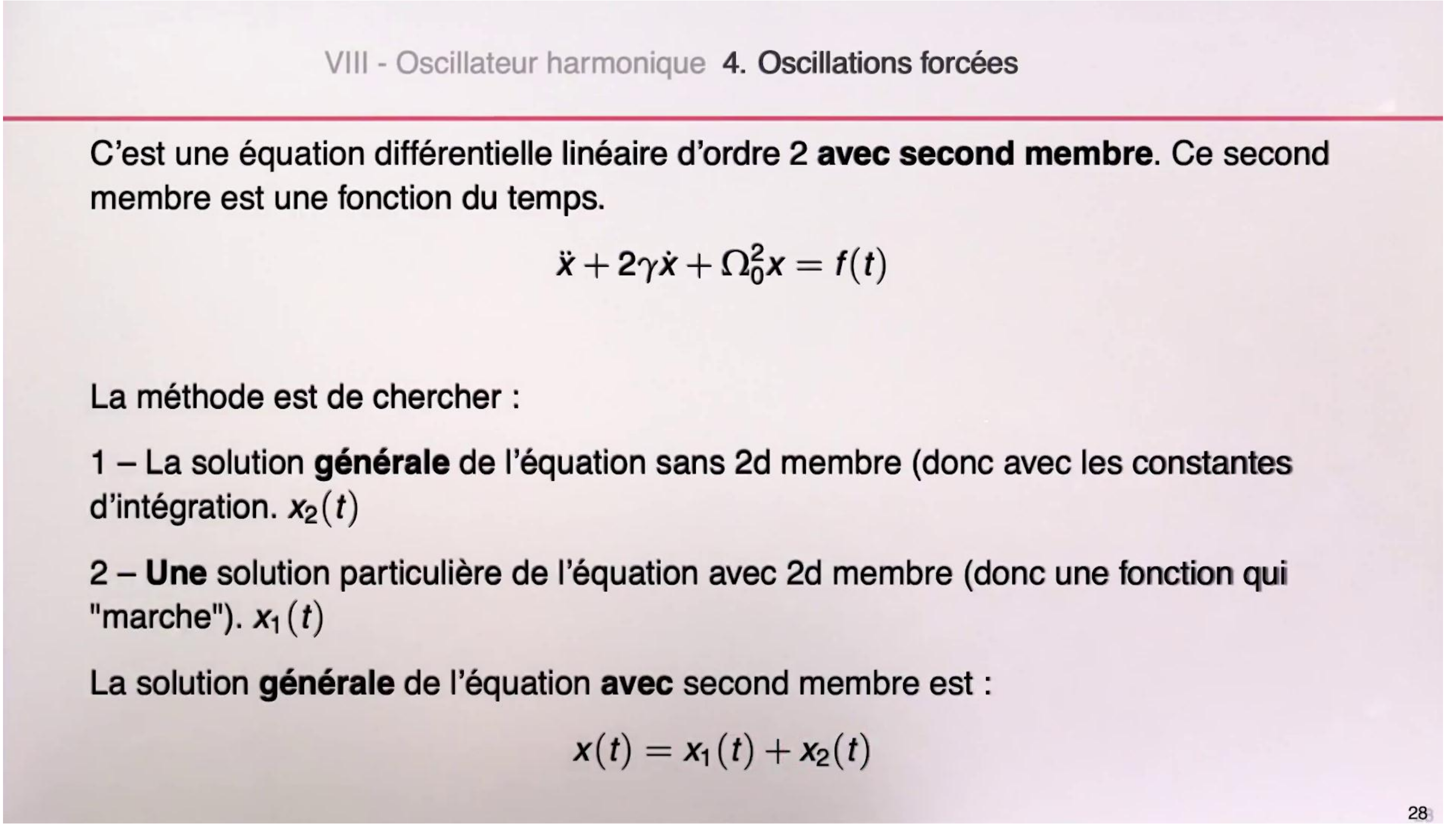
27

À nouveau, je vais vous demander d'admettre la méthode de résolution de telles équations.

Notes

Summary

3m 47s

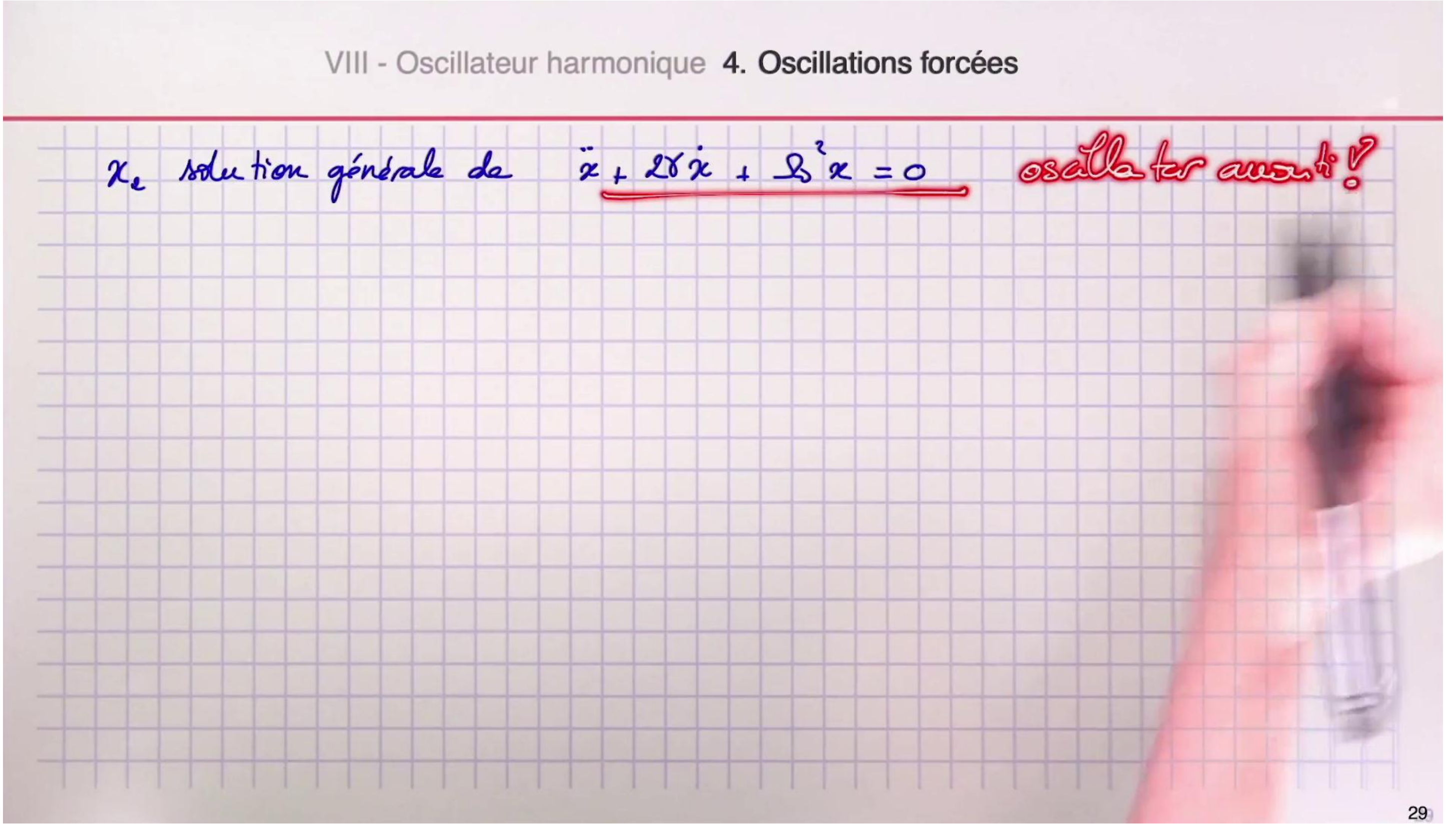



C'est donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre. Ce second membre est une fonction du temps. La méthode pour résoudre une telle équation est de chercher d'abord la solution générale de l'équation sans second membre. Cela revient à remplacer f(t) par 0. Puisque c'est la solution générale, on trouvera une solution avec les constantes d'intégration. Nous l'appellerons $x_2$. $x_2(t)$ répond donc à l'équation $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$. Ensuite, nous devons chercher une solution particulière de l'équation avec second membre. Donc, en gros, il nous suffira de trouver une seule fonction particulière qui répond à cette équation différentielle. Pas besoin de les chercher toutes avec les constantes d'intégration. C'est une fonction qui « marche ». Nous l'appellerons $x_1(t)$. Alors, solution générale de l'équation avec second membre, donc de cette équation totale là, est la somme des deux solutions précédentes $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. En gros, $x_1$ nous permet de remplir la condition égal f(t), et $x_2$ va avoir les constantes d'intégration. Une fois cette solution trouvée, nous pouvons chercher les constantes d'intégration avec les conditions initiales. Il ne faut surtout pas le faire seulement avec $x_2$. Nous allons donc, dans le cas particulier de notre oscillateur forcé, chercher $x_1$ et $x_2$.

Notes

Summary

3m 53s

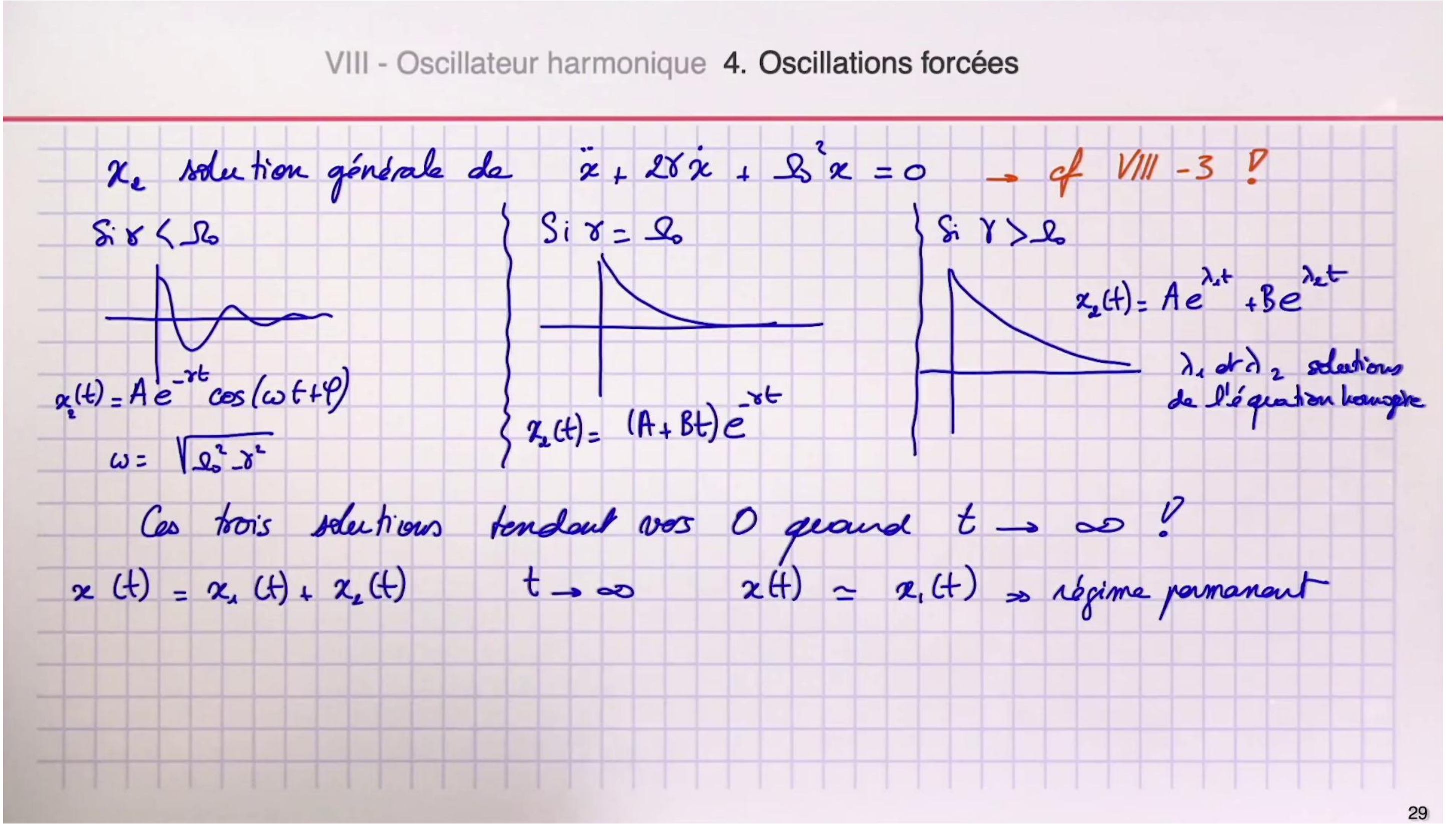



Commençons par $x_2$. $x_2$ est donc la solution générale de l'équation sans second membre. Mais c'est la solution amorti.

Notes

Summary

5m 42s

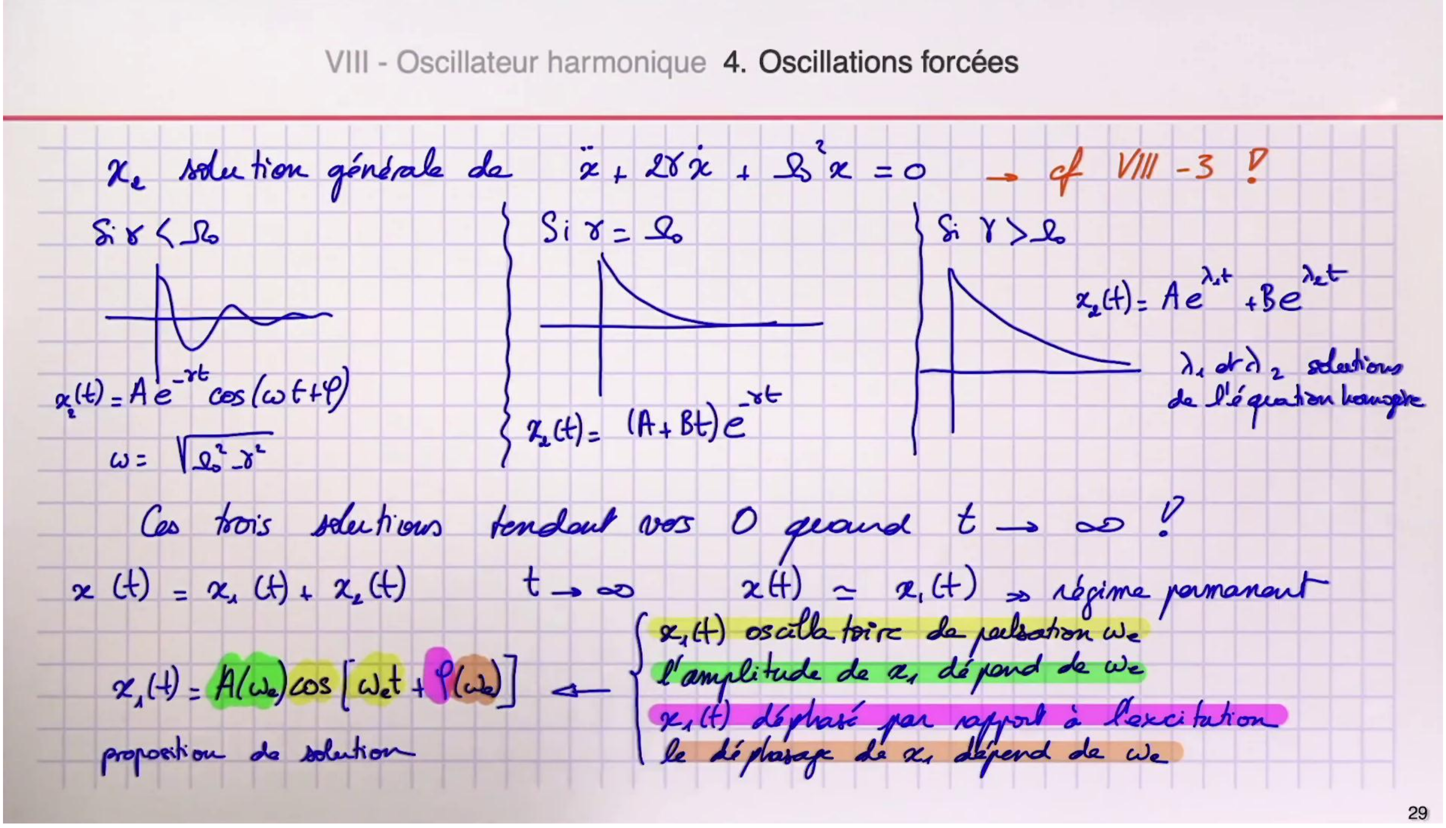



Je vous renvoie au chapitre précédent. Nous avons déjà résolu cette équation différentielle. Nous avons trouvé trois cas. Si $\gamma < \Omega_0$, la solution est oscillante décroissante. Elle a la forme $x_2 = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t+\varphi)$, avec $\omega$ = racine carré $\Omega_0^2 - \gamma^2$. Si $\gamma = \Omega_0$, nous sommes dans le régime critique. La solution est de la forme $x_2(t) = (A+Bt)e^{-\gamma t}$. Si $\gamma > \Omega_0$, nous avons une décroissance moins rapide, mais toujours une décroissance, et une fonction de la forme $x_2(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, avec $\lambda_1$ et $\lambda_2$, solution de l'équation homogène. Ces trois solutions ont un point commun. Lorsque t tend vers l'infini, elles tendent vers zéro. Elles sont toutes décroissantes vers zéro. Cela signifie que si je reprends ma solution $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, pour t tendant vers l'infini, donc t assez grand, x(t) va devenir à peu près égal à $x_1(t)$. Lorsqu'on a attendu assez longtemps, la solution n'est plus que la solution particulière. C'est ce qu'on appelle le régime permanent. Nous pouvons donc faire des expériences qui nous permettent d'observer l'évolution de x(t) avec le temps, et regarder à quoi ressemble x(t) quand t tend vers l'infini. Ces observations nous donnent quatre caractéristiques.

Notes

Summary

6m 00s

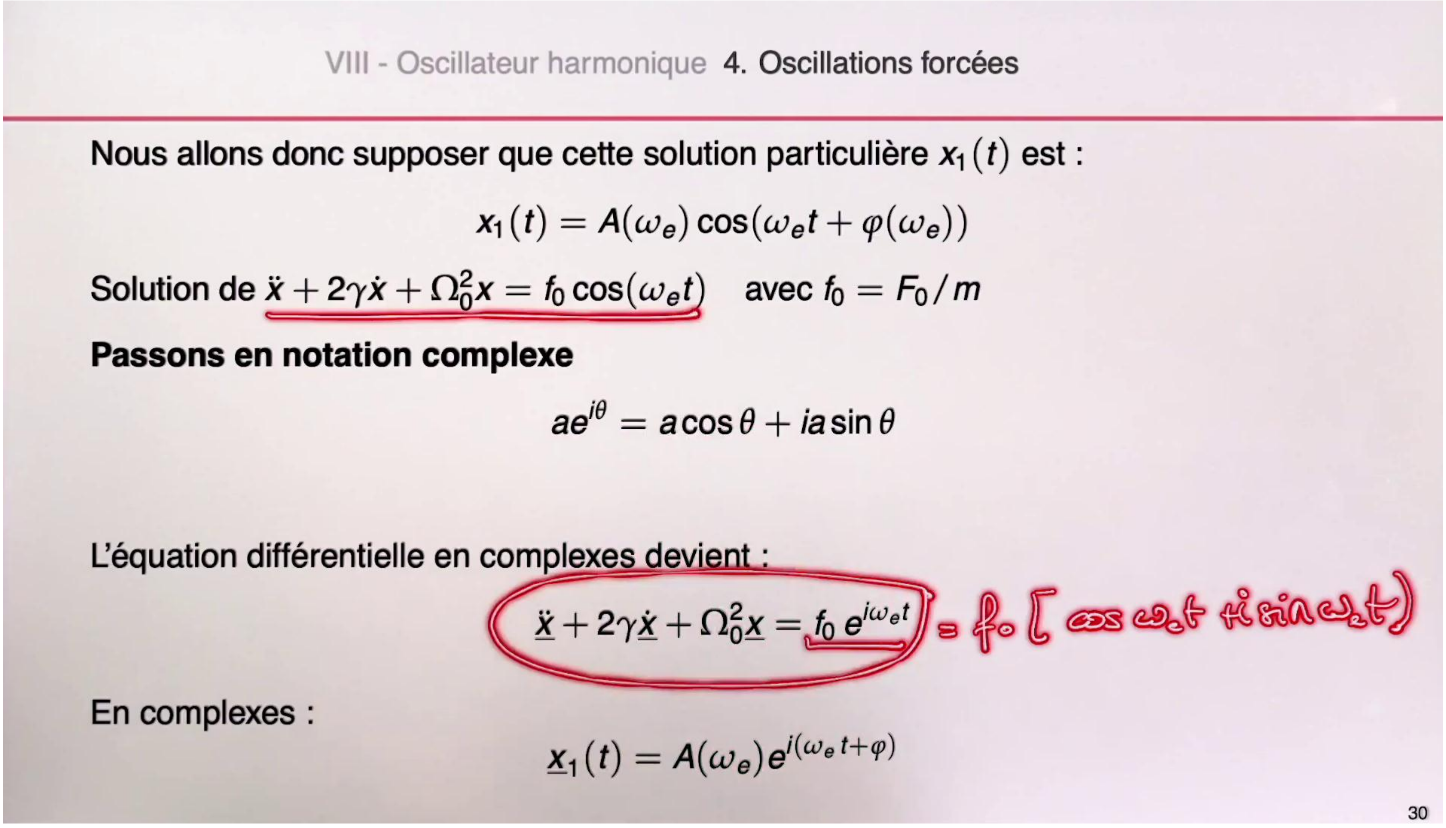



$x_1(t)$ est une solution oscillatoire de pulsation $\omega_e$. L'amplitude de $x_1$ dépend de $\omega_e$. $x_1(t)$ est déphasée par rapport à l'excitation. Le déphasage de $x_1$ dépend de $\omega_e$. Cela nous amène à proposer la forme suivante pour la solution $x_1(t)$ : $x_1(t) = A(\omega_e)\cos[\omega_e t] + \varphi(\omega_e)$ C'est donc une proposition. La condition $x_1(t)$ oscillatoire de pulsation $\omega_e$ est remplie par le fait qu'on a une fonction $\cos[\omega_e t]$. Le fait que l'amplitude de $x_1$ dépend de $\omega_e$ est remplie par le fait qu'on $A(\omega_e)$. $x_1(t)$ est déphasé par rapport à l'excitation. L'excitation était en $\cos[\omega_e t]$. Nous rajoutons le déphasage $\varphi$. Ce déphasage dépend de $\omega_e$. Nous avons donc $\varphi(\omega_e)$.

Notes

Summary

8m 18s

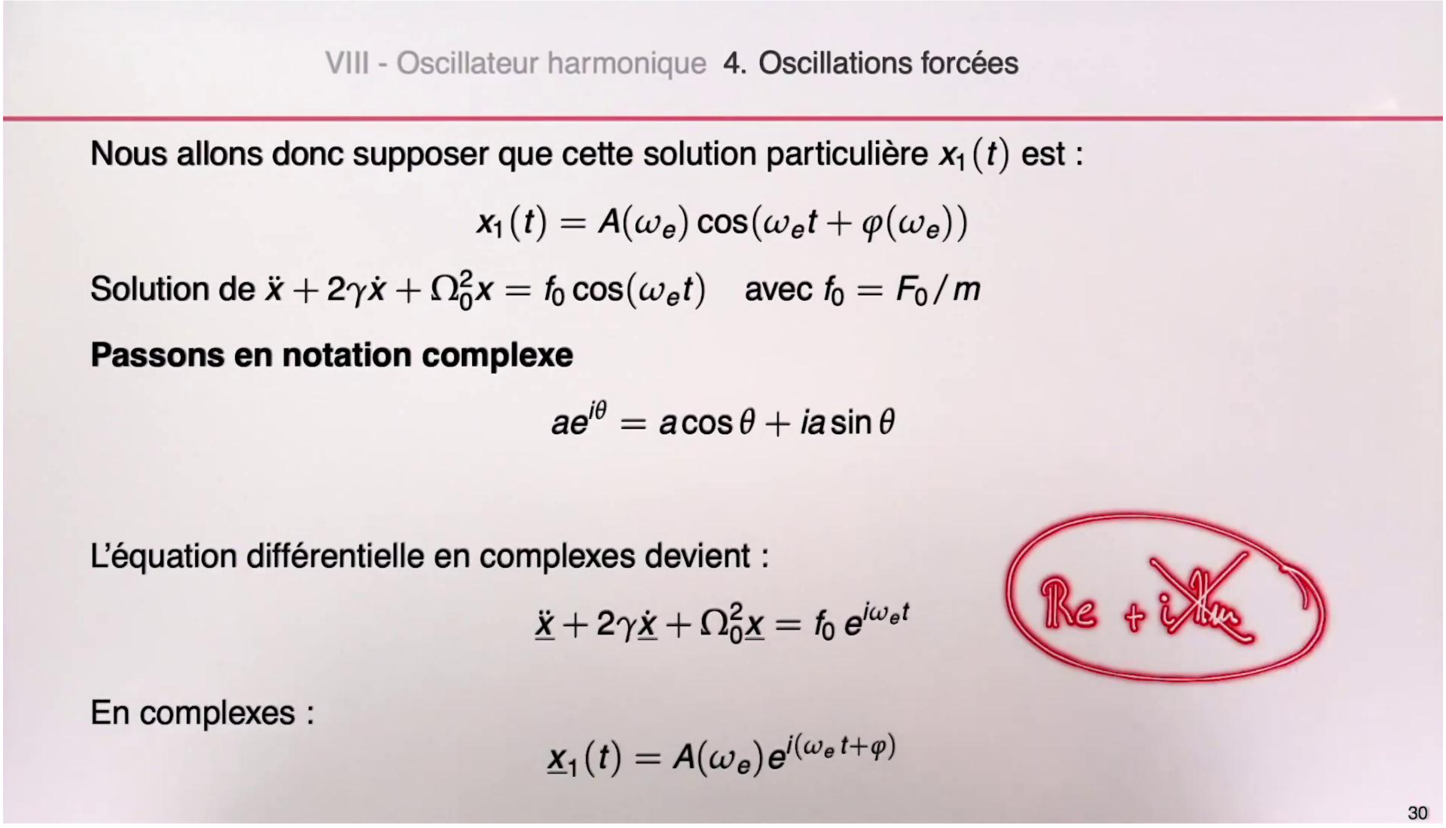



Nous allons donc supposer que la solution particulière $x_1(t)$ a la forme suivante, et qu'elle est solution de l'équation différentielle que nous voulons résoudre. Nous allons poser $f_0 = F_0/m$ par souci de simplification. Il sera beaucoup plus rapide de faire le calcul en complexe. En notation complexe, nous allons utiliser la notation de l'aire. Un complexe est noté avec son module et son argument. ae iθ est le nombre complexe de partie réelle acos(θ) et de partie imaginaire asin(θ). Nous avons donc ici acos(θ) pour la partie réelle, or, nous avons deux fonctions avec des cosinus. C'est ces cosinus que nous allons transformer en fonctions complexes en rajoutant tout simplement la partie imaginaire avec un sinus de la même fonction. L'équation différentielle en complexe devient donc la suivante : Nous avons x par x souligné dans toutes les parties de l'équation différentielle. Ce qui signifie que nous prenons maintenant une grandeur complexe. Le second membre devient $f_0$ei$\omega_e$t qui n'est rien d'autre que $f_0$[cos$\omega_e$t + isin$\omega_e$t]. La partie réelle des deux membres de cette équation différentielle correspond à l'équation différentielle réelle.

Notes

Summary

9m 36s




En notation complexe, on doit rajouter la partie imaginaire à la solution particulière. Celle-ci devient donc un $x_1(t)$ complexe $A(\omega_e)ei(\omega_e t+\varphi)$ En gros, qu'est-ce qu'on a fait ? On a une équation différentielle qui est réelle. Ce qu'on a tout simplement fait, c'est rajouter une partie imaginaire qui ne nous intéressera pas dans la solution physique, mais le fait d'avoir les deux ensemble rendra le calcul plus simple.

Notes

Summary

11m 16s

VIII - Oscillateur harmonique **4. Oscillations forcées**

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

Solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0\cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

**Passons en notation complexe**

$$ae^{i\theta} = a\cos\theta + ia\sin\theta$$

L'équation différentielle en complexes devient :

$$\underline{\ddot{x}} + 2\gamma\underline{\dot{x}} + \Omega_0^2\underline{x} = f_0\, e^{i\omega_e t}$$

En complexes :

$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)e^{i(\omega_e t + \varphi)}$$

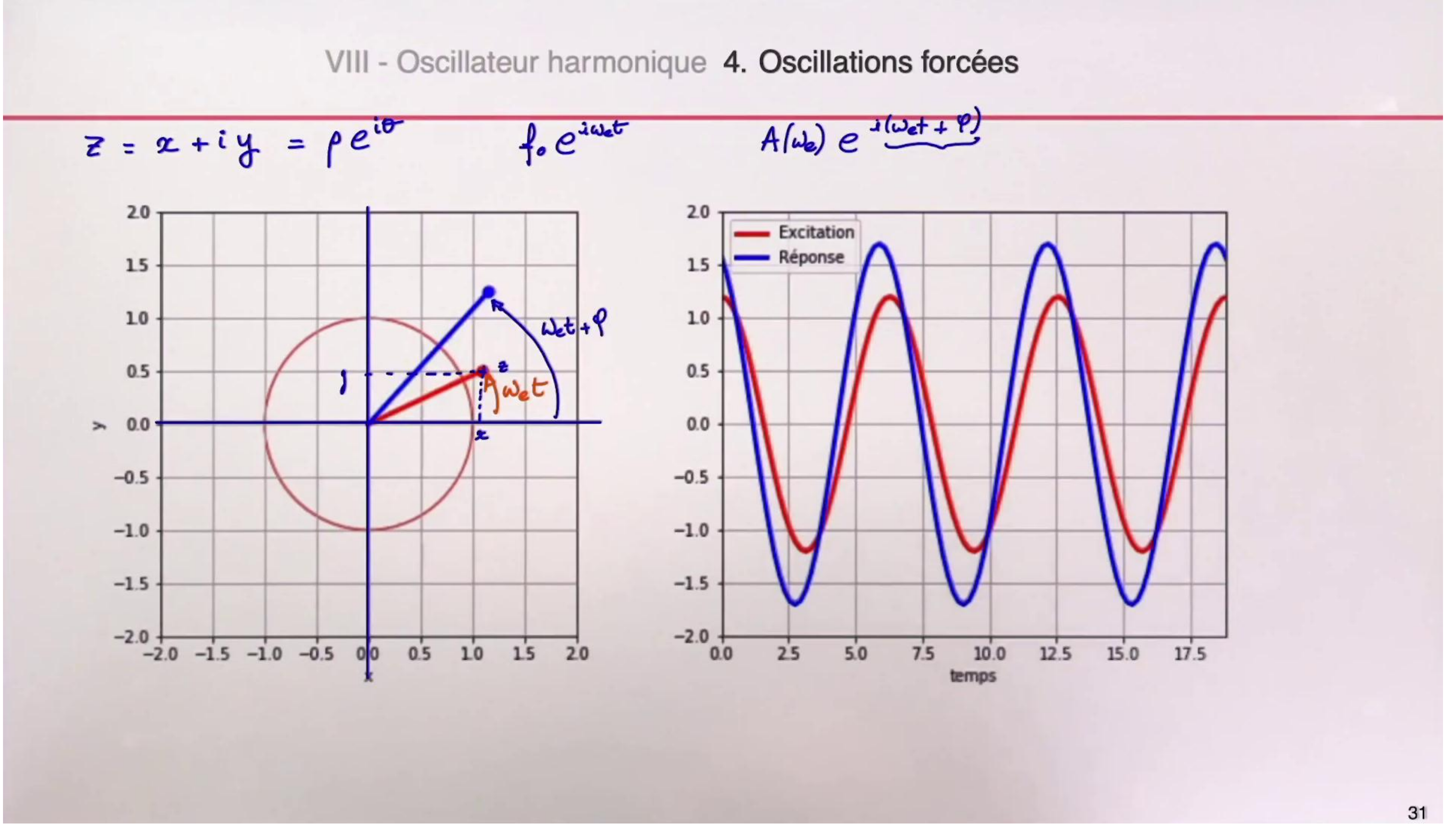
30

Avant de continuer, je voudrais regarder avec vous ce que signifie ce déphasage φ en complexe rajouté ici angle.

Notes

Summary

11m 51s

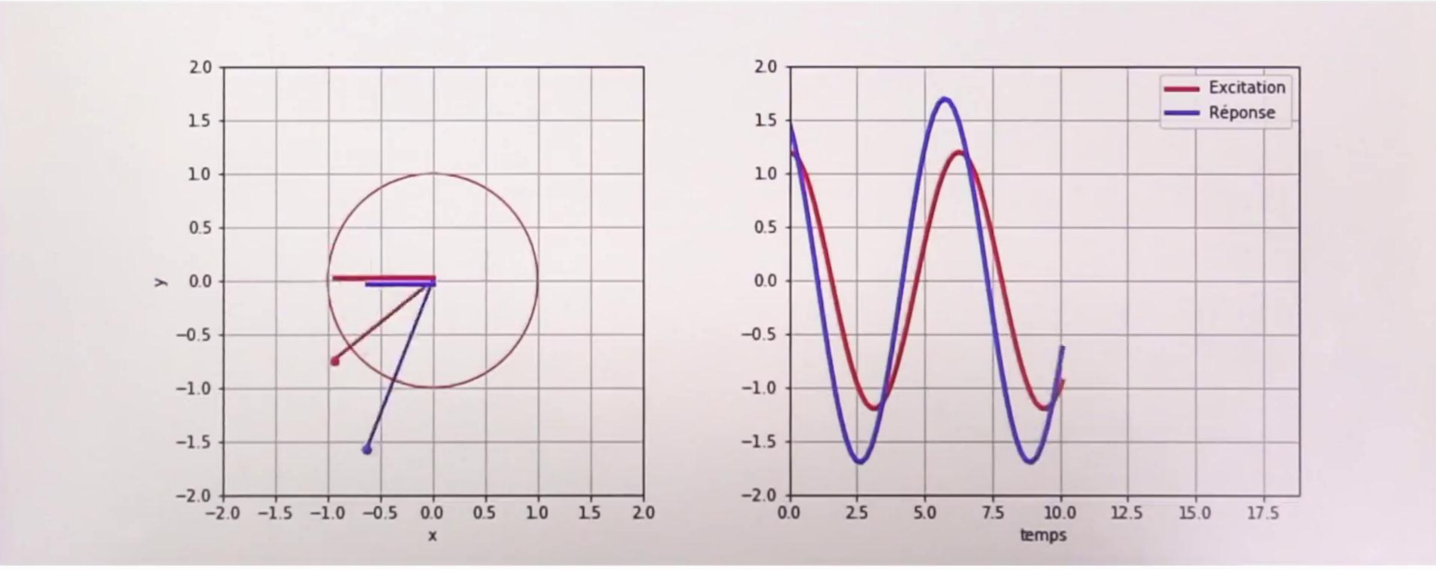



La notation de l'aire des complexes a la même logique que les coordonnées polaires par rapport aux coordonnées cartésiennes. Un complexe Z peut être séparé en parties réelles x + i fois la petie imaginaire y. Avec cela, il est possible de le représenter dans le plan complexe à l'aide des coordonnées x et y. Nous avons le complexe Z. L'axe du x est appelé l'axe réel et l'axe de y, l'axe imaginaire. Nous pouvons représenter le même complexe à l'aide de la longueur du segment et de l'angle ϴ. On utilise pour cela la notation de l'aire ρeiϴ. Dans le cas de notre oscillateur, nous avons deux grandeurs complexes. L'excitation qui est la forme $f_0$ exponetielle i$\omega_e$ fois t. Je l'ai représentée ici en rouge. L'angle avec l'axe ox est donc l'angle $\omega_e$t. La réponse a une forme A($\omega_e$) exponentielle i($\omega_e$t + φ). Elle est donc située à un angle avec ox, qui est $\omega_e$t + φ. Lorsque t augmente, ce point va décrire dans le plan complexe un cercle de rayon $f_0$. Ce point ici va décrire un cercle de rayon A($\omega_e$). La distance angulaire entre les deux segments sera tout le temps Φ. Regardons ce qui se passe avec une animation.

Notes

Summary

12m 00s



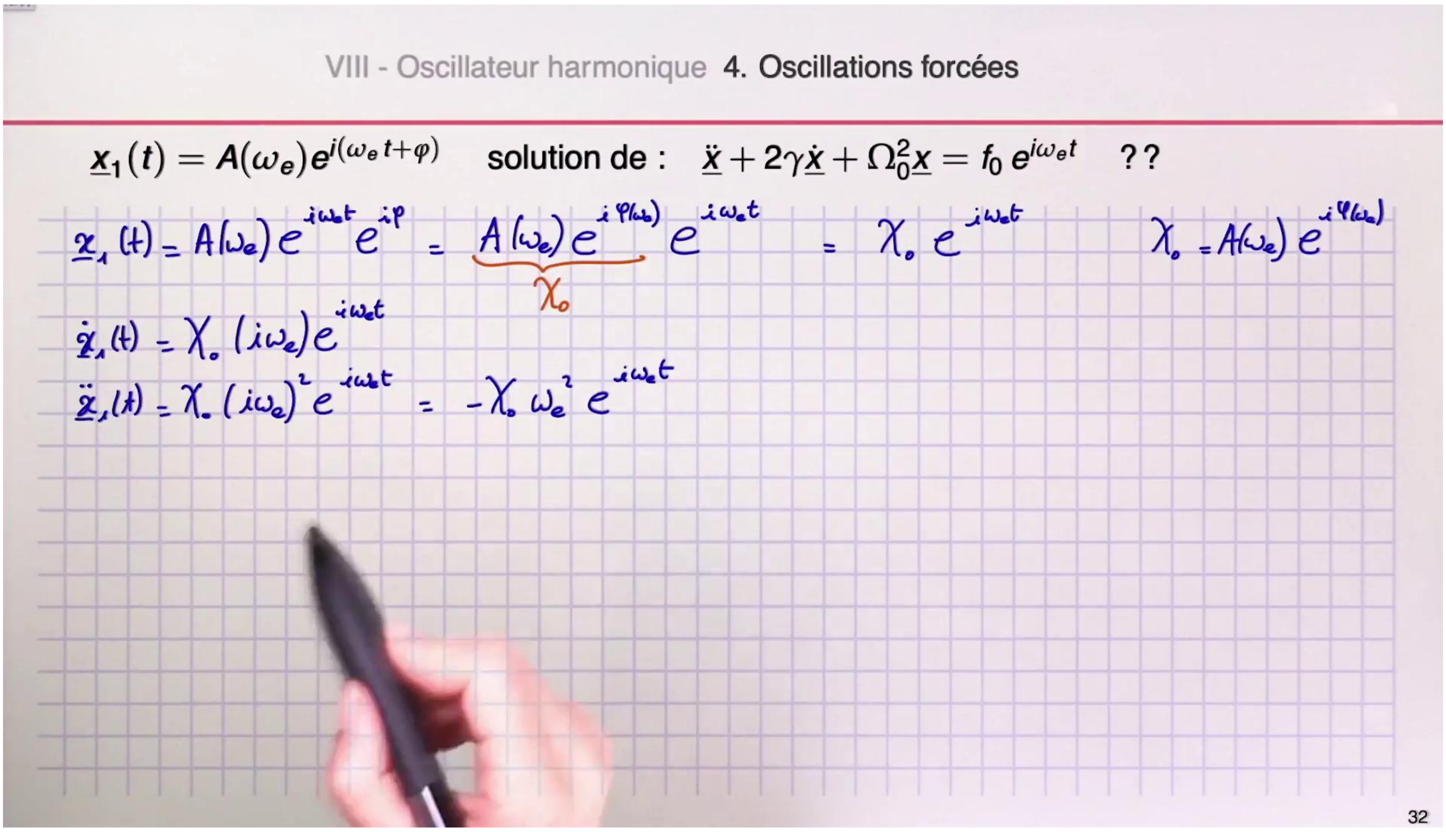

31

Lorsque t augmente, l'excitation et la réponse décrivent donc le cercle avec un mouvement uniforme. La réponse est toujours située en avance de φ par rapport à l'excitation. Mais les grandeurs physiques qui nous intéressent sont les parties réelles. Ce sont les composantes de ces nombres complexes sur l'axe des réels. Elles ont donc les valeurs des deux segments représentés, projetés ici, au fur et à mesure que le temps évolue. Si nous faisons une représentation en fonction du temps de ces deux sinusoïdes, nous voyons deux courbes cosinus décalées del'angle φ. Dans la représentation temporelle, on a l'impression que la courbe rouge est devant la courbe bleue. Pourtant, c'est la courbe bleue qui est en avance de phase devant la courbe rouge.

Notes

Summary

14m 10s

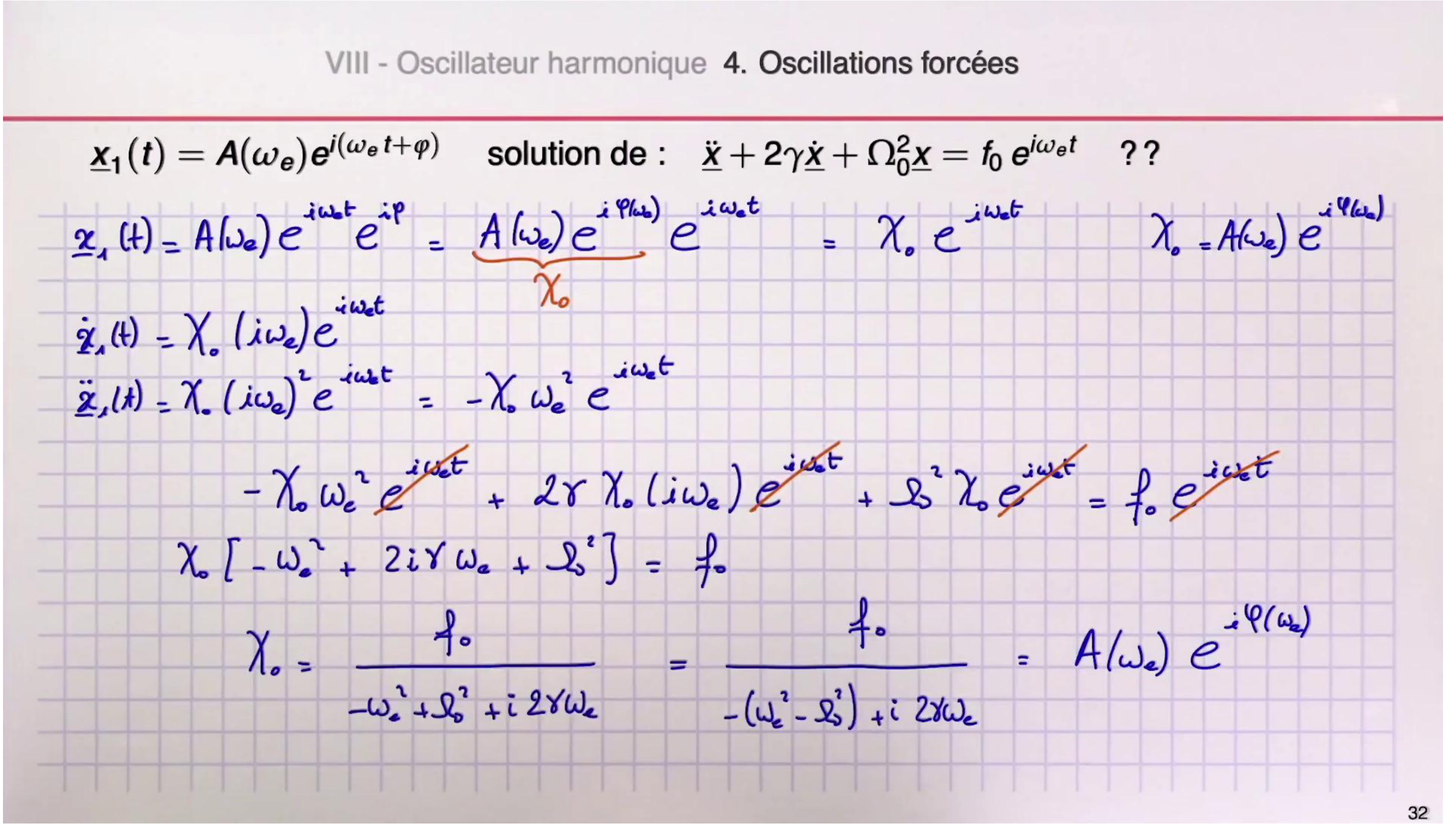



Ce qui vous reste à faire maintenant, c'est de vérifier que cette fonction complexe est bien solution de cette équation différentielle complexe, et de voir ce que nous obtenons pour A et φ, qui doit être aussi un φ de $\omega_e$, même si c'est omis. Je vais commencer par réécrire $x_1$. C'est $A(\omega_e)$ exponentielleiω$_e$ exponentielleiφ. Je peux donc grouper $A(\omega_e)$ exponentielleiφ ($\omega_e$), et avoir ensuite exponentielle i$\omega_e$ fois t. J'ai séparé ma fonction $x_1$ en deux morceaux. Un morceau que je vais appeler $Q_0$, et qui ne dépend pas du temps, et un deuxième morceau qui, lui, dépend du temps. $Q_0$ est un complexe qui s'écrit $A(\omega_e)$exponentiellei $\varphi(\omega_e)$. Il a donc comme module l'amplitude que je cherche pour $x_1$, et comme argument le déphasage que je cherche. Le but va donc être de déterminer $Q_0$. Par ailleurs, écrit sous cette forme là, calculer la dérivée première et la dérivée seconde de $x_1$ sera très facile. $\dot{x}_1(t)$ souligné est donc égal à $Q_0$, qui ne dépend pas du temps, (iωe) exponentielle iωe fois t. $\ddot{x}_1$, la dérivée seconde, en fonction du temps, est égale à $Q_0$ (iωe²) exponentielle iωe t. C'est donc égal à moins $Q_0$(iωe²) exponentielle iωe fois t. Je peux donc maintenant introduire $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $\ddot{x}_1(t)$ dans l'équation différentielle.

Notes

Summary

15m 29s

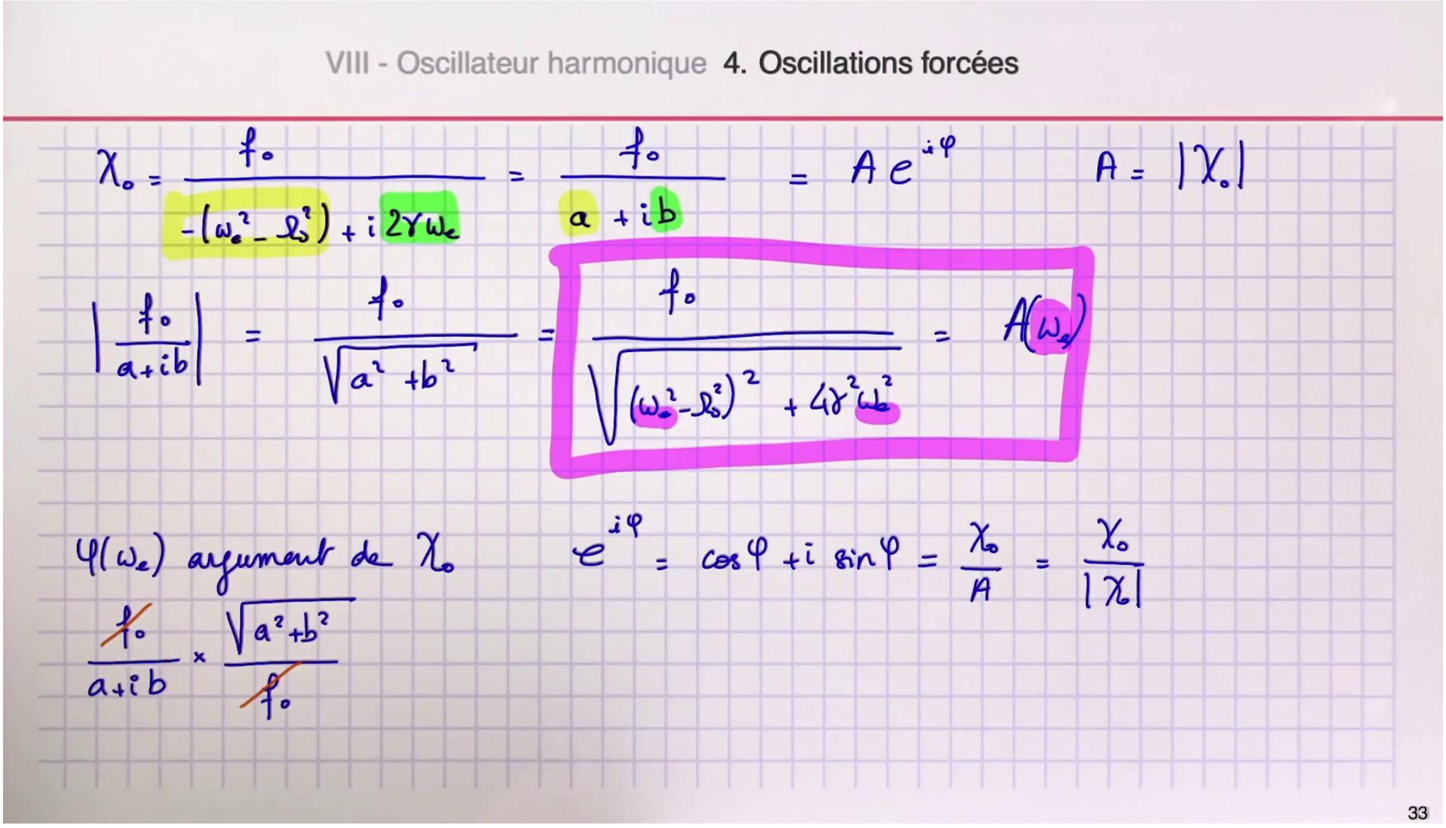



C'est là qu'on voit l'avantage de la notation complexe. Je peux maintenant simplifier exponentielle iωet qui est en facteur de tous les termes. J'obtiens donc $Q_0$ [ωe$^2$ + 2 iɣωe + ω0$^2$ = $f_0$. Or, je rappelle $Q_0$ est la fonction que je cherche. Mais là, je vais le trouver facilement. Je n'ai qu'à diviser $f_0$ par ce facteur. Je vais aussi regrouper les termes réels d'un côté, et les termes imaginaires de l'autre. Cela me donne $Q_0$ = $f_0$ /-ωe$^2$ + ω0$^2$ + i fois 2ɣωe. Nous le noterons en mettant un moins en facteur dans la partie réelle. C'est donc égal à A(ωe) exponenetielle iφ(ωe). J'ai là un complexe exprimé avec son module et son argument, et une deuxième fois avec des parties un petit peu réelles, et une partie imaginaire, mais au dénominateur. Le but va être maintenant d'exprimer le module et l'argument en fonction de $f_0$ ωe et Ω0 ainsi que ɣ.

Notes

Summary

18m 00s

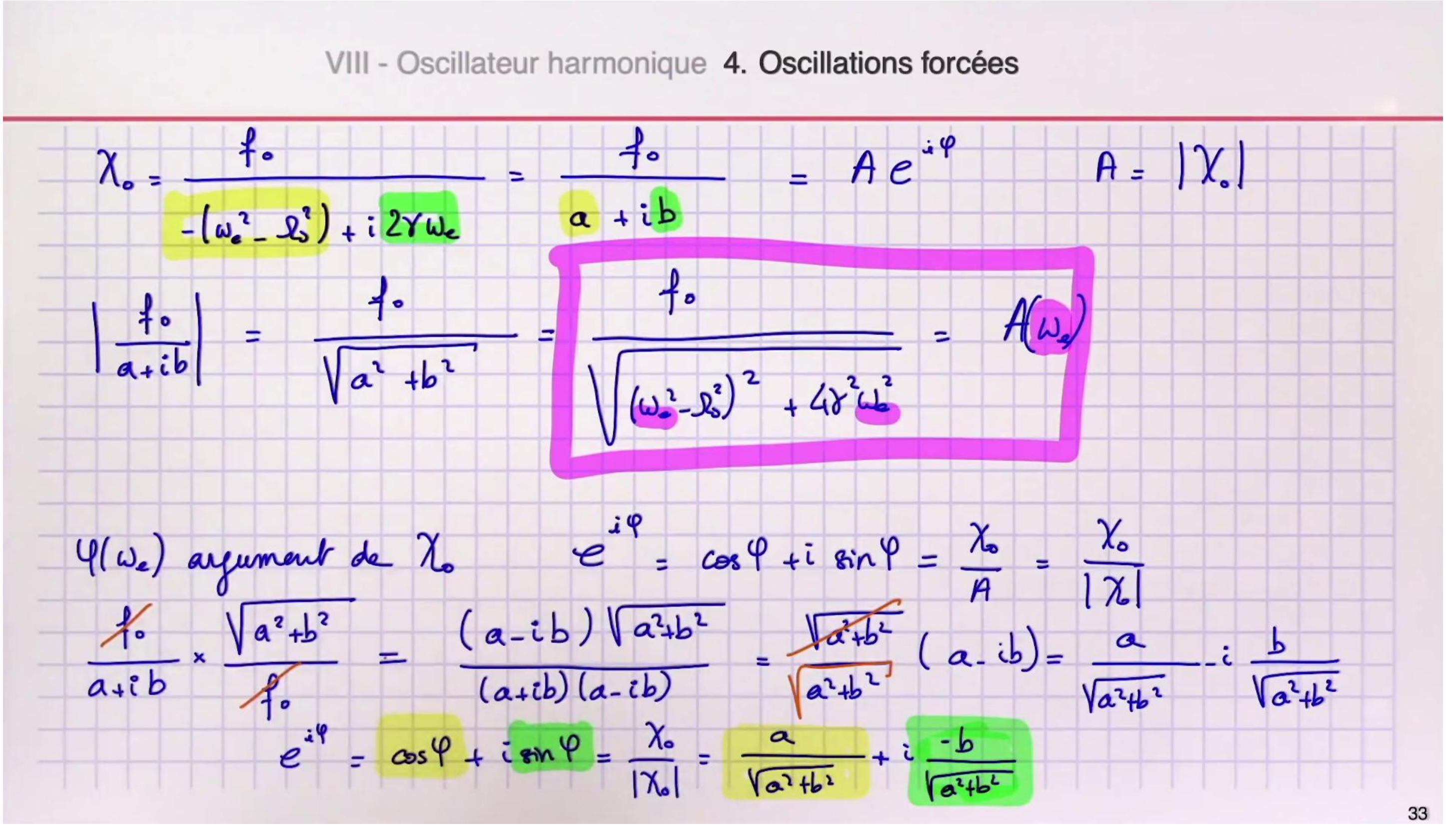



Je réécris mon $Q_0$ et je vais le simplifier sous la forme $f_0$/a+ib. Dans cette écriture, $a = (\omega e^2 - \omega 0^2)$ et $b = 2Ɣ\omega e$. C'est aussi A exponentielle i φ, et je cherche A. A est le module de $Q_0$. Je vais donc chercher à calculer le module de $f_0$/a+ib. $f_0$ étant déjà réel, son module est $f_0$. Le module de a+ib, c'est racine carrée de $a^2 + b^2$. Réécris en exprimant complètement a et b, j'obtiens $f_0$ sur racine carrée de $a^2$, c'est donc $\omega e^2 - \omega 0^2$, le tout au carré, et $b^2$, c'est $4Ɣ^2 - \omega 0^2$. J'ai ici remplacé a par son expression et b par son expression. J'ai donc trouvé A(ωe). J'ai été capable de trouver une expression de l'amplitude, qui est effectivement une fonction de ωe. Le reste des grandeurs étant des constantes du problème. Il me maintenant trouver φ(ωe), l'argument de $Q_0$. Exponentielle iφ, qui est égale à cosφ + isinusφ, n'est d'autre que $Q_0$ / A, 0 ou bien $Q_0$ / norme de $Q_0$. $Q_0$, c'est $f_0$ / a + ib. Et la norme de $Q_0$ est $f_0$ sur racine carré de $a^2 + b^2$. Lorsque je divise par la norme de $Q_0$, je vais donc multiplier par racine carré de $a^2 + b^2$/ $f_0$. Des $f_0$ se simplifient et j'ai besoin de faire passer l'expression complexe au numérateur. Je vais donc multiplier en haut et en par a - ib.

Notes

Summary

19m 42s

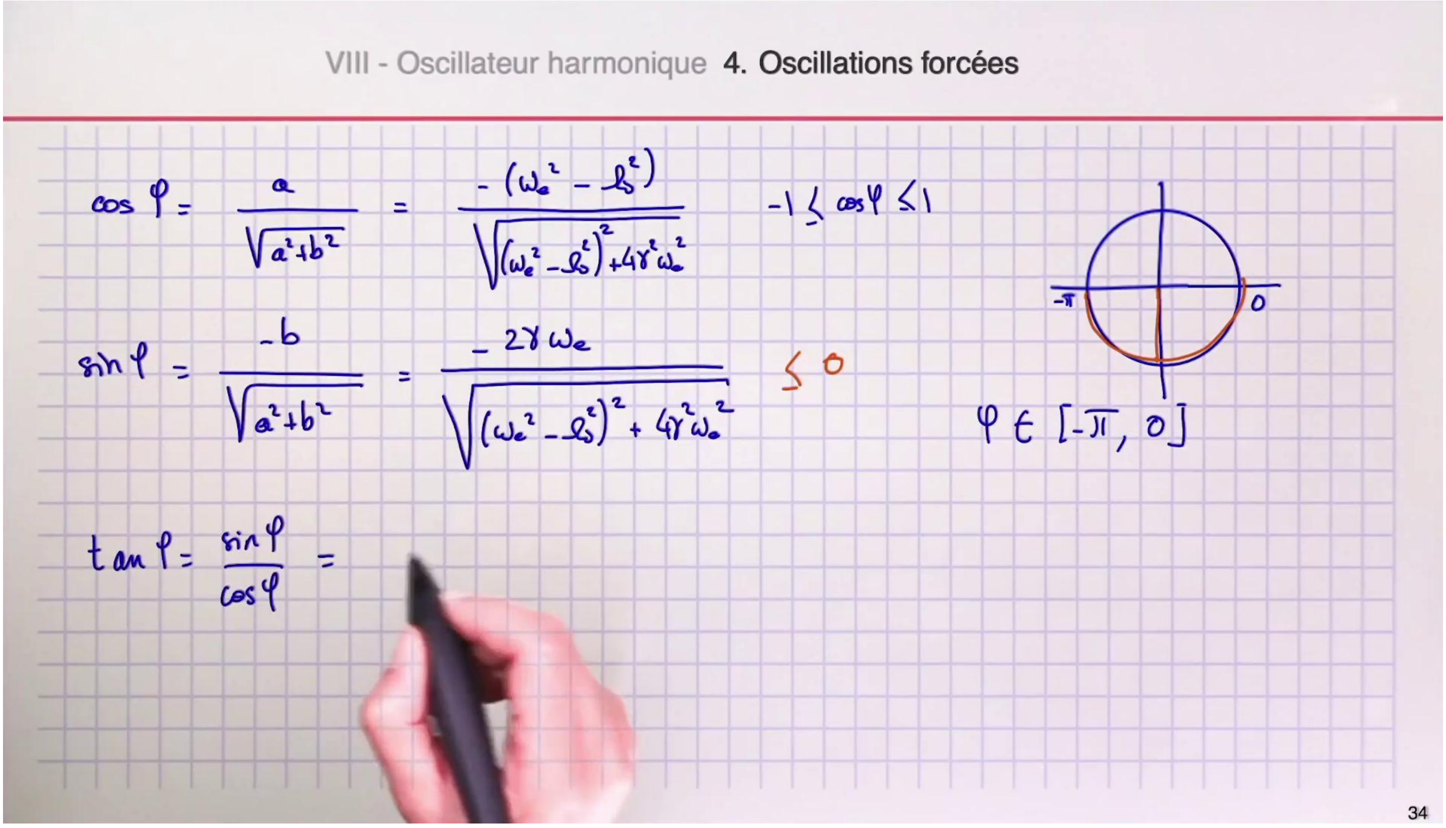



a + ib multiplié par a - ib est a² + b². J'obtiens donc racine carrée a² + b² / a² + b² facteur de a - ib. Je peux simplifier par une racine carrée de a² + b². J'ai donc séparé en a / racine carrée a² + b² - ib / racine carrée de a² + b². au final, j'ai donc exponentielle iφ cos, qui vaut cosφ + i sinφ, qui est égal $Q_0$ sur norme de $Q_0$, qui est égal à a sur racine carrée de a² + b² - ib sur racine carrée de a² + b² C'est donc + i, ici, avec a - b. Cela me permet de conclure que les parties réelles devant être égales, cosφ est égal à a sur racine carrée de a² + b², et sinφ doit être égal à -b / racine carré de a² + b².

Notes

Summary

22m 27s

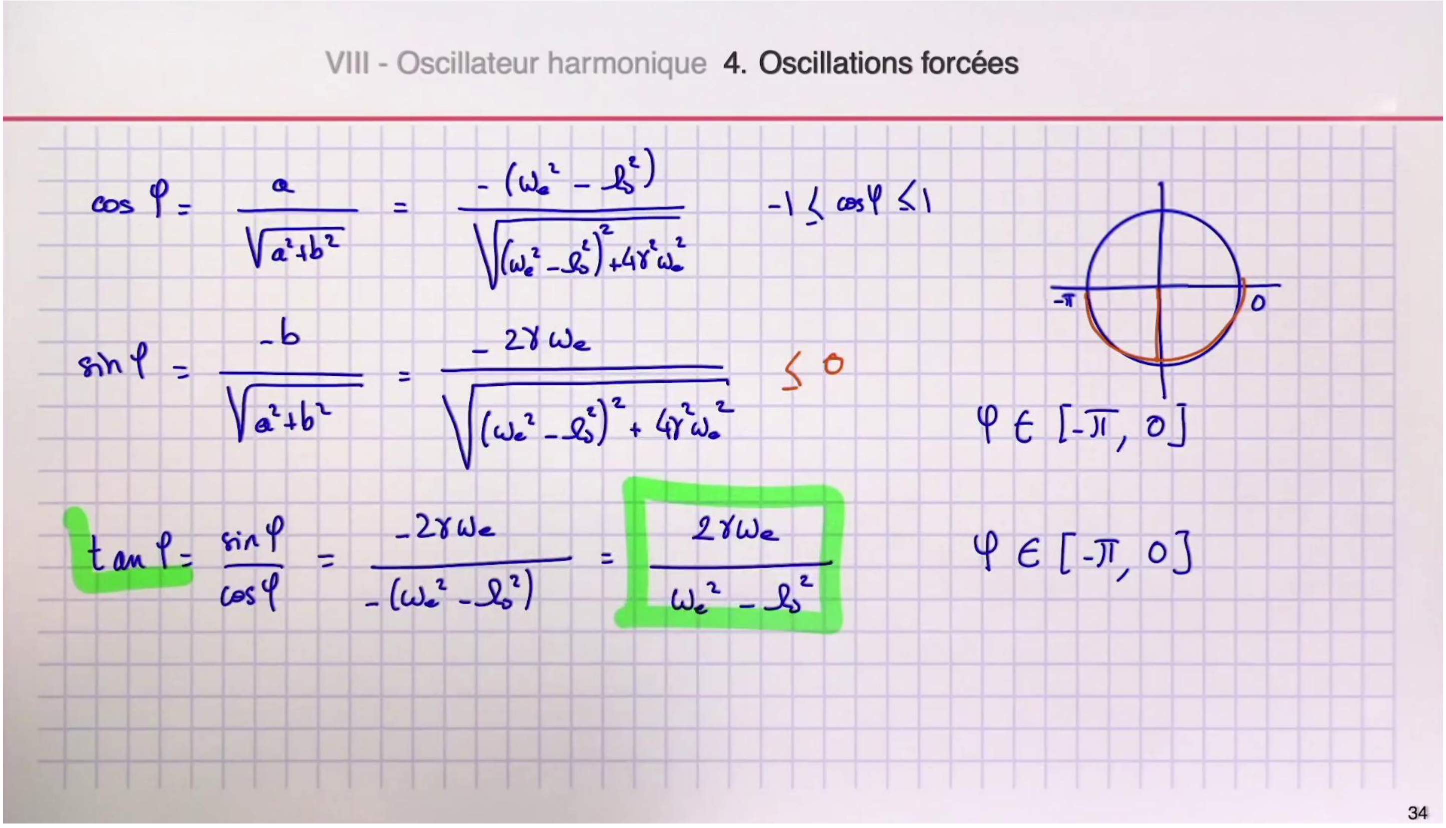



Je vais maintenant exprimer a et b, ce qui me donne cosφ égal $-\omega e - \omega 0^2$ sur racine carrée de $(\omega e - \omega 0^2) + 4Ɣ^2\omega e^2$. sinφ égal $-2Ɣ\omega e$ sur racine $(\omega e^2 - \omega 0^2)$ le tout au carré + $4Ɣ^2\omega e^2$. Ces deux expressions me permettent de déterminer φ sans ambiguïtés. Elles sont quand même assez horribles. Je vous passe l'étude de fonctions qui montre que cosφ, avec cette expression là, se situe entre -1 et 1. Nous allons juste constater que ωe est positif, Ɣ est positif, donc ce terme là est positif. La racine carrée est forcément positive, puisque, j'ai le - devant, sinφ est forcément négatif. Dans le cercle trigonométrique, cela veut dire que si je prends φ, dans l'intervalle −π+π, à priori, φ peut se déplacer entre −π et +π, mais le sinus devant être négatif, j'ai seulement la partie inférieure du cercle qui est acceptable. En conclusion, φ se situe entre −π et 0 pour garantir sinus Φ négatif. Puisque je sais maintenant dans quel demi cercle trigonométrique Φ se situe, je peux utiliser tangente φ. Tag Φ est égale à sinφ sur cosφ. Et cela va me permettre de simplifier les racines. Ces deux racines étant identiques, elles vont disparaître dans le calcul de la tangente. Il nous restera $-2Ɣ\omega e$ sur $-\omega e^2 - \omega 0^2$.

Notes

Summary

23m 50s

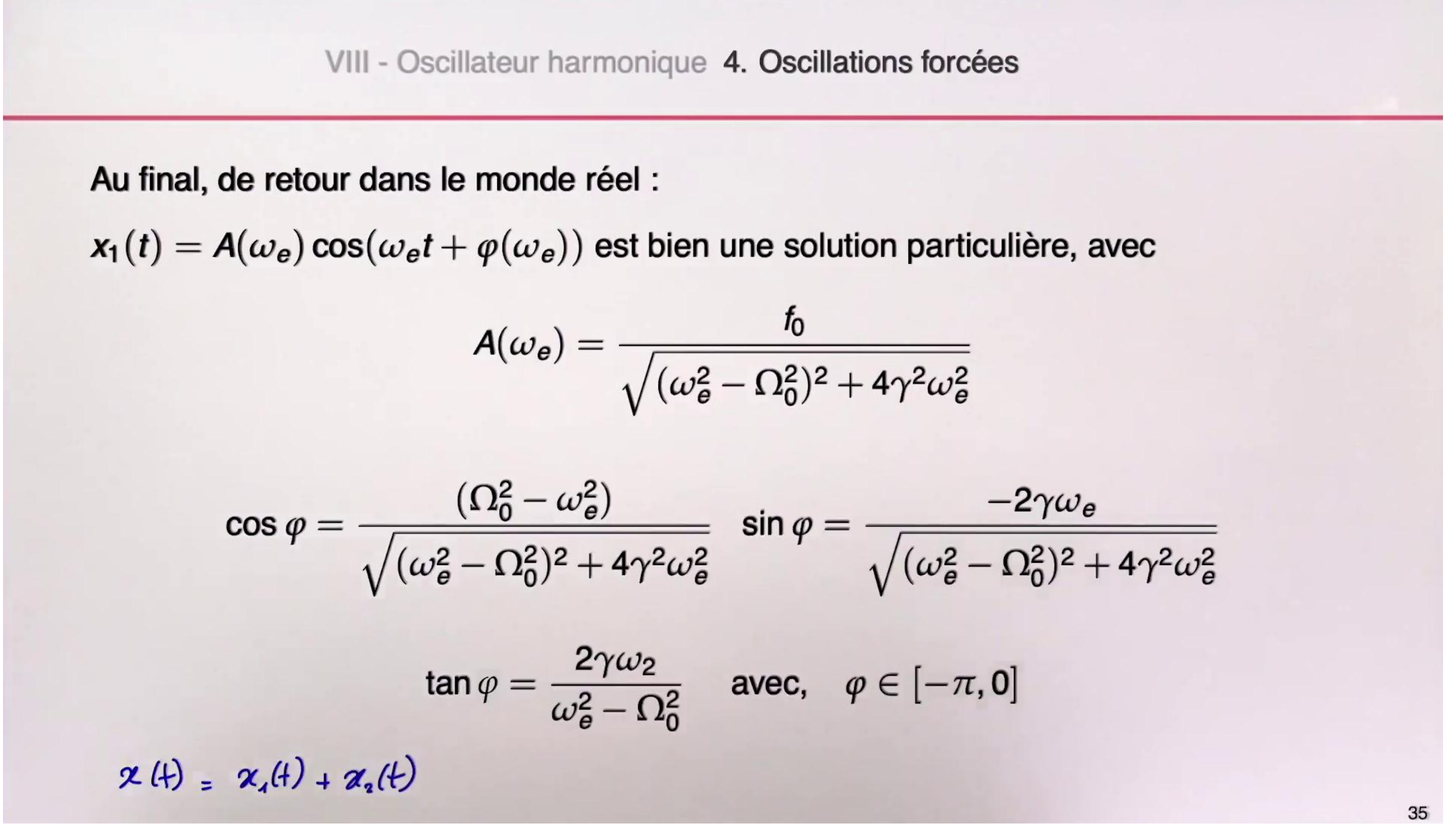



Soit 2Ɣωe sur ωe² moins ω0². Afin de trouver φ sans ambiguïté, je dois garder la contrainte φ entre −π et 0. Précédemment, j'avais trouvé A, qui est une fonction de ωe. Maintenant, j'ai trouvé φ, qui est aussi une fonction de ωe, grâce à l'expression de sa tangente. j'ai donc fini le travail.

Notes

Summary

26m 01s




A et φ sont réels, je n'ai pas de problème. De retour dans le monde réel. Je peux bien écrire que $x_1(t) = A(\omega e)\cos(\omega et + \varphi(\omega e))$. C'est bien une solution particulière de l'équation différentielle, à condition de prendre $A(\omega e)$ égal $f_0$ sur racine carrée de $(\omega e^2 - \omega 0^2)^2$, le tout au carré + $4Ɣ^2\omega e^2$. Et $\Phi^k$ définie par à la fois son cosinus et son sinus avec ces deux fonctions assez horribles, ou bien définie par sa tangente, une expression beaucoup plus simple, mais pour laquelle je dois avoir Φ entre −π et 0. La solution globale de l'équation différentielle sera donc toujours $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Il l'allure restera maintenant à analyser la duur des solutions que nous avons trouvées.

Notes

Summary

26m 33s

VIII - Oscillateur harmonique Video conclusion

Voilà, nous avons vu comment obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur forcé. C'était pas facile. La résolution nous a demandé un certain temps. Obtenu l'équation différent vous avez obtenu l'équation différentielle et qu'elle a la forme de celle que nous avons vue dans cette vidéo, vous avez parfaitement le.

Notes

Summary

27m 32s