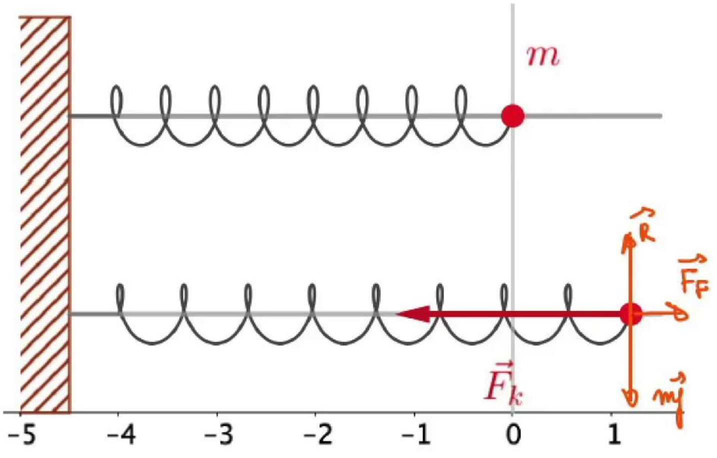
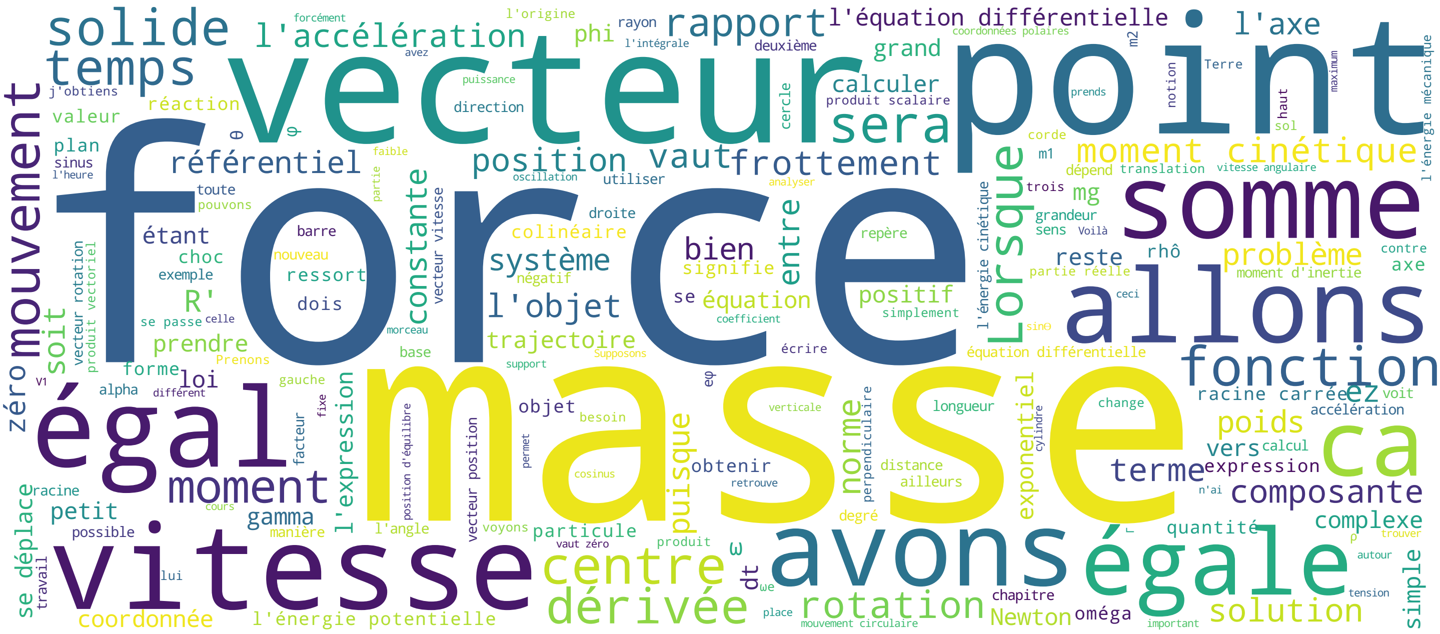


Oscillations amorties

Partie 1

Prof. Cécile Hébert



EPFL

Video

Dans cette vidéo, nous allons considérer avec notre oscillateur constitué d'un ressort et d'une masse. Mais cette fois, nous allons complexifier un petit peu le problème. Nous allons considérer que les oscillations s'amortissent au cours du temps. C'est-à-dire qu'une force de frottement agit sur le système qui, au bout d'un certain temps, finit par s'arrêter. Dans cette première vidéo, nous allons obtenir l'équation différentielle, puis la résoudre.

Notes

Summary

0m 05s

Plan du cours

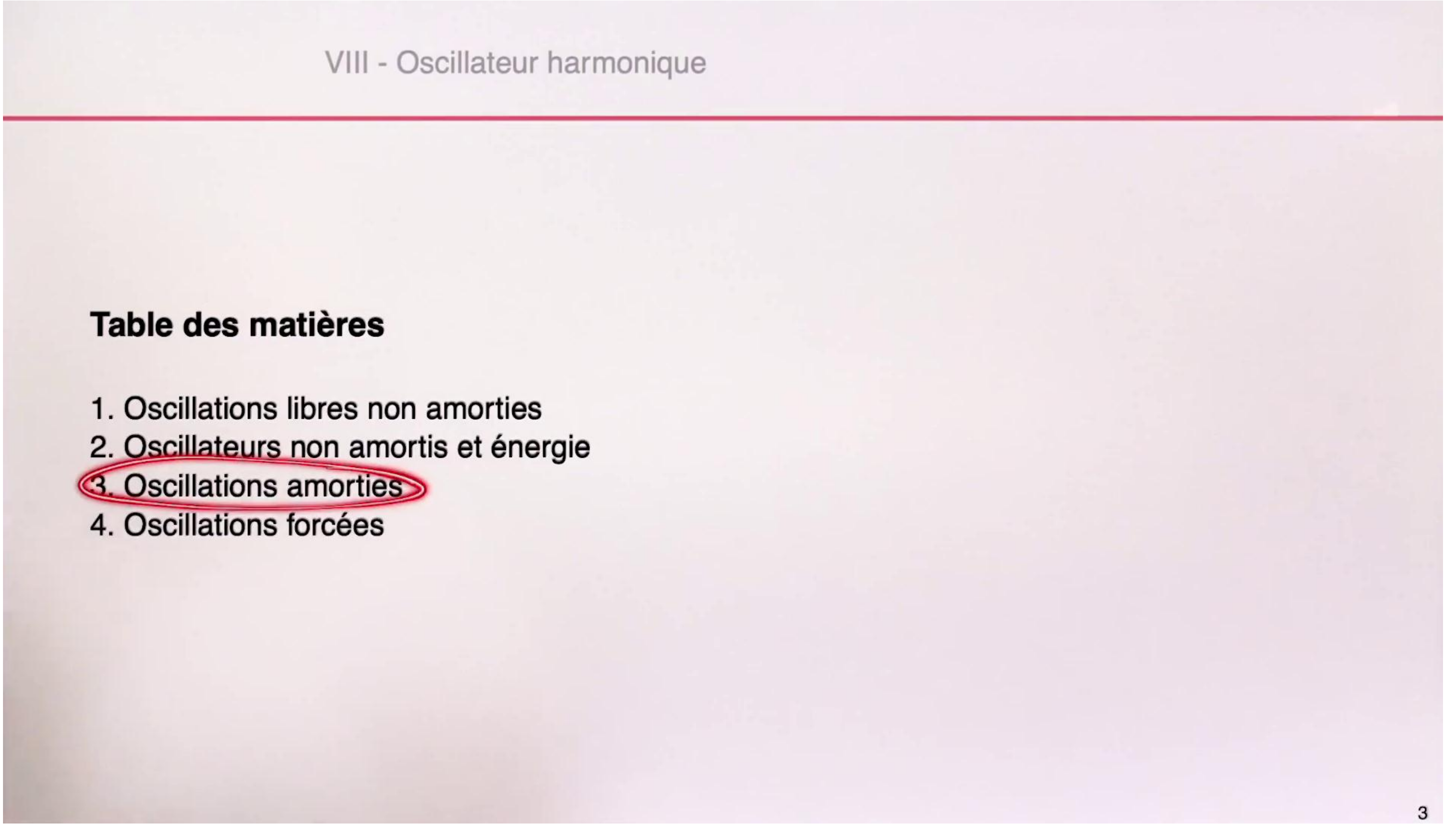
- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d’une force constante et uniforme
- V - Forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

2

Notes

Summary

0m 33s

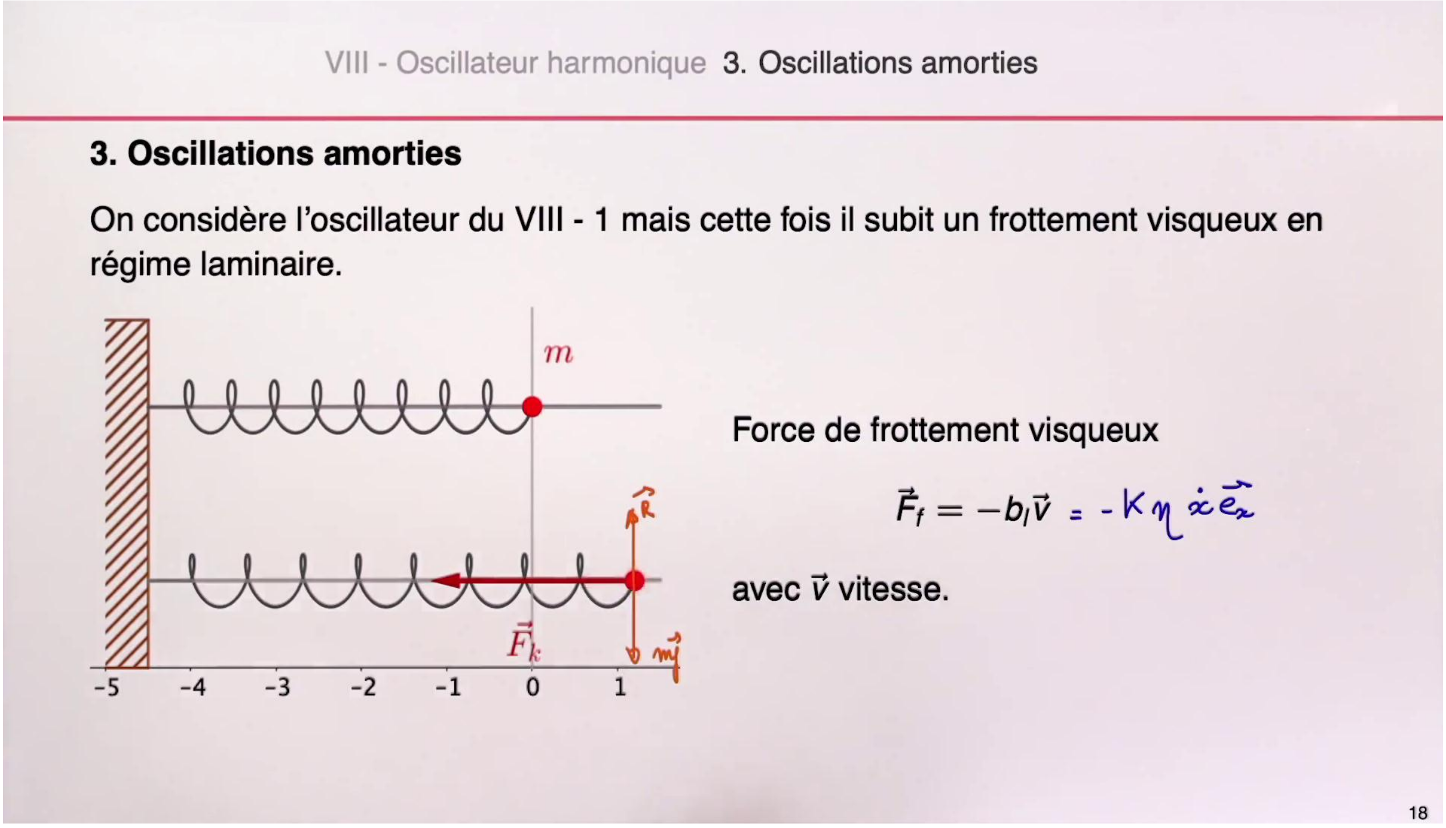


Nous sommes dans le chapitre 8, oscillateur harmonique, et nous allons voir le cas des oscillations amorties.

Notes

Summary

0m 35s

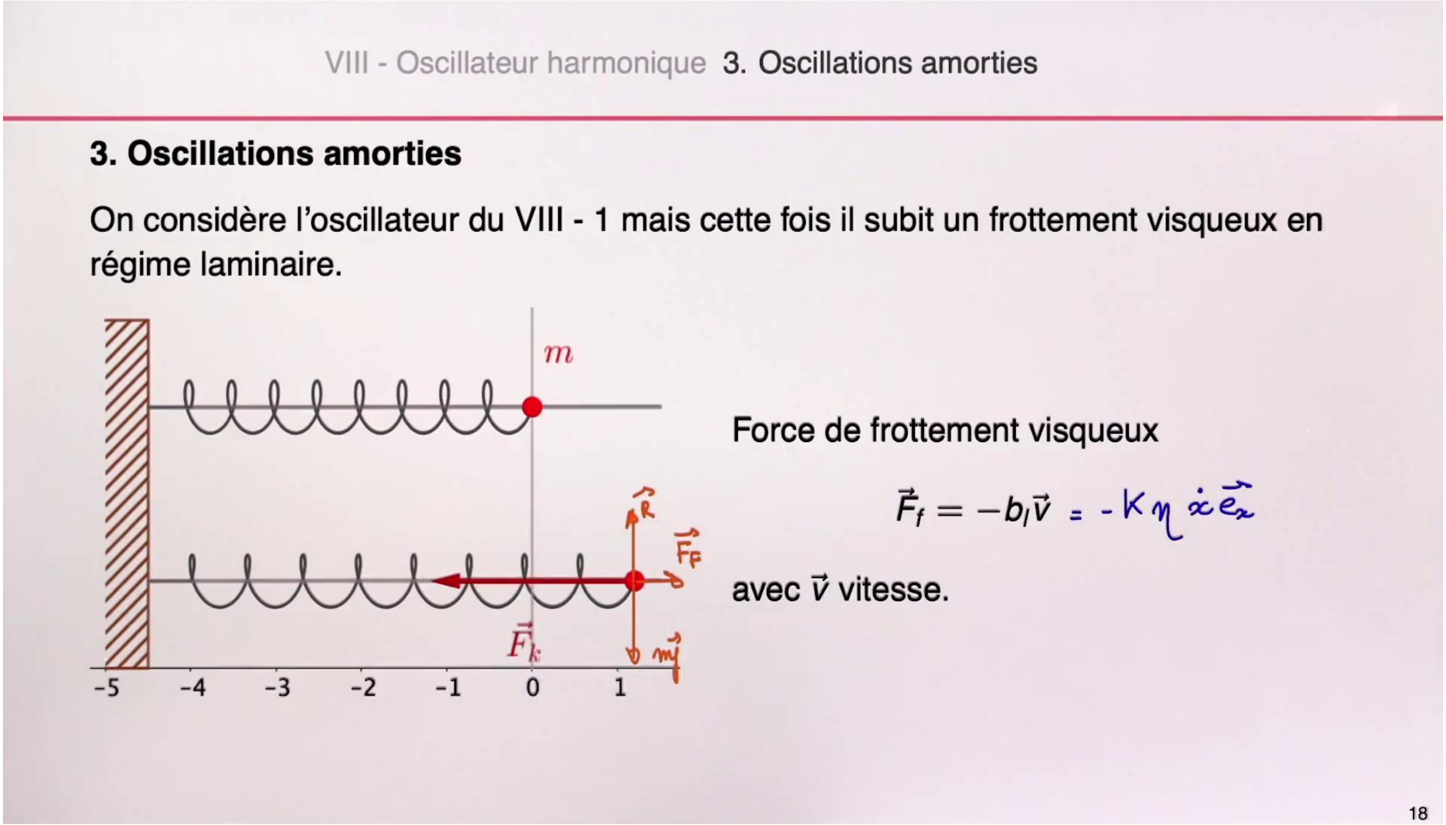


Nous augmentons progressivement la complexité du problème. Nous reprenons l'oscillateur du chapitre 8-1, mais cette fois, il subit un frottement visqueux en régime laminaire, c'est-à-dire que ma masse m, en plus de la force de rappel du ressort, bien sûr, de la réaction et du poids, a une force de frottement qui est proportionnelle à la vitesse. En fait, inversement proportionnelle, en moins bl fois v. C'est aussi égal à moins k éta, et la vitesse est x point ex. Je peux donc représenter toutes les forces. Le poids, la réaction et la force de frottement. Dans quel sens ? Dans un sens ou dans l'autre ? Le sens de la force de frottement dépend du sens dans lequel se déplace la masse. Lorsqu'elle va de gauche à droite, la force de frottement s'oppose au mouvement, elle est donc vers la gauche. Lorsque la masse se déplace de droite à gauche, la force de frottement est vers les x positifs. Je n'ai aucun moyen de savoir exactement si en ce moment, la masse se déplace vers la gauche ou vers la droite. Je vais donc faire une représentation symbolique en supposant qu'elle se déplace vers la gauche et je représente la force de frottement vers la droite.

Notes

Summary

0m 42s

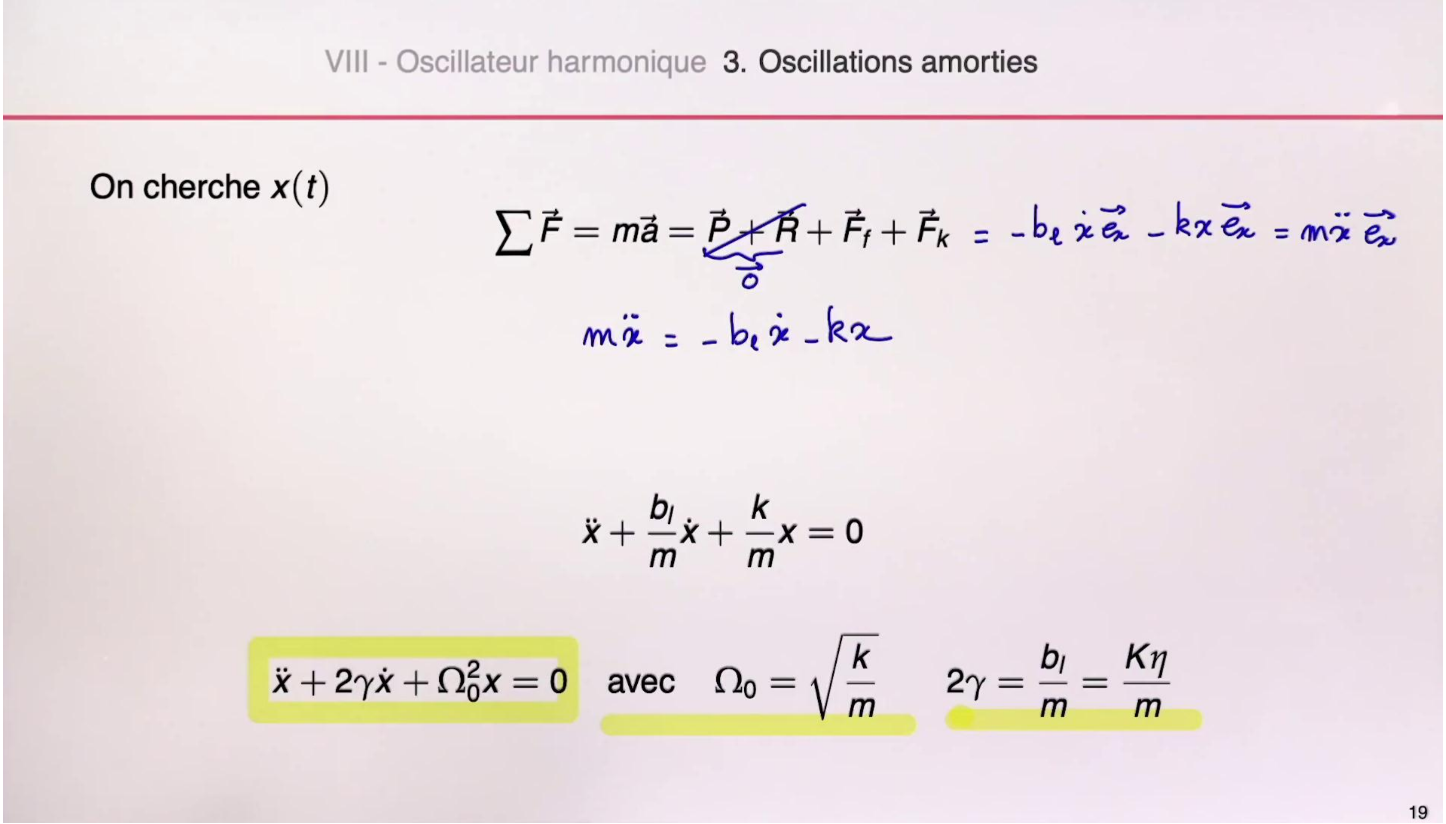


Tout ceci fonctionnera bien, car j'ai ici une notation algébrique dans laquelle j'ai la dérivée de la position, la vitesse algébrique. Comme dans les oscillations libres, le but va être d'étudier la position de la masse en fonction du temps x de t. Intuitivement, on se doute que si j'écarte la masse de sa position d'équilibre et que je la lâche, le ressort va l'amener à nouveau vers la position d'équilibre. Il est possible que la masse dépasse la position zéro, mais du fait de la force de frottement, j'aurai une dissipation d'énergie et la masse n'arrivera pas à retourner aussi loin. Une fois le ressort comprimé, il va à nouveau ramener la masse vers la droite, mais moins loin que la position de départ. Et ainsi de suite, je vais donc avoir des oscillations, mais qui vont être de plus en plus petites, donc amorties. Imaginons que la force de frottement soit très importante. Le coefficient de frottement est extrêmement important. À ce moment-là, le ressort aura beaucoup de mal à ramener la masse vers la gauche. Elle va partir très lentement et elle va tout simplement revenir très lentement vers le zéro. On voit donc que ce coefficient de frottement a une grande importance et que, suivant sa valeur, je peux avoir différents types de mouvements.

Notes

Summary

2m 16s

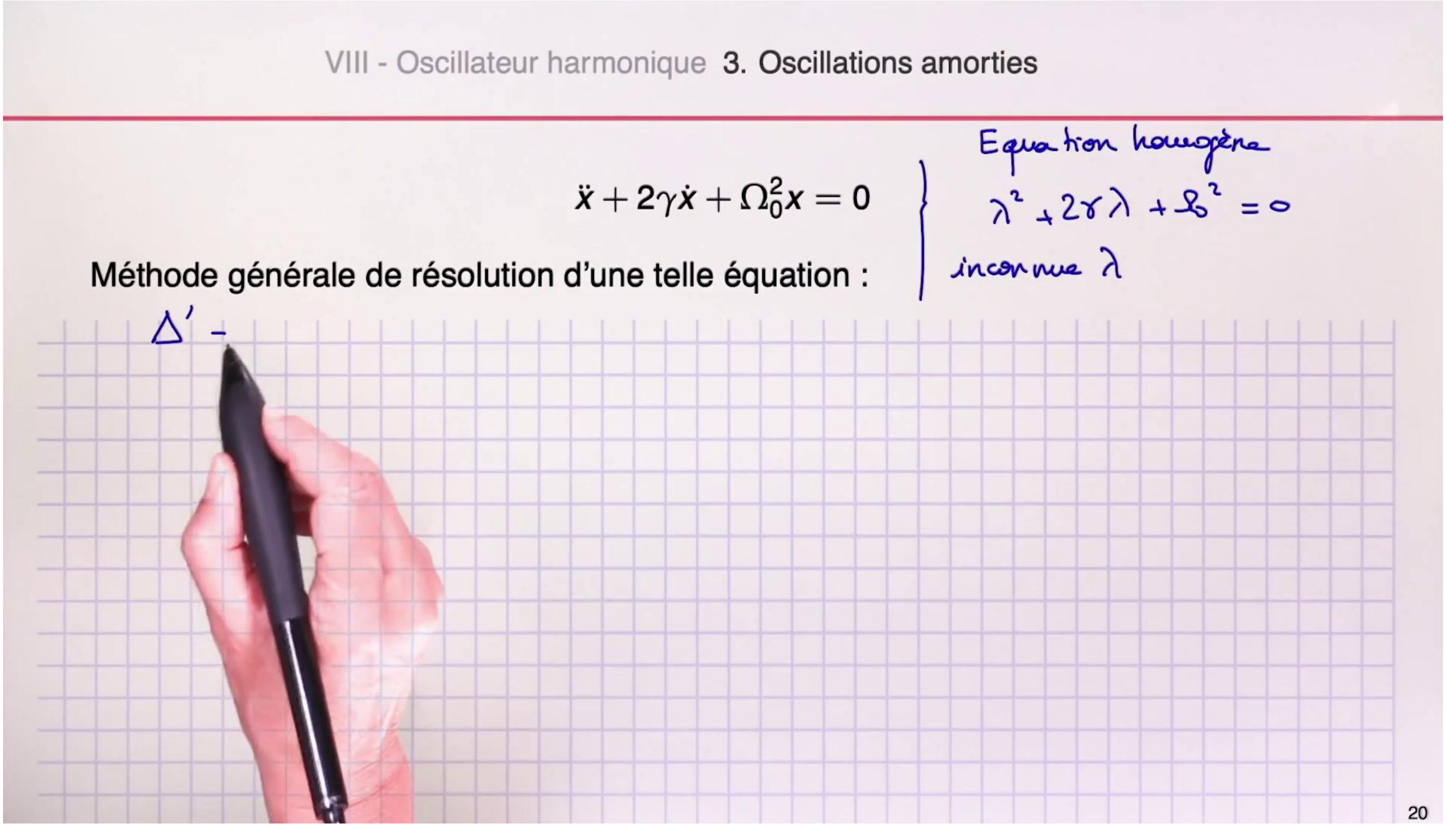


Nous cherchons donc x de t. Commençons par l'équation différentielle obtenue avec les lois de Newton. Somme des forces égale ma, le poids plus la réaction plus la force de frottement, plus la force de rappel du ressort. P plus R vaut 0, cela disparaît. F-F vaut moins blx point ex. Fk moins kxex. Et l'accélération mx deux points ex. Projeté sur ex, j'obtiens donc mx deux points est égal à moins blx point moins kx. Je vais tout diviser par m et ramener ces deux termes de l'autre côté. J'obtiens l'équation suivante : x deux points plus bl/mx point plus k/mx égal 0. K/m, nous l'avions déjà, nous l'avons appelé oméga zéro carré. Par contre, ce terme est nouveau. Je vais l'appeler deux gamma. Nous verrons tout à l'heure pourquoi ce deux. Avec cela, j'ai l'équation différentielle. X2+2γx+ω_0^2x = 0 avec ω_0 = racine de k/m et 2γ = bl/m qui vaut k é tas sur m. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, mais j'ai un terme supplémentaire. Lorsque ce terme était absent, nous avons pu intuiter la solution en cosinus ou en sinus. Mais avec ce terme qui est la dérivée première de x, supposons que x soit en cosinus, j'aurai cos, cos, mais ici sin. Impossible de trouver une forme intuitive.

Notes

Summary

3m 46s



Je vais donc devoir vous asséner la méthode de résolution générale d'une telle équation. Nous prendrons cette équation comme équation générique. Et là, j'ai une très mauvaise nouvelle. Cette résolution sera beaucoup plus beaucoup plus simple avec les complexes. Nous allons donc utiliser l'outil nombre complexe. Pour résoudre cette équation, nous devons passer par ce que l'on appelle l'équation homogène. C'est une équation du second degré qui prend les mêmes coefficients que l'équation différentielle devant les fonctions et qui prend comme paramètre, par exemple Λ et remplace la dérivée seconde par Λ^2, la dérivée première par Λ^4 et la fonction non dérivée par Λ^0. Λ^0 fera 1. Et ici, j'aurai Λ, cette équation sera donc : $\Lambda^2+2\Gamma\Lambda+\Omega_0^2=0$ d'inconnu Λ. Dans le monde des complexes, cette équation a toujours des solutions. Cela pourra être une racine double réelle ou bien deux racines réelles ou deux racines complexes. Le type de solution de l'équation différentielle dépendra du type de solution de l'équation homogène. La grandeur déterminante sera justement le déterminant. Puisque j'ai mis un deux devant ʽY, je peux prendre δ' qui va valoir ʽY^2 moins Ω_0^2.

Notes

Summary

5m 47s

VIII - Oscillateur harmonique **3. Oscillations amorties**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

Equation homogène

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$

inconnue λ

Méthode générale de résolution d'une telle équation :

$\Delta' = \gamma^2 - \Omega_0^2$

Cas 1) $\Delta' = 0 \quad \gamma = \Omega_0$ — L'équation de degré deux a une racine double $\lambda = \gamma \ (= \Omega_0)$

$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$ solution si $\gamma = \Omega_0$

Si $\gamma \neq \Omega_0$ L'équation homogène admet deux racines λ_1 et λ_2

Solution de l'équadiff $x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

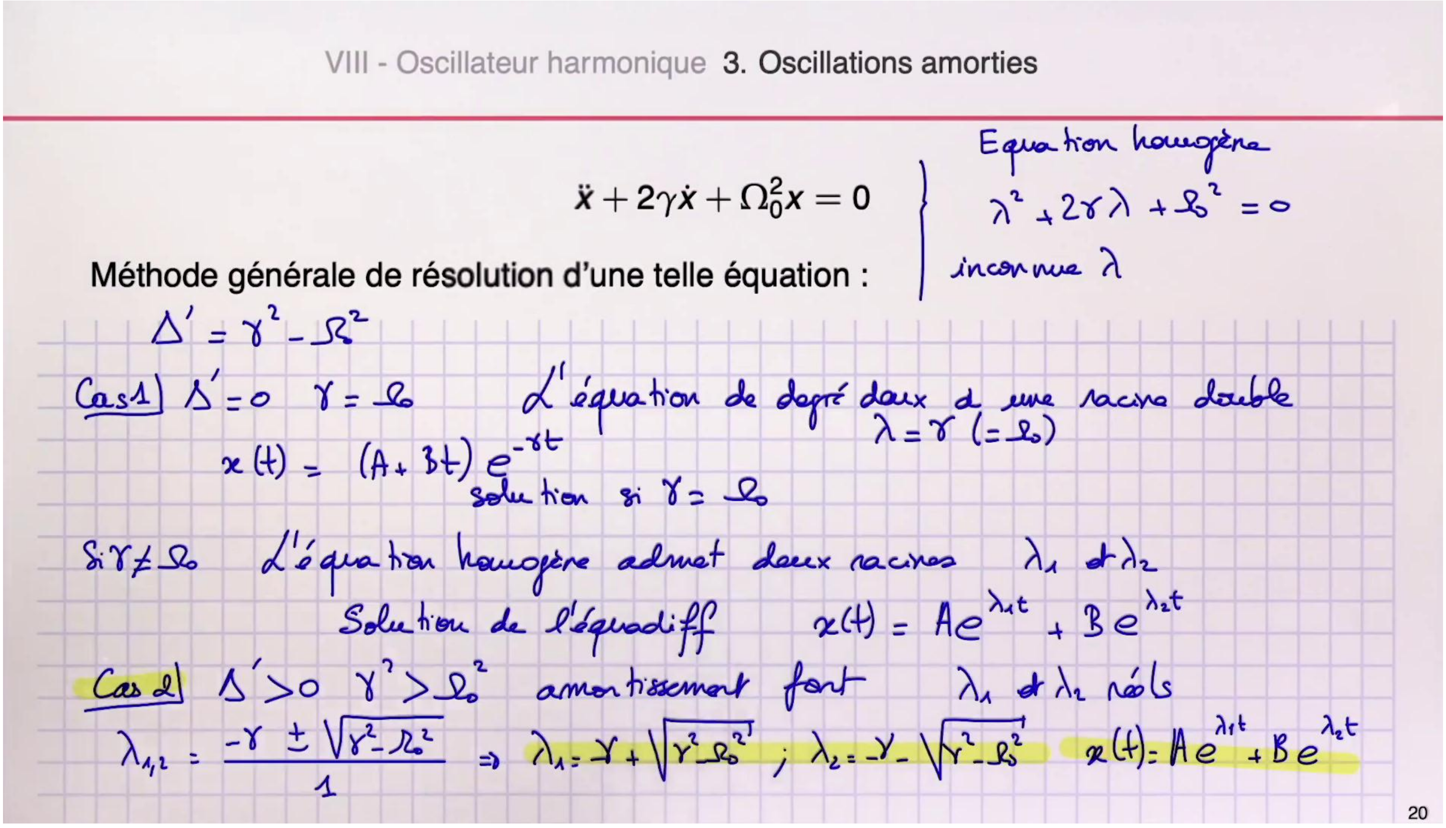
20

Le cas le plus particulier que je vais appeler k1, se produira lorsque δ' vaut 0. Cela signifie que ʽY est égal à Ω_0. À ce moment-là, cette équation de degré deux a une racine double. Et cette racine double, Λ est égale à ʽY qui vaut aussi Ω_0. Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent donc : x de t égal a plus b fois t exponentiel moins γt. C'est la solution si ʽY égal Ω_0. A et B sont les constantes d'intégration. Ceci était le cas 1. Si maintenant ʽY est différent de Ω_0, l'équation homogène admettra deux racines. Et ce cas-là se séparera en cas 2 et 3, suivant que ces deux racines sont réelles ou complexes. Groupons pour l'instant le cas 2 et le cas 3. Ces deux racines seront appelées Λ1 et Λ2. La solution générale de l'équation différentielle, parfois appelée « equa diff », s'écrira x(t) = aexp(Λ1.t + bexp(Λ2.t). Si le déterminant est positif, dans ce cas-là, les deux racines réelles. Les exponentiels sont réels et la solution est réelle. Il n'y aura pas de problème. Par contre, si le déterminant est négatif, les racines Λ1 et Λ2 seront complexes et nous aurons une solution x de t qui semblera s'écrire de manière complexe. Or, la position ne peut pas être un complexe, c'est forcément un nombre réel.

Notes

Summary

7m 22s

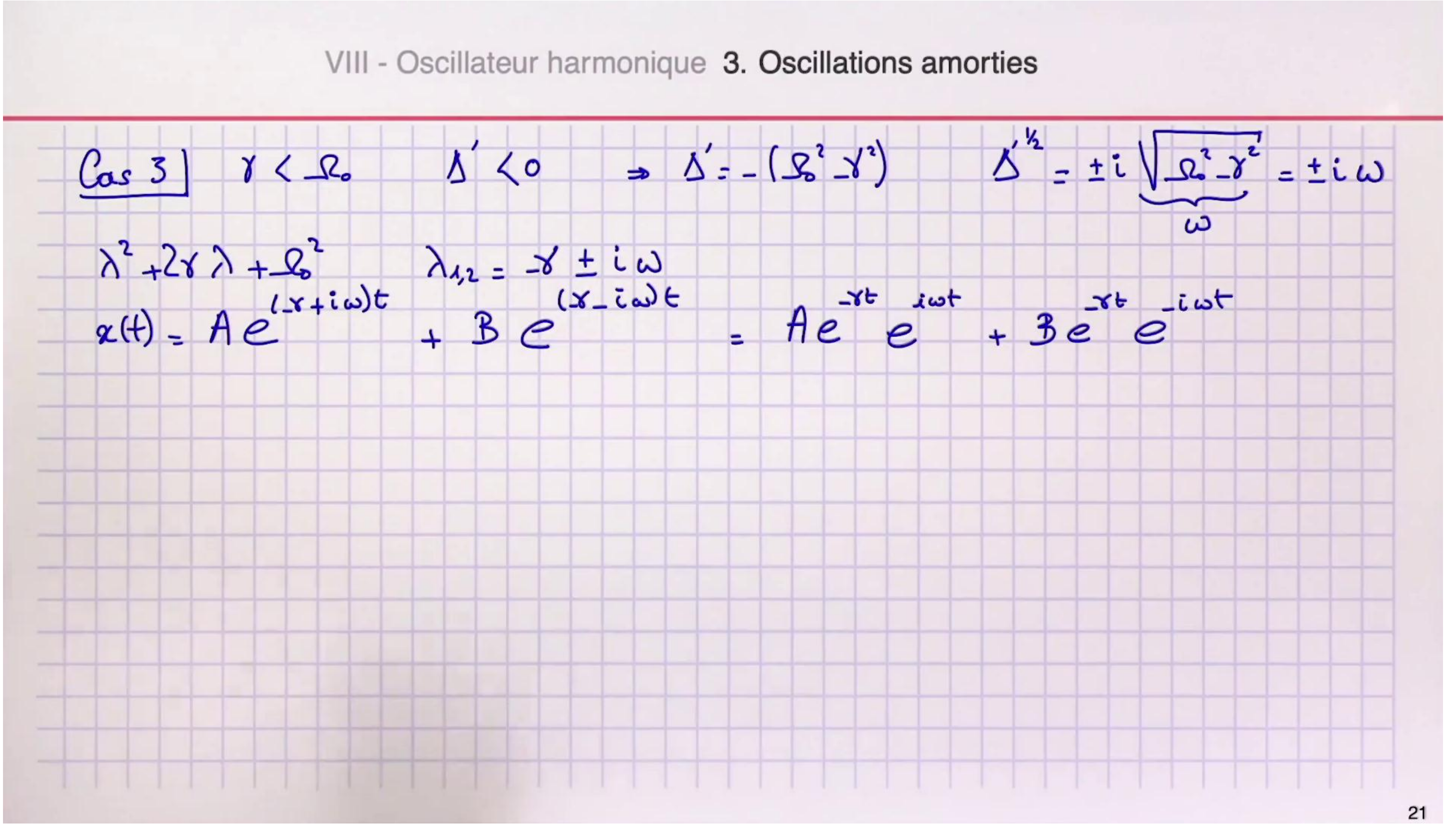


Nous devrons donc prendre la partie réelle de solution. On voit bien que le cas Δ' positif est plus simple. Commençons donc par là. C'est le cas 2. Δ' est strictement positif. Cela signifie que ʿY^2 supérieur à Ω_0^2. C'est donc le cas qu'on appelle amortissement fort. Dans ce cas-là, Λ1 et Λ2 sont réels. Et pour être plus Λ1-2 sera −b' soit −Γ plus ou moins racine de δ, donc plus ou moins racine de Γ^2 moins Ω_0^2 sur A, donc sur un. Je peux donc écrire Λ1 égal moins Γ plus racine carrée Γ^2 moins Ω_0^2. λ2 est égal à moins Γ moins racine Γ^2 moins Ω_0^2. Et x de t est égal à A exponentiel Λ1t plus B exponentiel Λ2t. Λ2 est négatif. Ce terme-là, Γ^2 moins Ω_0^2 est plus petit que Γ. Quand j'enlève Γ, je trouve bien Λ1 négatif aussi. Λ1 et Λ2 étant négatifs, j'ai deux fonctions exponentiels décroissantes. X de t sera donc une fonction somme de deux exponentiels décroissantes.

Notes

Summary

9m 25s



Il me reste à traiter le cas 3. C'est le cas dans lequel Γ est strictement inférieure à Ω_0. Dans ce cas-là, δ' est strictement négatif. Je ne peux donc pas prendre la carrée de δ', mais Mais je peux écrire $\delta' = -\Omega_0^2 - \Gamma^2$. $\Omega_0^2 - \Gamma^2$ est positif. Je pourrais prendre sa racine carrée et j'aurai moins un devant. Lorsque je vais prendre δ', je ne peux pas l'écrire en racine carrée, mais puissance un demi, j'obtiendrai moins un puissance un demi qui plus ou moins i racine racine carrée de Ω_0^2 moins Γ^2. Nous allons avoir affaire à ce racine carrée Ω_0^2 moins Γ^2 pendant un bon moment. Pour nous simplifier l'écriture, je vais l'appeler petit oméga. Δ'^1 sera donc égal à plus ou moins iΩ. Les solutions de l'équation homogène $\Lambda^2 + 2\Gamma\Lambda + \Omega_0^2$ s'écriront s'écriront alors Λ1-2 égal moins gamma plus ou moins δ puissance un demi iΩ. Et comme tout à l'heure, X de t sera égal à A exponentiel Λ1t donc moins gamma plus i oméga t plus B exponentiel moins gamma moins iΩt. En développant l'exponentiel, j'obtiens A exponentiel moins gamma t exponentiel iΩt plus B exponentiel moins gamma t exponentiel moins iΩt. Je peux mettre exponentiel gamma t en facteur et obtenir x de t égal exponentiel moins gamma t, A exponentiel i oméga t plus B exponentiel moins i oméga t.

Notes

Summary

11m 13s

VIII - Oscillateur harmonique **3. Oscillations amorties**

$\boxed{\text{Cas 3}}$ $\gamma < \Omega_0$ $\Delta' < 0$ $\Rightarrow \Delta' = -(\Omega_0^2 - \gamma^2)$ $\Delta'^{1/2} = \pm i \underbrace{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega} = \pm i\omega$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2$ $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$x(t) = A e^{(-\gamma + i\omega)t} + B e^{(\gamma - i\omega)t} = A e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}\right]$$

$e^{i\omega t}$: $\cos\omega t \; \boxed{+ i \sin\omega t}$

$e^{-i\omega t}$: $\cos\omega t \; \boxed{- i \sin\omega t}$

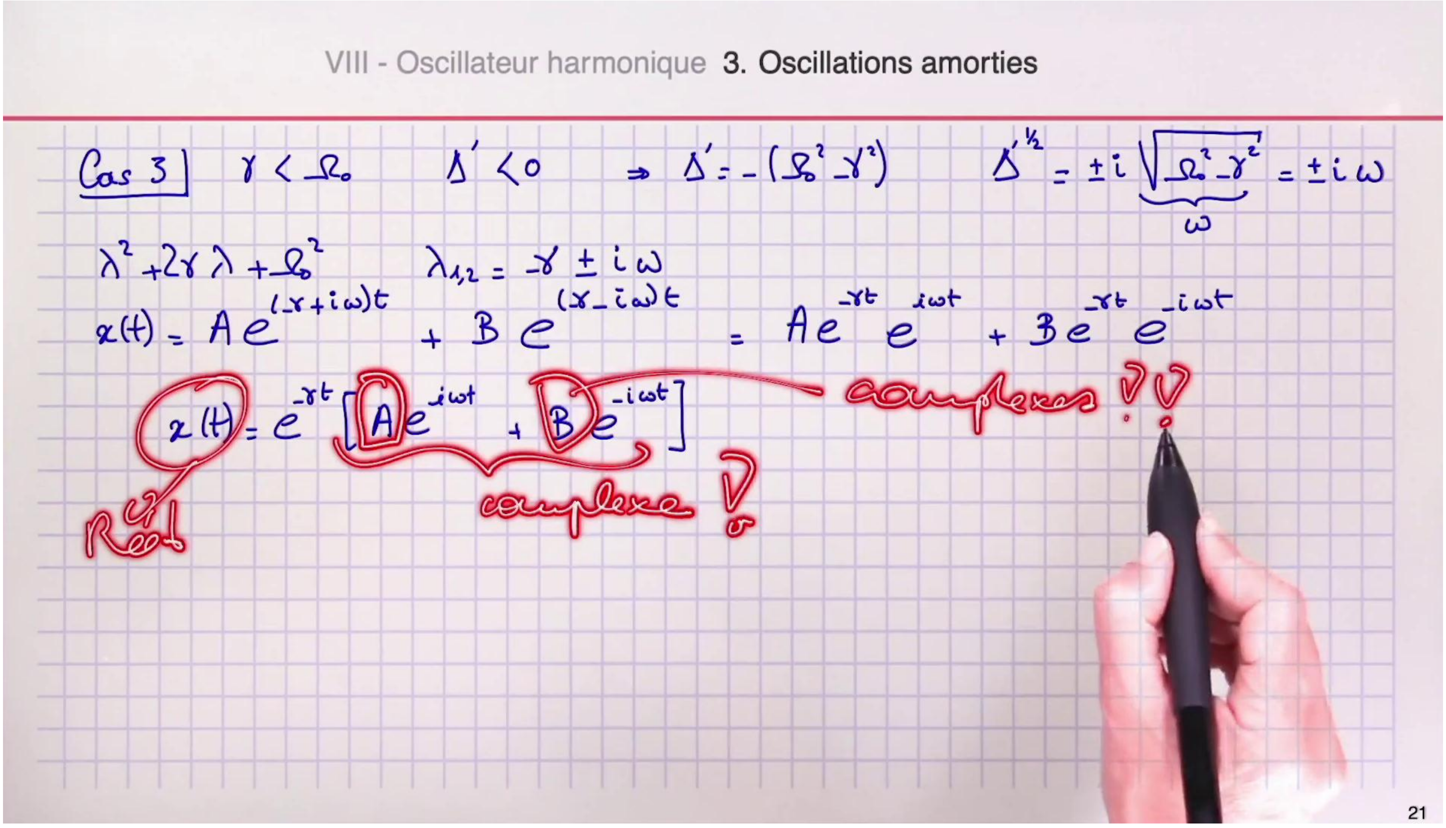
21

Cet exponentiel complexe, exponentiel i oméga t, n'est rien d'autre que cosinus oméga t plus i sinus oméga t. L'exponentiel moins i oméga t est un cosinus oméga t moins i sinus oméga t. J'ai donc une partie réelle et une partie imaginaire.

Notes

Summary

13m 42s



Ce nombre-là est donc complexe. Or, x de t est réelle. Mais puisque je suis passée dans le monde des complexes, je dois y rester jusqu'au bout. Je dois donc faire attention, grand A et grand B sont complexes aussi.

Notes

Summary

14m 06s

Cas 3 $\gamma < \Omega_0$ $\quad \Delta' < 0 \Rightarrow \Delta' = -(\Omega_0^2 - \gamma^2)$ $\quad \Delta'^{1/2} = \pm i \underbrace{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega} = \pm i\omega$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2$ $\quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$x(t) = Ae^{(-\gamma + i\omega)t} + Be^{(\gamma - i\omega)t} = Ae^{-\gamma t}e^{i\omega t} + Be^{-\gamma t}e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[\boxed{A}e^{i\omega t} + \boxed{B}e^{-i\omega t}\right]$$

$a_1 + ia_2$ $\qquad b_1 + ib_2$

21

Ce que je vais faire maintenant, c'est exprimé A et B leur forme partie réelle et partie imaginaire, a1 + ia2, b1 + ib2. Exprimer ces exponentiels aussi avec leur partie réelle et imaginaires est développé.

Notes

Summary

14m 30s

VIII - Oscillateur harmonique **3. Oscillations amorties**

$\boxed{\text{Cas 3}}$ $\quad \gamma < \Omega_0 \qquad \Delta' < 0 \Rightarrow \Delta' = -(\Omega_0^2 - \gamma^2) \qquad \Delta'^{1/2} = \pm i \underbrace{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega} = \pm i\omega$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 \qquad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$x(t) = A e^{(-\gamma + i\omega)t} + B e^{(\gamma - i\omega)t} = A e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}\right]$$

$A = a_1 + i a_2$

$B = b_1 + i b_2$

$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[(a_1 + i a_2)(\cos\omega t + i \sin \omega t) + (b_1 + i b_2)(\cos \omega t - i \sin \omega t)\right]$$

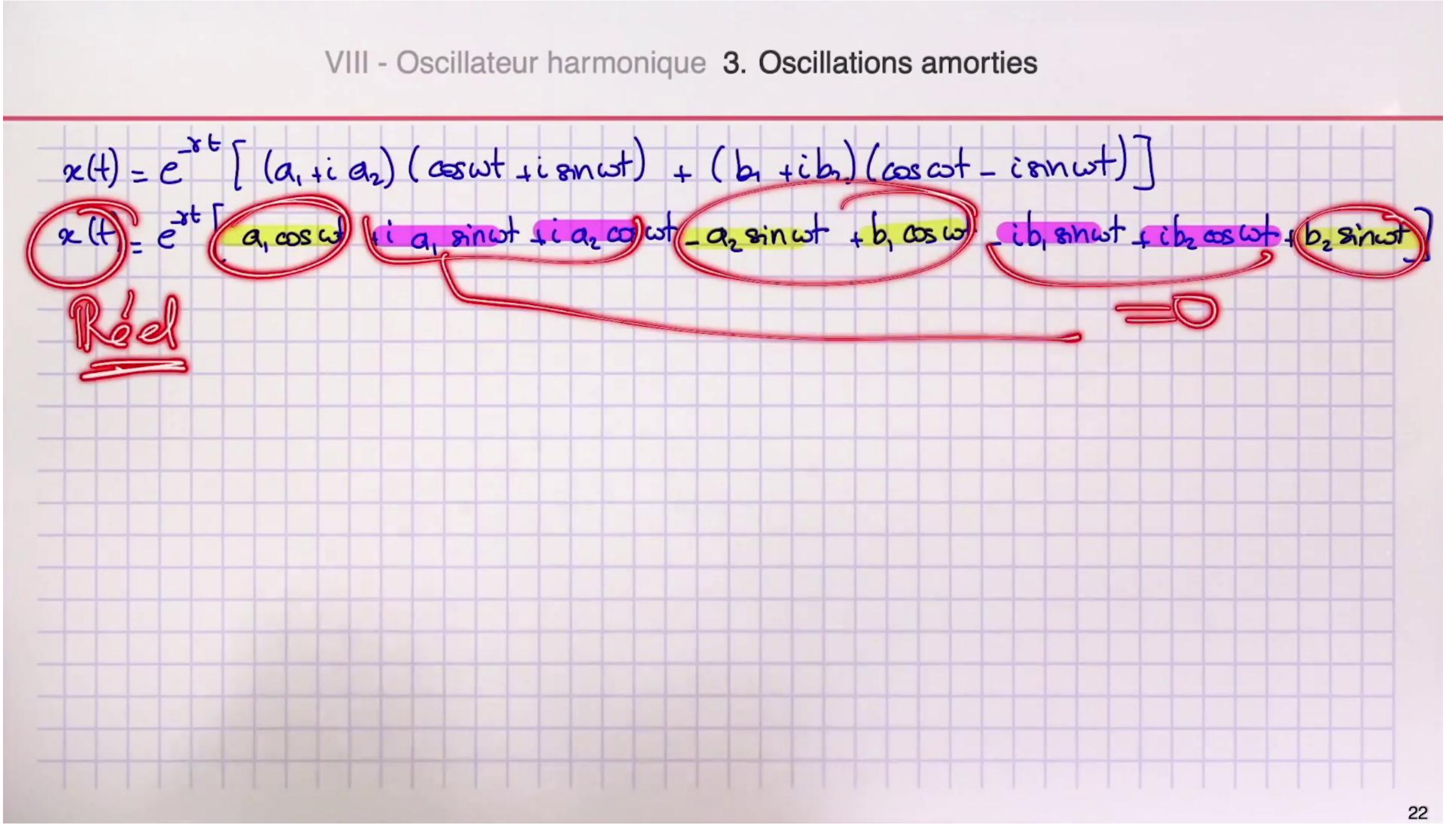
21

J'ai donc x de t égal exp moins gamma t, facteur de a1 + ia2, multiplié par cos Ωt + isin Ωt, plus b1 + ib2, multiplié cos Ωt, moins isin Ωt. Il me reste à développer ces deux produits et regrouper réelles et parties imaginaires. Essayez donc de le faire vous-même.

Notes

Summary

14m 54s

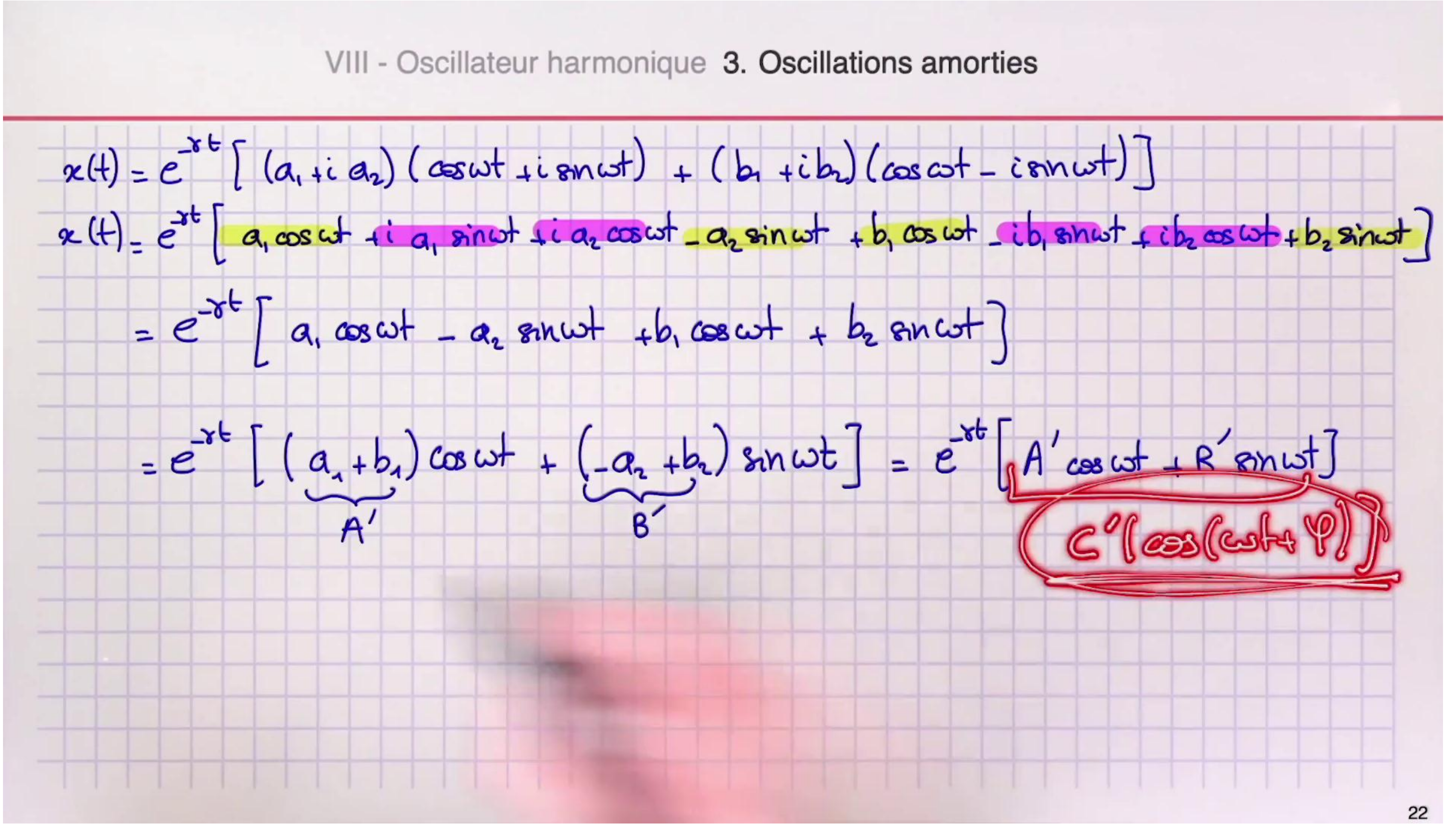


Allons-y, je vous donne la solution, il faut y aller calmement. a1Cos Ωt + ia1sin Ωt plus ia2cos Ωt moins a2 sin Ωt plus b1cos Ωt moins ib1sin Ωt plus ib2cos Ωt, plus b2sin Ωt. Nous avons donc quatre termes réels et quatre termes imaginaires. Or, x de t est réel. Donc, seule la partie réelle existe. Cette partie imaginaire est forcément égale à zéro.

Notes

Summary

15m 48s



Je peux donc directement écrire x de t est égal à exponentiel moins gamma t, facteur de a1 cos moins a2 sin plus b1 cos plus b2 sin. A2sin^2+ b1cos^2+ b2sin^2. Je vais regrouper les sinus et les cosinus. a1 plus moins b1 plus + a2 + b2 sin. Je vais appeler grand a' terme là A' et grand b'. Terme là B'. Au est donc égal à exponentiel x = exp multipliée par a' cos plus b' sin. A'cos + b'sin. C'est la solution générale de mon équation différentielle. A' et b' sont déterminés par les conditions initiales. Nous avons vu pour l'oscillateur simple que cette expression est équivalente à une expression de la forme c'cos + b' sin. C'est cette forme là qui sera généralement la plus simple pour ce type d'équation différentielle.

Notes

Summary

17m 10s

VIII - Oscillateur harmonique **3. Oscillations amorties**

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[(a_1 + i a_2)(\cos\omega t + i \sin\omega t) + (b_1 + i b_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\right]$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[a_1\cos\omega t + i a_1 \sin\omega t + i a_2 \cos\omega t - a_2 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t - i b_1 \sin\omega t + i b_2 \cos\omega t + b_2 \sin\omega t\right]$$

$$= e^{-\gamma t}\left[a_1\cos\omega t - a_2 \sin\omega t + b_1\cos\omega t + b_2 \sin\omega t\right]$$

$$= e^{-\gamma t}\left[\underbrace{(a_1 + b_1)}_{A'}\cos\omega t + \underbrace{(-a_2 + b_2)}_{B'}\sin\omega t\right] = e^{-\gamma t}\left[A'\cos\omega t + B'\sin\omega t\right]$$

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t}\left(\cos(\omega t + \varphi)\right) \qquad \omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \Omega_0 > \gamma$$

A et φ constantes d'intégrations

22

Nous allons donc écrire la solution générique de x e t égale une différentielle d'intégration = constante d'intégration, appelons la grand A, exponentiel cos plus phi. Petit oméga t cos. Petit oméga est égal à racine carrée de oméga0 carré moins gamma carré. Nous sommes oméga zéro le cas oméga0 supérieur à gamma. A et phi sont les constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. Vous avez donc le droit d'utiliser cette forme générique dans le cas de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec gamma inférieur à oméga 0.

Notes

Summary

18m 38s

Voilà, nous avons vu comment obtenir, puis résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur libre avec un amortissement fluide. Cette résolution n'est pas très simple, mais les solutions obtenues seront a une qu'on a une équation différentielle de la forme que nous avons obtenue dans cette exerc, Dans les exercices, vous pourrez donc analyser le problème, utiliser les lois de Newton et si vous différent une équation différentielle de utilisez les même obtenues.

Notes

Summary

19m 29s