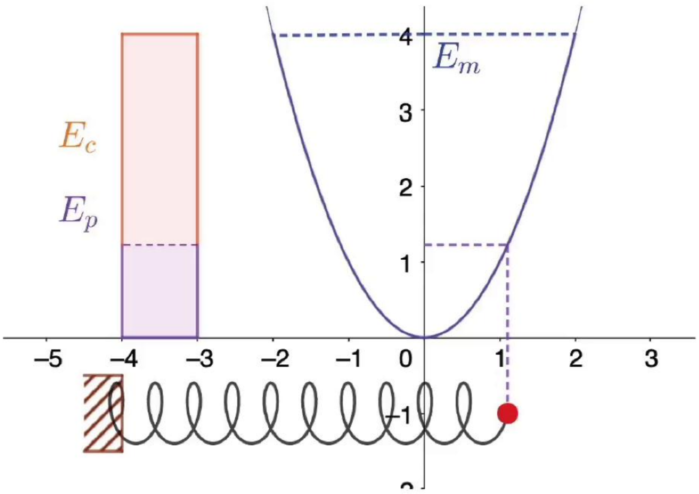


Oscillations et énergie

Prof. Cécile Hébert

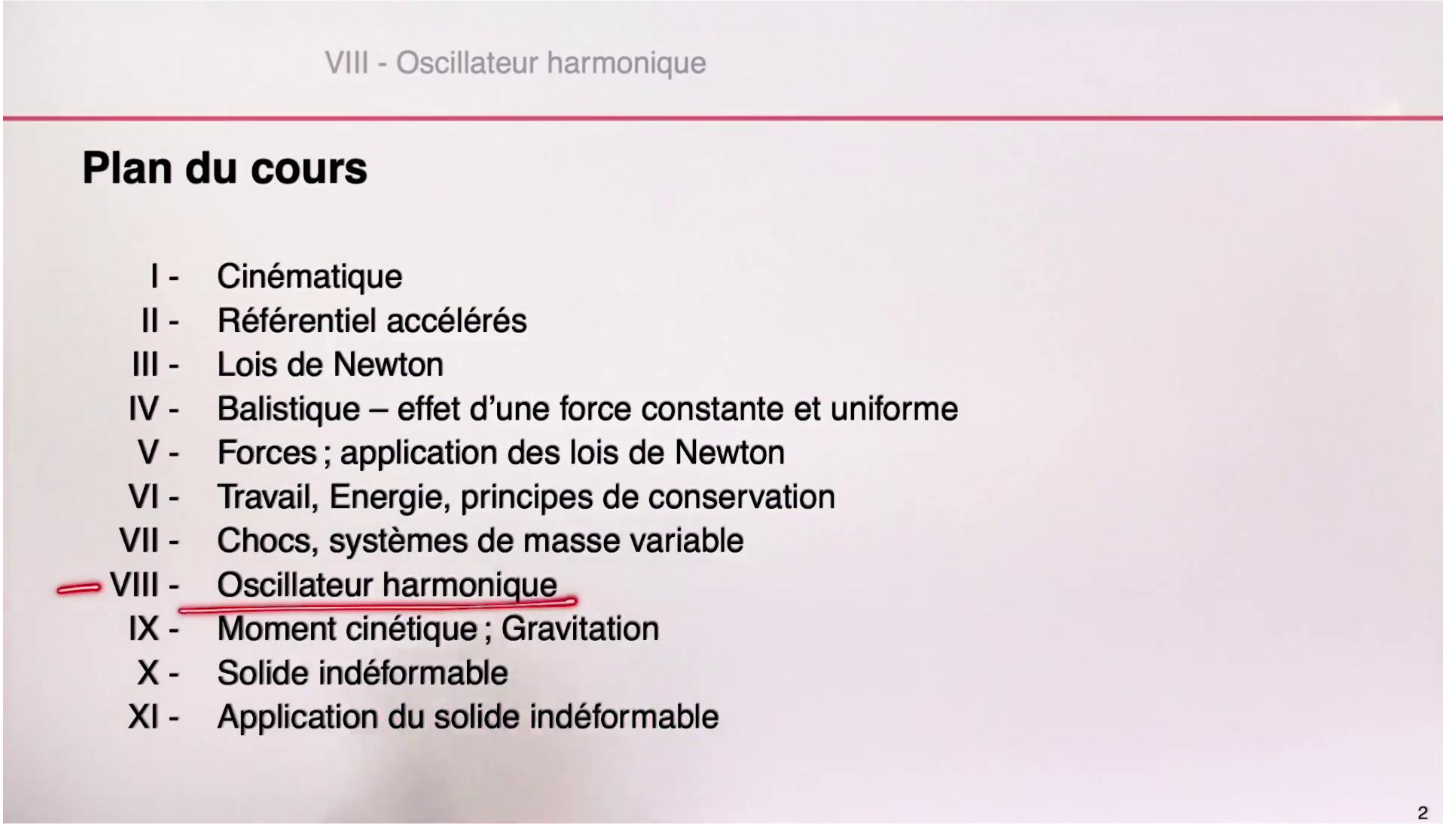
Video

Dans cette vidéo, nous allons continuer à analyser notre oscillateur libre non amorti. Cette fois, nous allons l'analyser sous l'angle de l'énergie. Nous allons considérer l'énergie potentielle, l'énergie cinétique, dont la somme forme l'énergie mécanique.

Notes

Summary

0m 05s

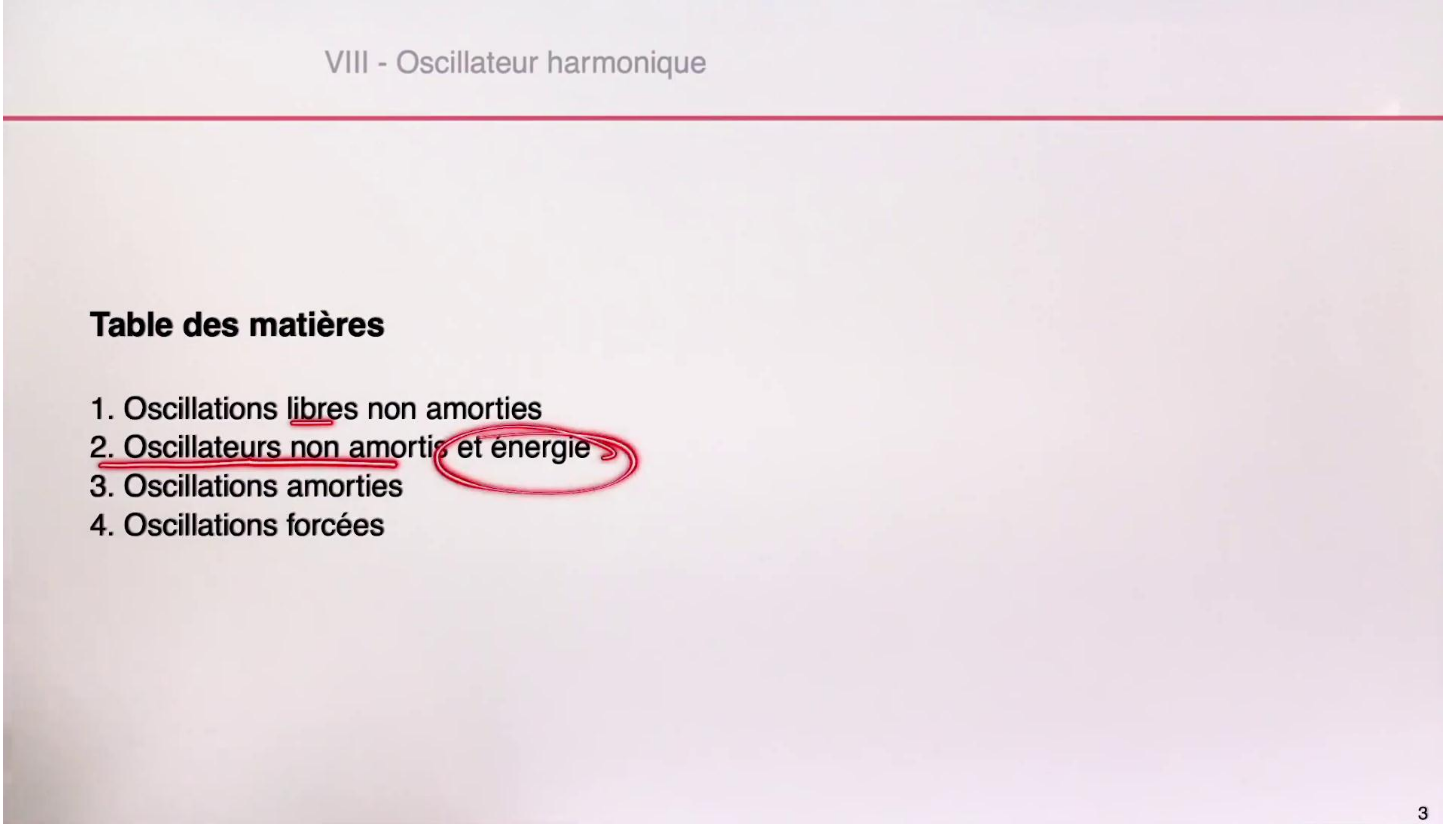


Nous sommes dans le chapitre 8, oscillateur harmonique.

Notes

Summary

0m 25s

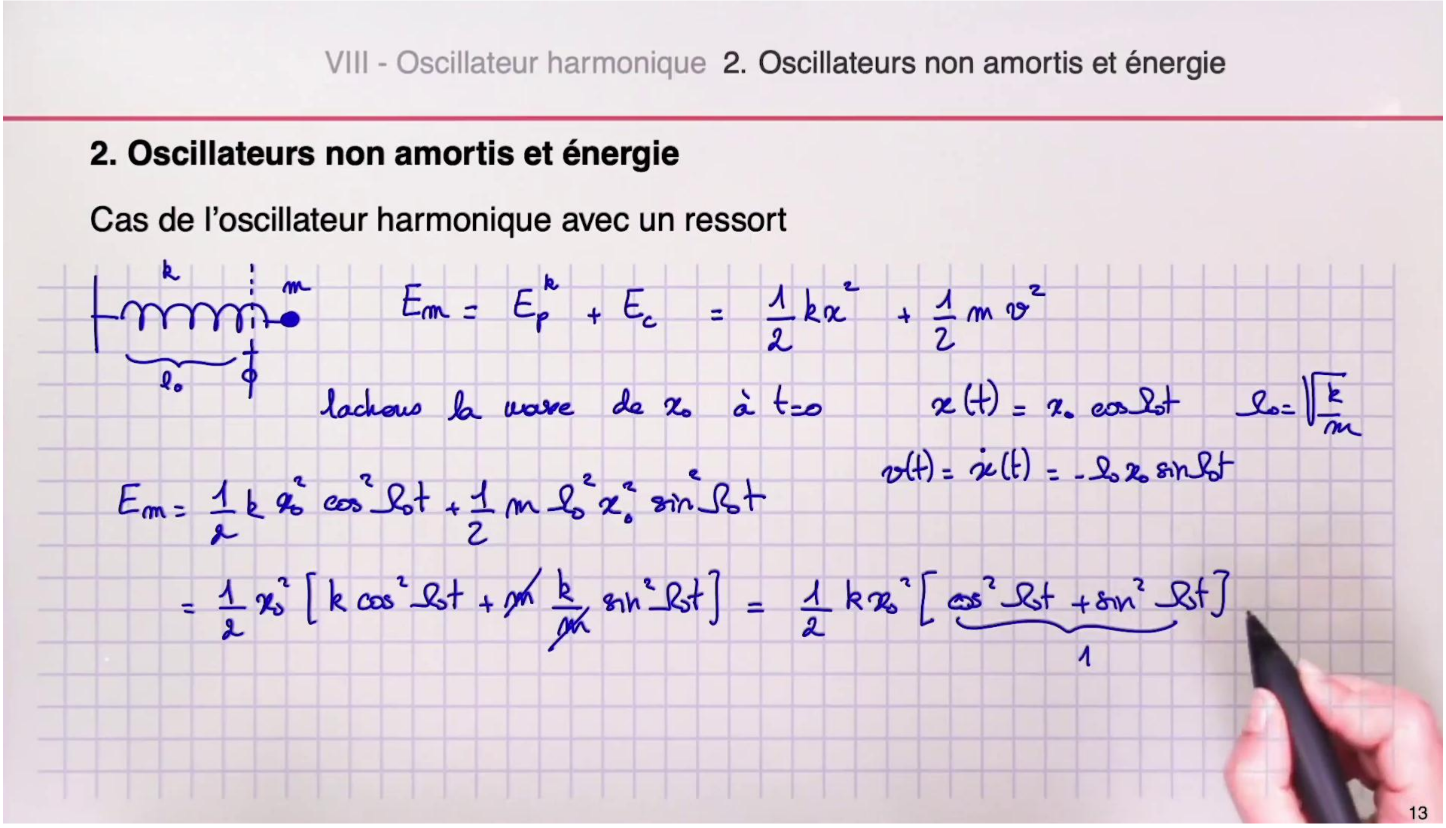


Et nous allons voir le lien entre l'oscillateur non amorti, donc libre, et l'énergie.

Notes

Summary

0m 29s

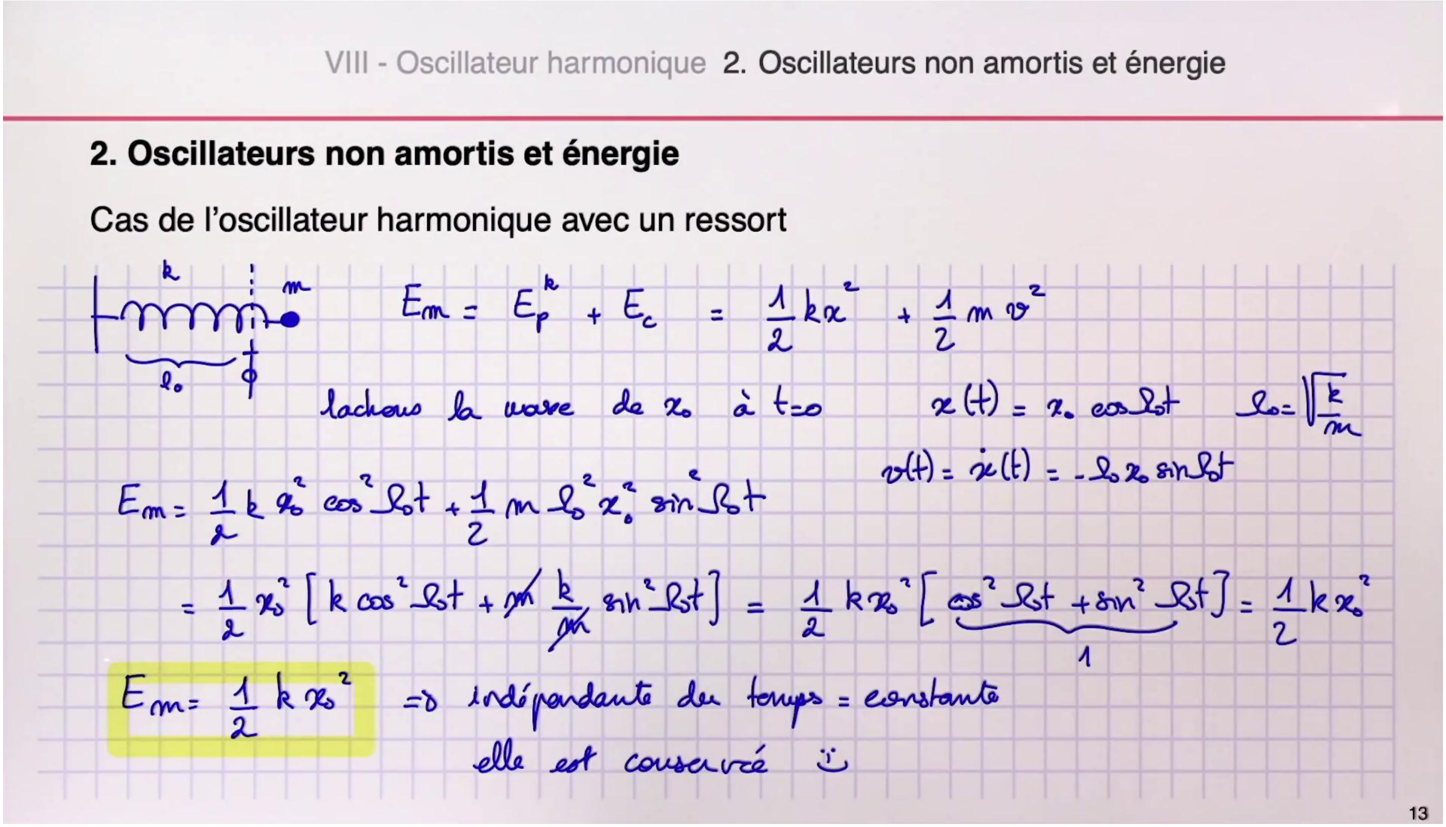


Reprenons pour commencer le cas de l'oscillateur harmonique avec un ressort. Une masse m accrochée à un ressort de raideur k. Nous choisissons l'origine de telle manière que la masse soit en zéro lorsque le ressort est au repos. Si nous cherchons à calculer l'énergie mécanique du système masse accrochée à un ressort. L'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle, et cette énergie potentielle est l'énergie potentielle du ressort, plus l'énergie cinétique de la masse. L'énergie potentielle du ressort est $1/2kx^2$. L'énergie cinétique de la masse est $1/2mv^2$. Or, nous avons vu que dans ce cas précis, si en plus, je lâche la masse de x_0 à t = 0, la solution obtenue pour la position x(t) était $x_0\cos\Omega_0 t$ avec $\Omega_0 = \sqrt{k/m}$. La vitesse v(t) qui est donc la dérivée de la position, moins $\Omega_0 x_0 \sin\Omega_0 t$. Si j'introduis ceci dans l'expression de l'énergie mécanique, je trouve donc Em = $1/2kx_0^2\cos^2 \Omega_0 t$ plus $1/2m\Omega_0^2 x_0^2 \sin^2\Omega_0 t$ Comme Ω_0 vaut $\sqrt{k/m}$, Ω_0^2 vaut k/m. Par ailleurs, je peux déjà mettre $1/2x_0^2$ en facteur. Je remplace Ω_0^2 par k/m. Je peux donc simplifier les m, k et k peut être mis en facteurs. J'ai $1/2x_0^2k[\cos^2\Omega_0 t + \sin^2 + \Omega_0 t]$. Or, $\cos^2 + \sin^2$ vaut 1. L'énergie mécanique est donc égale à $1/2kx_0^2$.

Notes

Summary

0m 37s

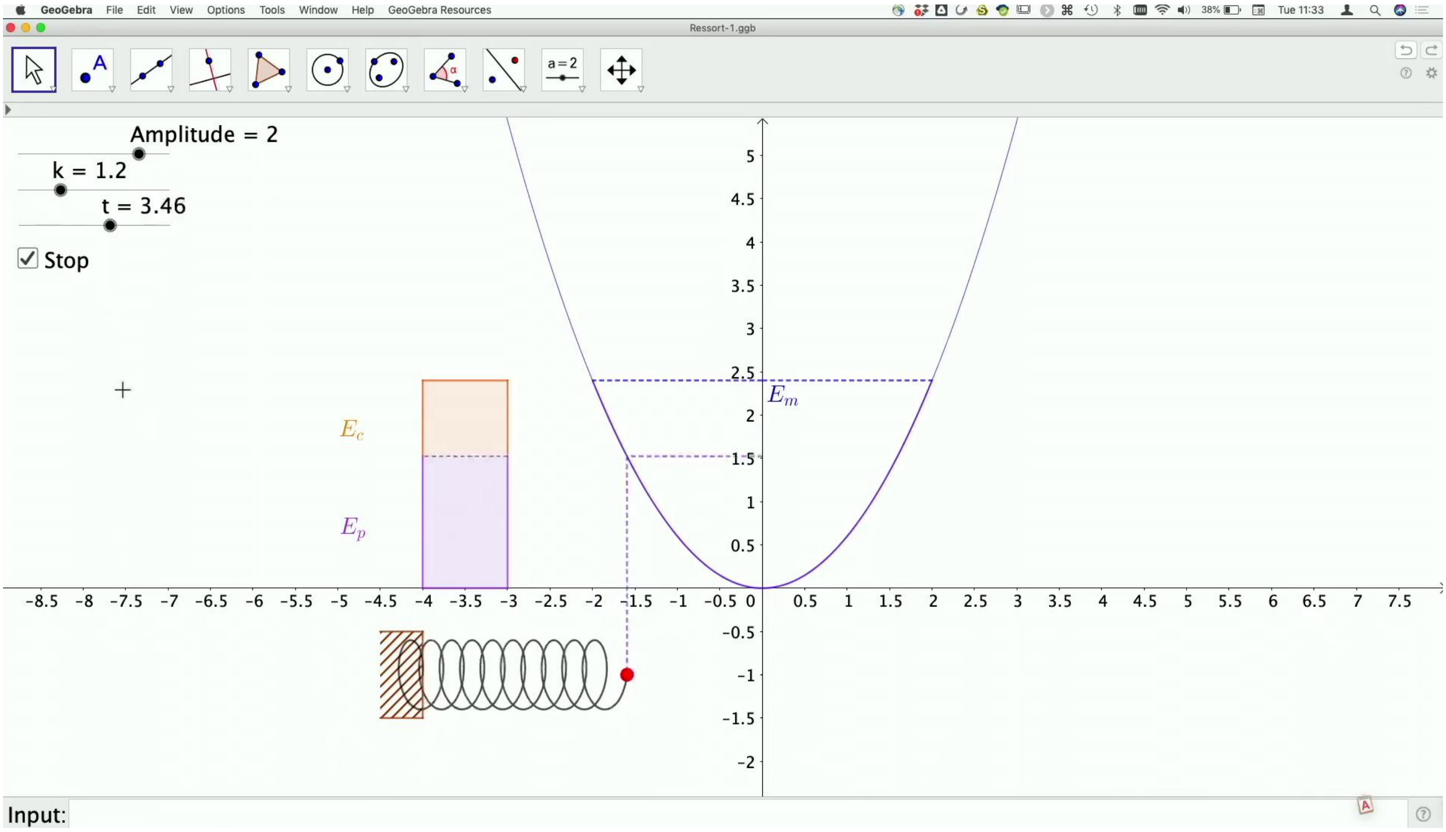


x_0 est une constante, c'est la position initiale, k est une constante, l'énergie mécanique est donc indépendante du temps. C'est une constante. C'est normal. Je n'ai pas de dissipation d'énergie dans ce système. J'ai donc conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique reste constante au cours du temps. Ça n'est donc pas une grosse surprise, mais c'est rassurant de voir qu'avec le calcul que l'on a fait, on obtient bien cette conservation de l'énergie mécanique. Maintenant, l'énergie mécanique est constante. Par contre, ni l'énergie potentielle ni l'énergie cinétique ne sont constantes. Qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie qu'au cours de l'oscillation, j'ai en permanence une conversion d'énergie potentielle en énergie cinétique, puis d'énergie cinétique en énergie potentielle. Lorsque nous commençons à t = 0, nous avons écarté la masse de sa position, la vitesse est nulle, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle. La masse se rapproche de zéro. Progressivement, son énergie potentielle diminue et son énergie cinétique augmente. Arrivé en zéro, c'est l'énergie potentielle qui vaut zéro et l'énergie cinétique qui sera égale à l'énergie mécanique. J'ai donc en permanence cette conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle, puis l'inverse.

Notes

Summary

3m 22s

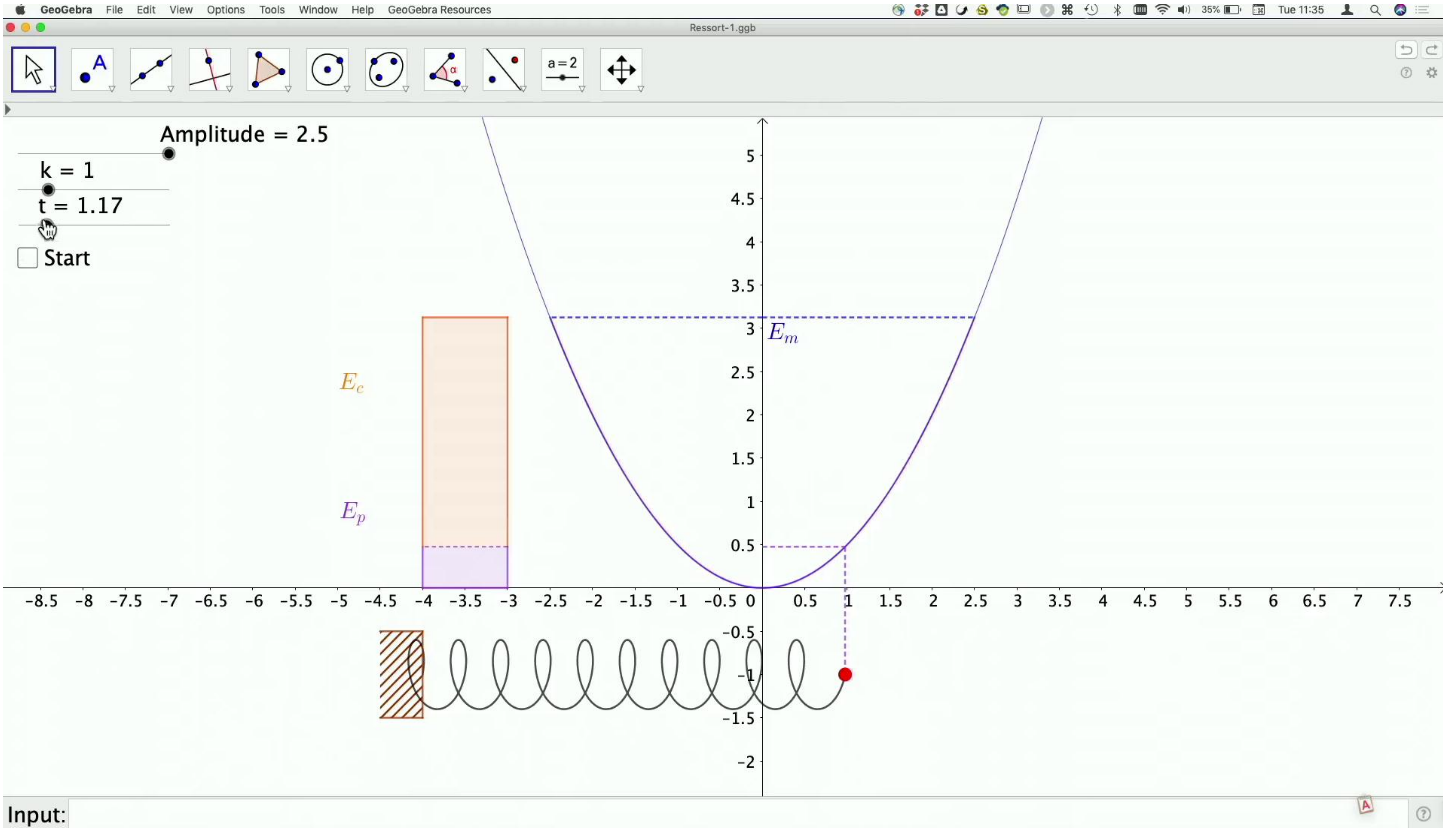


Nous avons cette représentation graphique ici. L'axe horizontal est l'axe tx. En x = 0, la masse est à sa position d'équilibre. À t = 0, nous l'écartons de sa position à l'équilibre et nous l'amenons en x_0. Je peux varier la valeur de x_0 grâce à ce slider. La parabole représentée au-dessus est la parabole donnant l'énergie potentielle. L'énergie ressort du ressort est 1/2kx². Elle vaut donc zéro lorsque le ressort est au repos et a cette forme parabolique lorsqu'il est écarté de sa position de repos. Lorsque le ressort est en x_0, l'énergie potentielle est égale à l'énergie mécanique. Je peux lire l'énergie mécanique sur la courbe de l'énergie potentielle pour la valeur x_0. Cette énergie mécanique est constante au cours du temps. Par contre, lorsque la masse va se déplacer, l'énergie potentielle variera. Ce qui reste, le complément pour arriver à l'énergie mécanique, sera donc l'énergie cinétique. Commençons à faire osciller le ressort. On le voit donc qui moins x_0 entre plus x_0. Aux extrémités, l'énergie mécanique est entièrement sous forme d'énergie potentielle et lorsqu'il passe en zéro, ici, je n'ai que de l'énergie cinétique.

Notes

Summary

4m 56s

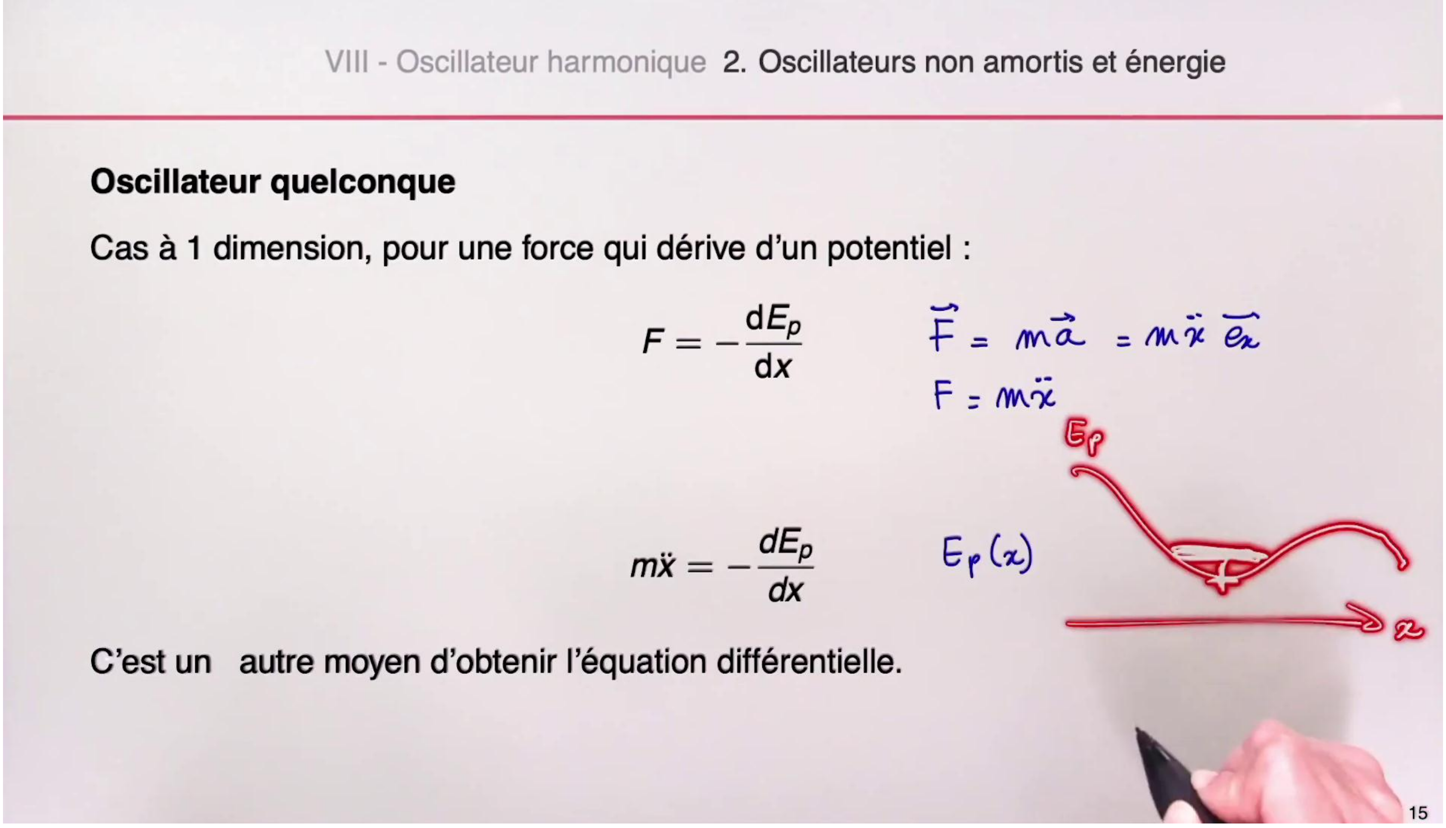


J'ai en permanence cette conversion entre énergie cinétique et énergie potentielle en conservant mécanique. Bien évidemment, si je change l'amplitude, cela va changer la valeur de l'énergie mécanique. Changer la constante de raideur du ressort la change également en changeant la forme de la parabole. On remarque au passage que puisque j'ai un oscillateur harmonique, lorsque je change l'amplitude, je ne change pas la période des oscillations. Par contre, le ressort doit aller plus vite pour faire un aller-retour.

Notes

Summary

6m 51s



Prenons maintenant le cas d'un oscillateur quelconque, mais restons dans le cas à une dimension. Supposons que la force dérive d'un potentiel. À ce moment-là, nous avons vu que F, la force, peut s'écrire, moins dEp/dx. Or, la force, grâce à Newton, est aussi égale à MA. À une dimension, ce sera égal à mẍ*ex. Projeté sur x, j'aurai F = mẍ. J'ai donc, grâce à la force qui dérive du potentiel et à Newton, un lien entre mẍ et la dérivée de Ep par rapport à x. mẍ = - dEp/dx. Si je connais Ep en fonction de x, je pourrais obtenir l'équation différentielle du mouvement. C'est donc un autre moyen d'obtenir l'équation différentielle. Par ailleurs, nous avons vu qu'il est possible de tracer l'énergie potentielle en fonction de x. Lorsque nous avons un minimum de l'énergie potentielle, c'est une position d'équilibre stable. À ce moment-là, si j'écarte l'objet de cette position-là, il sera ramené à sa position d'équilibre. Lorsque j'ai un minimum de l'énergie potentielle, je peux donc avoir des oscillations autour de ce minimum.

Notes

Summary

7m 47s

VIII - Oscillateur harmonique 2. Oscillateurs non amortis et énergie

Oscillateur quelconque

Cas à 1 dimension, pour une force qui dérive d'un potentiel :

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\,\vec{e_x}$$

$$F = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_p}{dx} \qquad E_p(x)$$

C'est un autre moyen d'obtenir l'équation différentielle.

Pour avoir des oscillations, il faut être autour d'un *minimum* de E_p

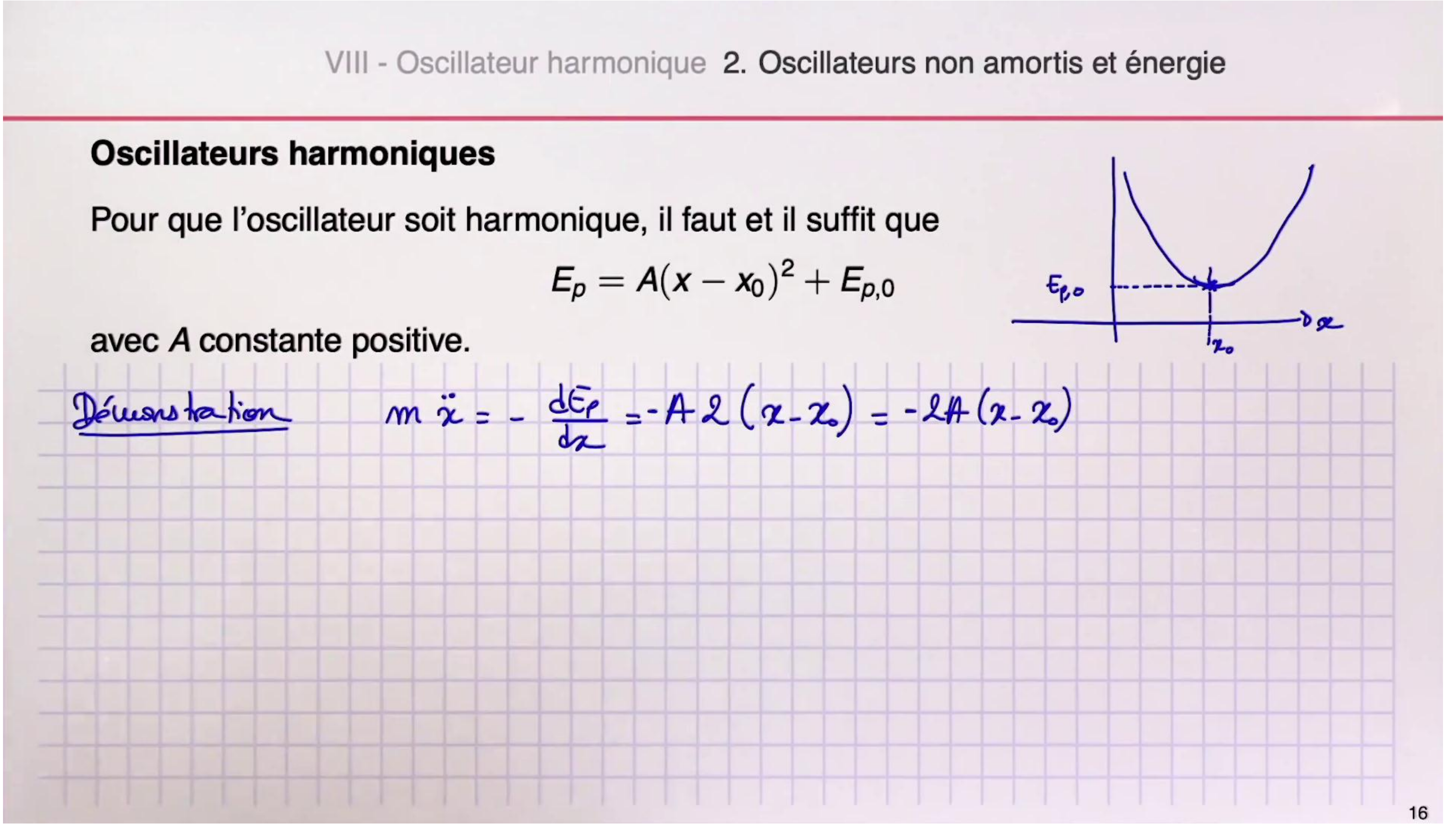
15

Par contre, si j'ai un maximum de l'énergie potentielle, c'est une position d'équilibre instable. Si j'écarte l'objet de la position d'équilibre, il partira de plus en plus loin. Je n'aurai donc jamais d'oscillation. Je ne peux avoir d'oscillation que si je suis autour d'un minimum de l'énergie potentielle. Pour avoir des oscillations, il faut être autour d'un minimum de Ep.

Notes

Summary

9m 24s



Ça, c'est pour avoir des oscillations. Mais que faut il pour avoir un oscillateur harmonique ? Pour que l'oscillateur soit harmonique, il faut et il suffit que la forme de l'énergie potentielle ait celle d'une parabole. Qu'elle ait donc une équation en fonction $A(x - x_0)^2 + Ep_0$ On appelle ça un potentiel quadratique. Avec un a positif, cela nous donnera une parabole tournée vers le haut et avec ce $x - x_0$. Je vois que le minimum se situe en x_0. Par ailleurs, la valeur de l'énergie potentielle pour x_0 est Ep_0. Le minimum est donc fixé en ce point-là. Le paramètre a doit être positif pour une parabole orientée vers le haut et la valeur de a donnera l'ouverture de la parabole. Je vais vous démontrer cette affirmation. L'équation différentielle s'obtient avec $m\ddot{x} = -dEp/dx$. Puisque j'ai ici Ep en fonction de x, la dérivée de Ep vaut 0, c'est une constante, il va falloir que je dérive ce terme. Cela va donc valoir A, la constante devant, $x - x_0$ en dérivée vaut 1, et la dérivée du carré va faire $A2(x-x_0)$. C'est donc $2A(x-x_0)$. Puisque j'ai moins dEp/dx, n'oublions pas le moins situé devant. L'équation différentielle En passant ce terme-là de l'autre côté, j'obtiens donc $m\ddot{x} + 2A(x-x_0) = 0$.

Notes

Summary

9m 53s

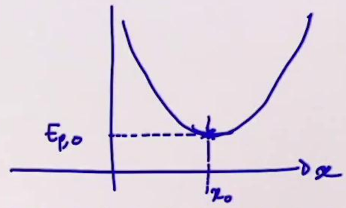
VIII - Oscillateur harmonique 2. Oscillateurs non amortis et énergie

Oscillateurs harmoniques

Pour que l'oscillateur soit harmonique, il faut et il suffit que

$$E_p = A(x - x_0)^2 + E_{p,0}$$

avec A constante positive.



Démonstration $\quad m\ddot{x} = -\dfrac{dE_p}{dx} = -A\,2\,(x - x_0) = -2A(x - x_0)$

$m\ddot{x} = -2A(x - x_0) \Rightarrow m\ddot{x} + 2A(x - x_0) = 0$

Changement de repère $\quad X = x - x_0 \qquad \dot{X} = \dot{x} \qquad \ddot{X} = \ddot{x}$

$m\ddot{X} + 2A(X) = 0 \qquad \ddot{X} + \dfrac{2A}{m} X = 0 \qquad \Omega_0^2 = \dfrac{2A}{m} \qquad \ddot{X} + \Omega_0^2 X = 0$

Oscillateur harmonique $\quad \Omega_0 = \sqrt{\dfrac{2A}{m}}$ car $A > 0$:)

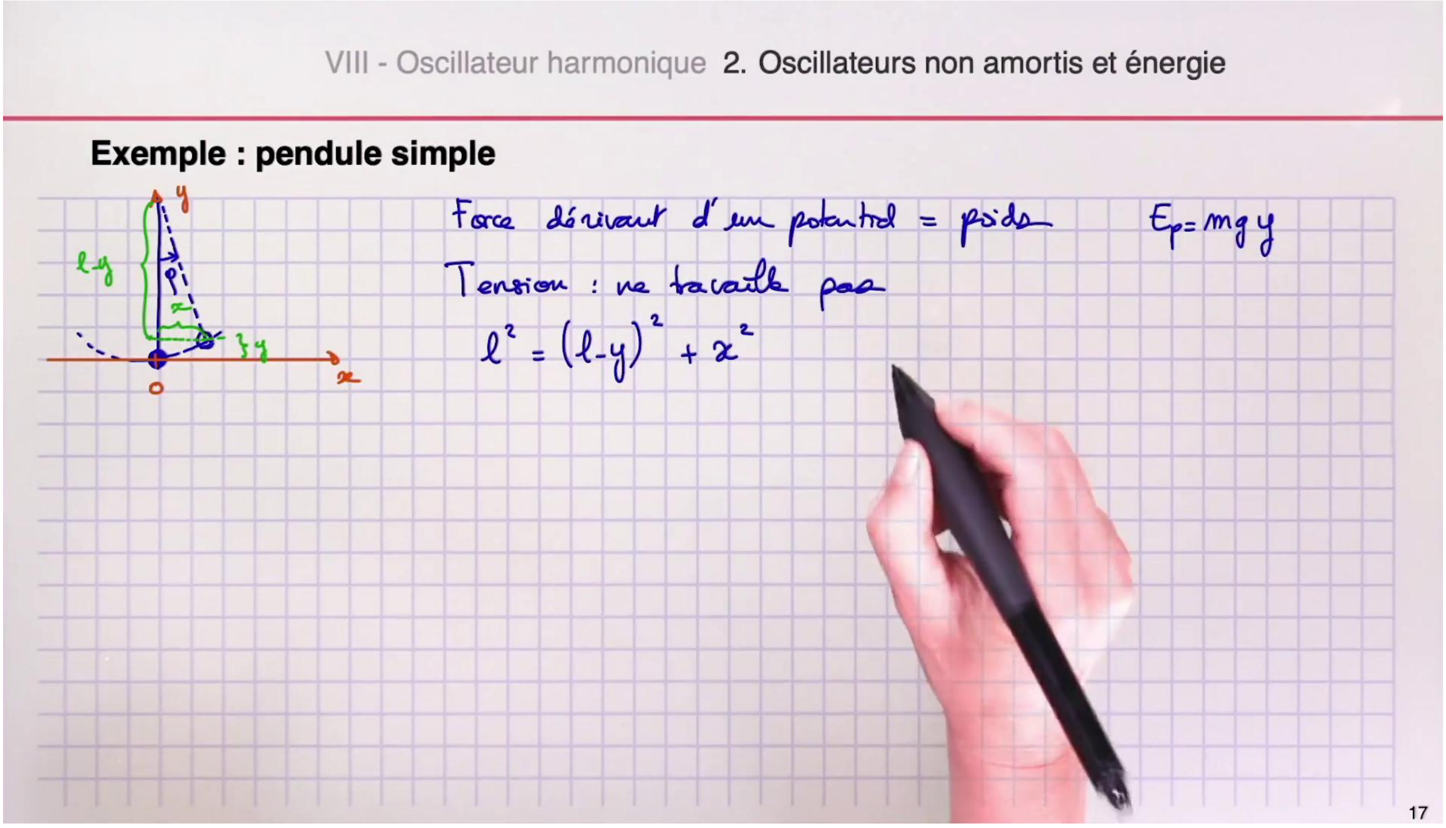
16

J'ai une équation différentielle qui a presque l'allure que nous avions tout à l'heure. Il y a bien ẍ, x, mais je suis un peu ennuyée par ce moins x_0. Ce que je vais faire, c'est un changement de repère. Je vais placer mon origine nouvelle en x_0. Je vais prendre pour cela un deuxième axe X. La coordonnée X vaudra zéro lorsque x vaut x_0. Dans ce cas-là, la coordonnée X sera égale à la coordonnée x moins x_0. X est aussi une fonction du temps. Lorsque je la dérive, une fois, j'obtiens X point, je dois dériver x-x_0, la dérivée de x, c'est x point et comme x_0 est une constante, sa dérivée vaut zéro. Donc la dérivée X point est égale à x point. De la même manière, Ẍ sera à égal à ẍ. Je vais maintenant remplacer ici les petits x avec des grands X. m, nous avons dit grand Ẍ est égal à petit ẍ plus 2A et petit x-x_0 vaut grand X. J'ai donc une équation différentielle Ẍ + 2A/m*X = 0 En appelant Ω_0^2 = 2A/m j'obtiens Ẍ + Ω_0^2X = 0. C'est donc un oscillateur harmonique de pulsation Ω_0 = √2A/m. Nous voyons que ça marche, car grand A est positif. Donc la contrainte A positif qui me permettait d'avoir une parabole orientée vers le haut, donc un minimum de l'énergie potentielle est bien cruciale pour avoir une pulsation réelle. Nous voyons donc qu'effectivement, lorsque j'ai l'énergie potentielle de forme quadratique avec A constante positive, j'ai un oscillateur harmonique.

Notes

Summary

11m 57s

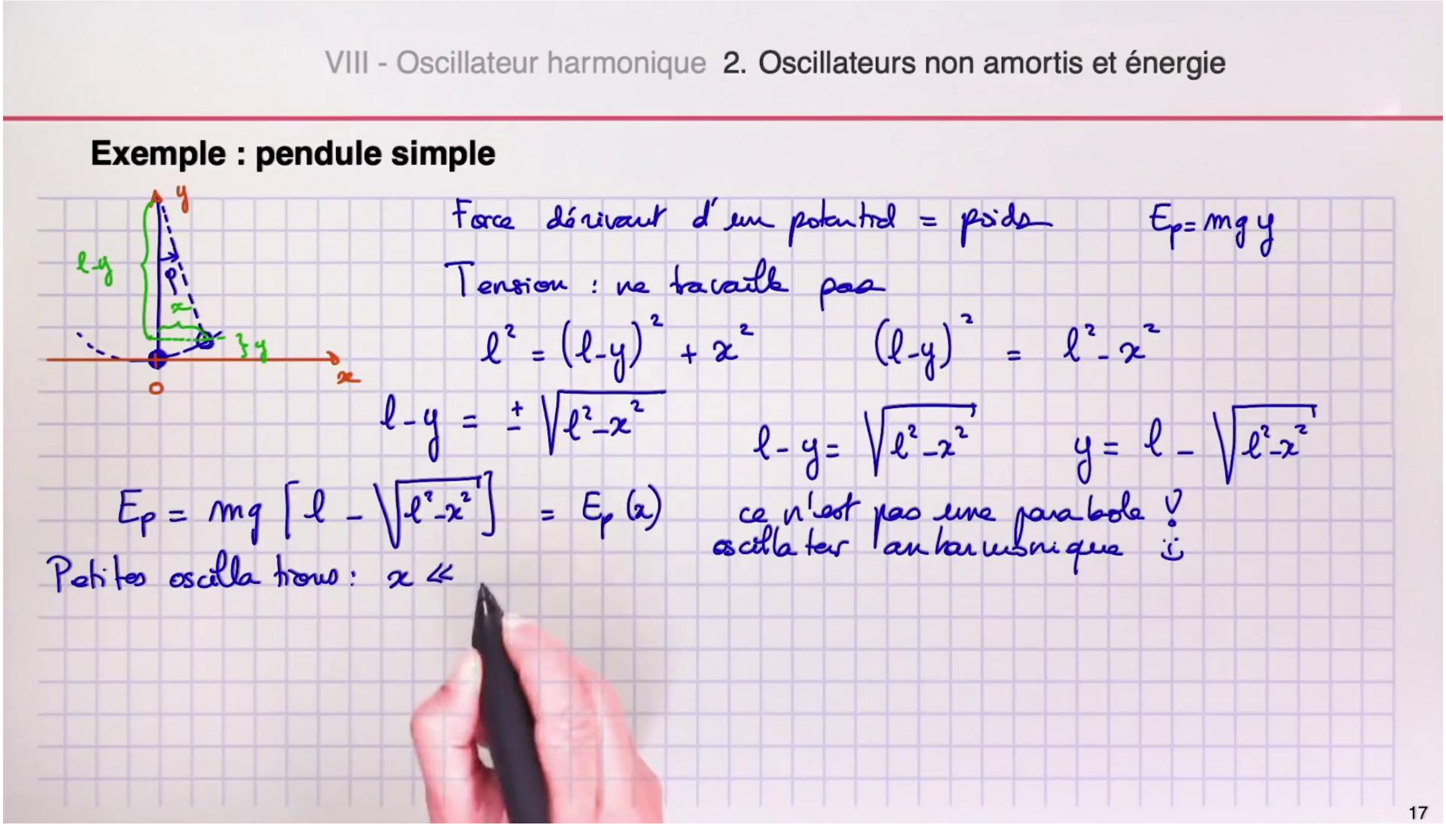


Nous allons prendre maintenant un exemple avec le pendule simple et nous allons voir que le traitement par l'énergie n'est pas si ça. Comment traiter ce pendule simple ? Le paramètre que nous avions utilisé pour paramétriser le problème était l'angle φ. Mais pour la notion d'énergie potentielle, nous avons besoin des coordonnées d'espace. Je vais prendre un axe Ox orienté vers la droite, le zéro étant lorsque la masse est en zéro. L'axe Oy vertical vers le haut. La seule force dérivant d'un potentiel est le poids. La tension ne travaille pas. Je n'aurai donc pas à m'en préoccuper dans le bilan d'énergie. L'énergie potentielle liée au poids, Ep, est égale à mgh, l'altitude, ici, l'altitude est la coordonnée y. Je prends l'origine de l'énergie potentielle lorsque la masse est à l'équilibre. Le lien entre y et x se trouve dans le triangle rectangle que j'ai ici. La longueur du fil est toujours l. La longueur du côté horizontal est x. Je trouve la coordonnée y à cet endroit-là. La longueur du dernier côté est donc l-y. Dans ce triangle rectangle, l'hypoténuse au carré est égale à la somme des carrés des deux autres côtés. l^2 est donc égal à $(l-y)^2 + x^2$. Je recherche y. Donc $(l-y)^2 = l^2-x^2$.

Notes

Summary

14m 22s

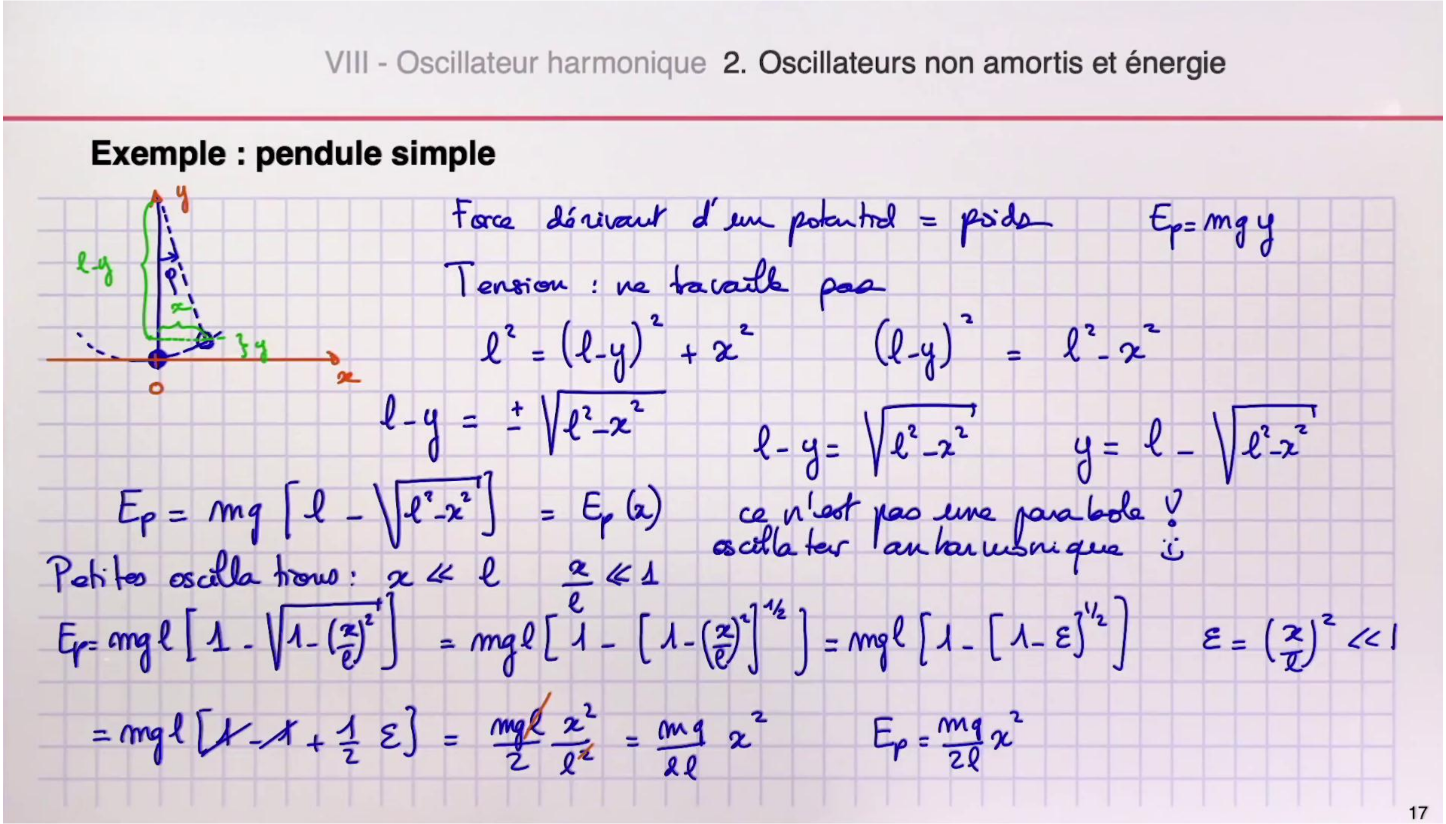


l-y = ± $\sqrt{l^2-x^2}$. Déjà, x sera de toute façon plus petit que l, donc l^2-x^2 sera positif ou nul, je n'ai pas de problème pour prendre la racine. Par ailleurs, je vais rester dans des oscillations avec la corde au pire à l'horizontale. y vaudra au maximum l, donc l-y sera toujours positif ou nul. Cela signifie que le moins n'est pas possible, je n'ai que le plus. l-y = $\sqrt{l^2-x^2}$. Cela me permet d'obtenir y = l - $\sqrt{l^2-x^2}$. L'énergie potentielle en fonction de x va donc s'écrire Ep = mg[l - $\sqrt{l^2-x^2}$] C'est bien une fonction de x, mais alors ça n'est pas du tout une parabole. Ça n'est pas une fonction $A(x-x_0)^2 + Ep_0$. C'est normal, nous avons dit que dans le cas général, cet oscillateur pendule simple n'est pas un oscillateur harmonique. Le potentiel n'est pas un potentiel quadratique. Donc, l'oscillateur est anharmonique. C'est donc logique. Mais que se passe-t-il si nous nous plaçons dans le cas des petites oscillations ? Dans le cas des petites oscillations, x reste petit. OK, x reste petit, mais devant quoi ? En fait, x reste petit rapport à la longueur du pendule. Je ne vais pas trop loin, verticalement. Je peux donc écrire x bien inférieur à l, ce qui revient à dire que x/l est très inférieur à 1.

Notes

Summary

16m 28s



Je vais donc réécrire l'énergie potentielle en faisant apparaître ce x/l. Cela revient à mettre facteur. Lorsque je mets l en facteur dans la racine carrée, je vois apparaître un l², c'est donc 1-(x/l)². Réécrit avec des puissances, c'est mgl[1-[1-(x/l)²]^1/2] que je peux réécrire mgl[1-[1-ε]^1/2]. ε est ici égal à(x/l)². Puisque x/l est très inférieur à 1, (x/)l² est aussi très inférieur à 1. Le développement limité de 1-ε à la puissance n est 1-nε. n vaut 1/2, c'est 1-1/2ε Puisque j'ai un moins devant, cela va me faire −1+1/2ε. Mon énergie potentielle vaut donc mgl[1-1+1/2ε]. 1-1 se simplifie, il reste 1/2ε, cela fait mgl/2, ε valait x²/l². Je peux simplifier un l et obtenir mg/2l*x². Dans le cadre des petites oscillations, l'énergie potentielle vaut mg/2l*x². C'est bien une énergie potentielle quadratique. L'équation différentielle sera donc une équation différentielle d'oscillateur harmonique.

Notes

Summary

18m 47s

Voilà, nous avons vu que l'approche par l'énergie est un autre moyen d'obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur. Et aussi un moyen simple de voir si on a affaire à un oscillateur harmonique ou pas. C'est pour cela que parfois, on appelle le potentiel quadratique, fonction carré aussi potentiel harmonique.

Notes

Summary

21m 05s