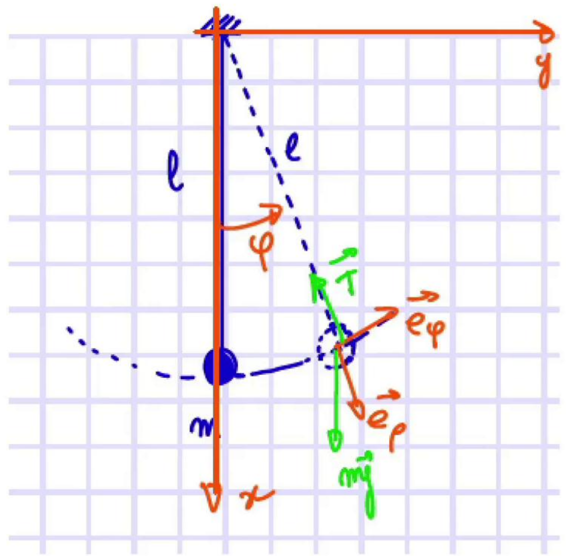
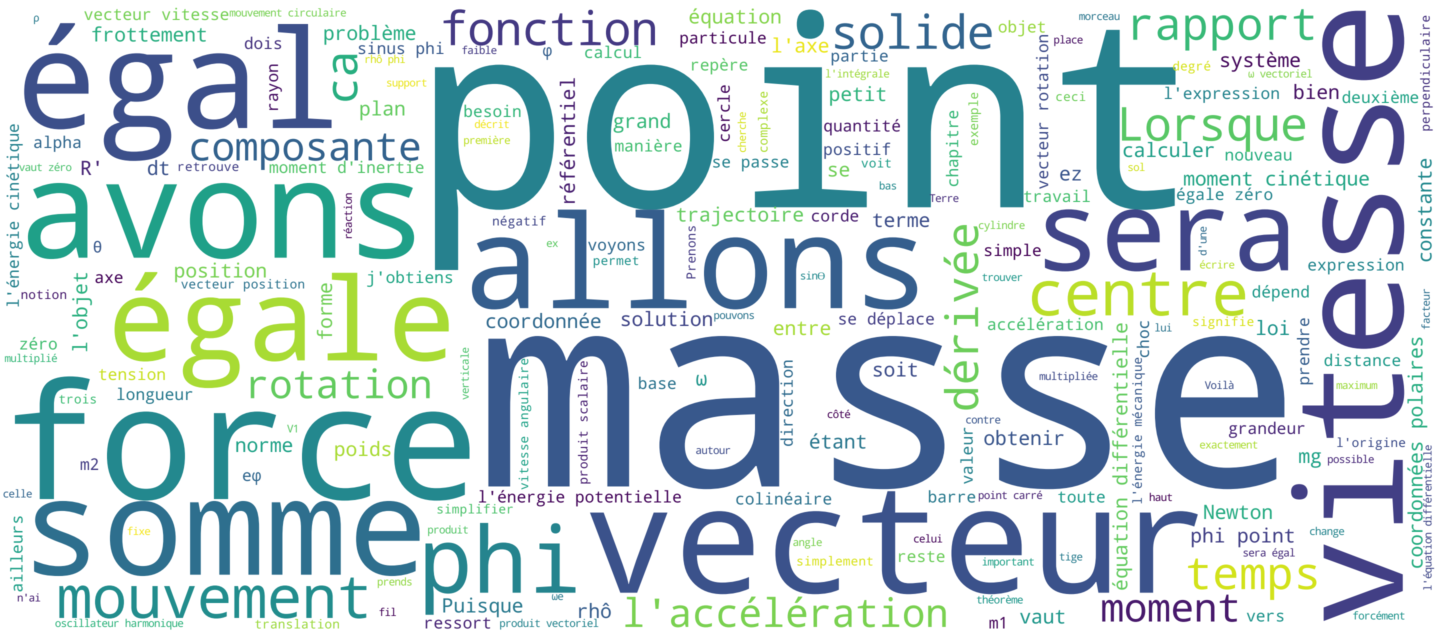


Oscillations libres

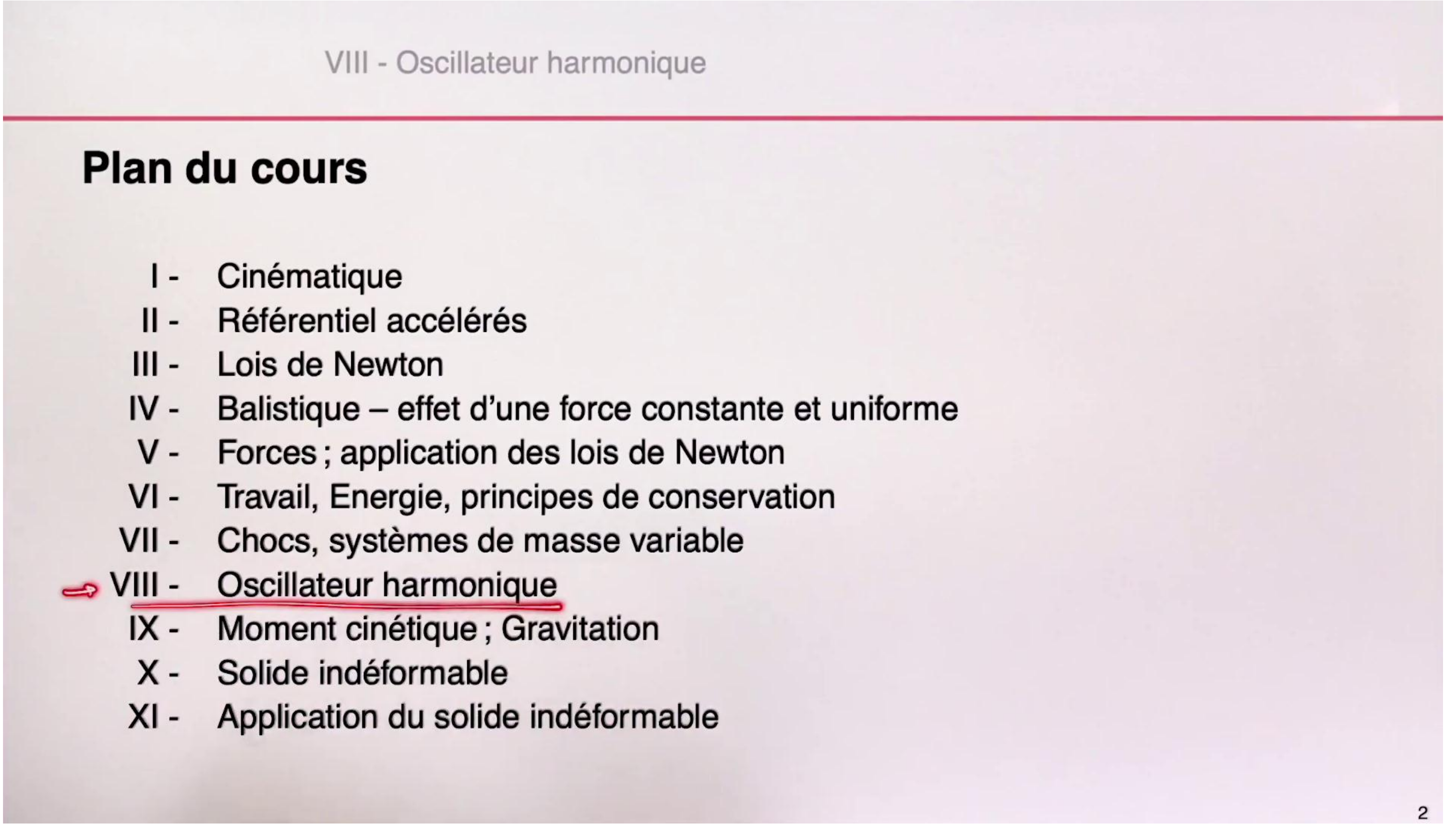
Partie 2

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

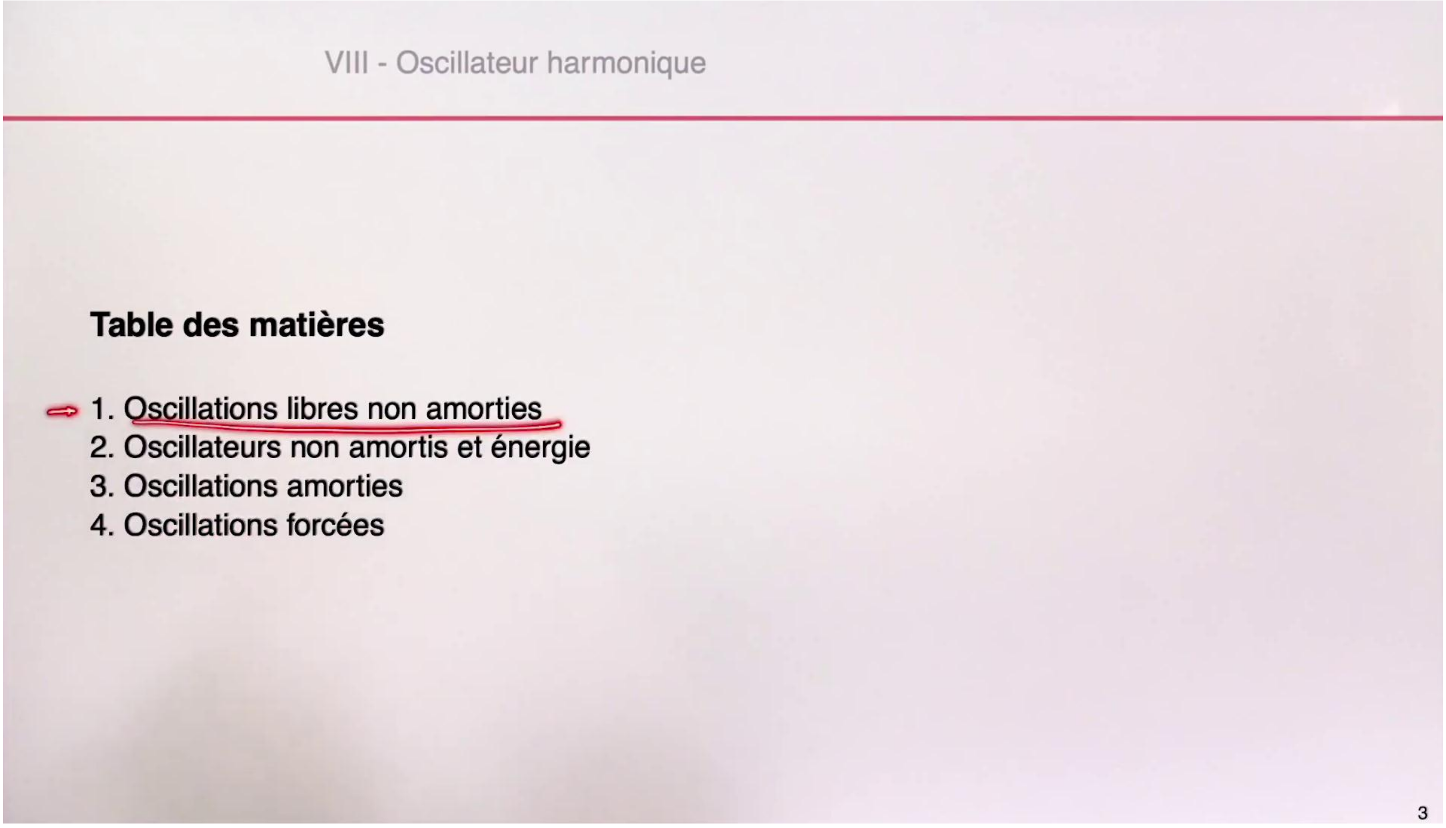


Nous avons vu précédemment en détail un oscillateur libre composé d'un ressort auquel on a accroché une masse. Nous allons maintenant voir un deuxième exemple d'oscillateur. Il s'agit du pendule simple où j'ai une masse accrochée à un fil que je laisse osciller dans un plan.

Notes

Summary

0m 05s

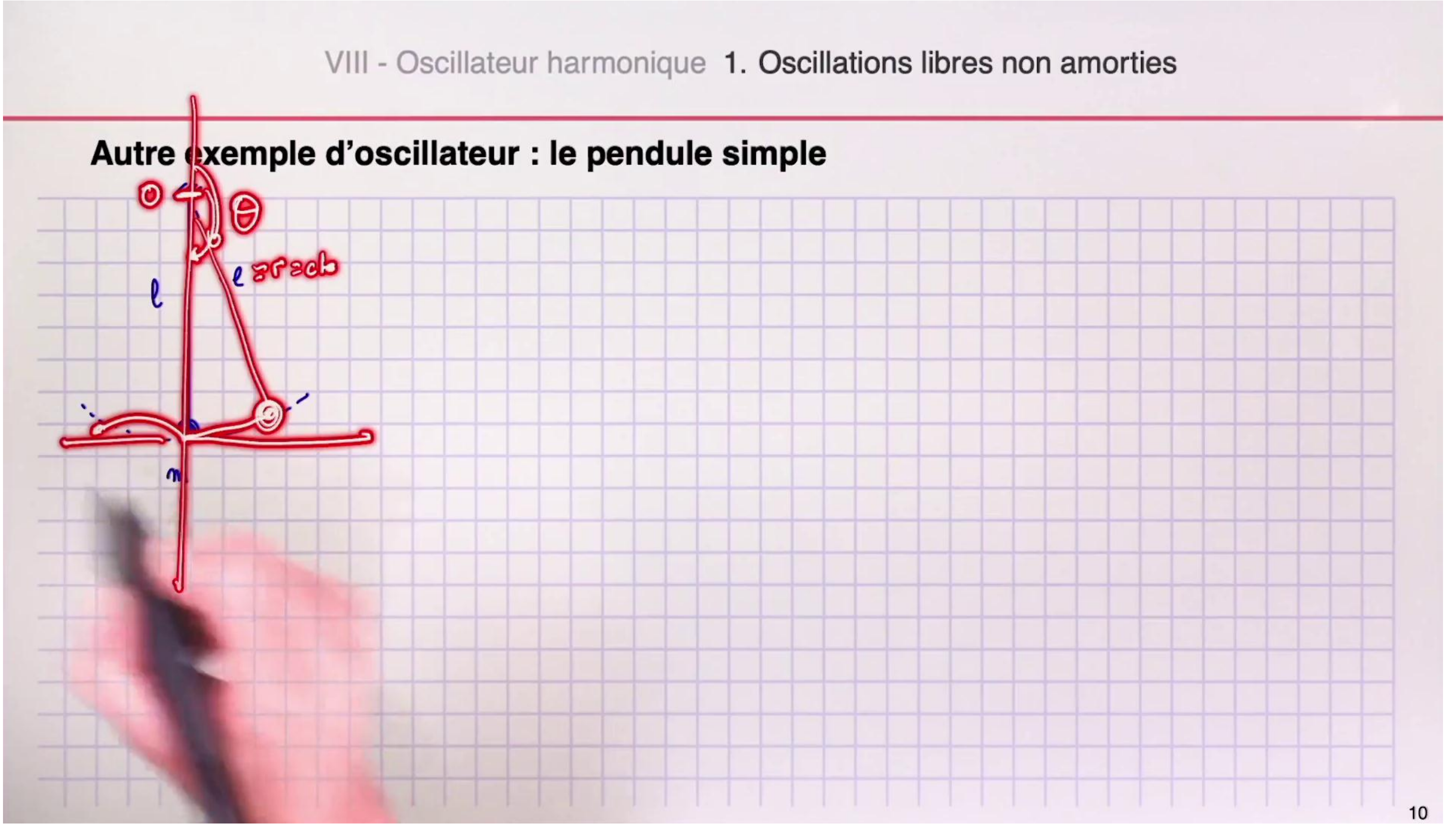


Nous sommes dans le chapitre huit sur l'oscillateur harmonique et nous allons voir un exemple dans les oscillations libres non amorties.

Notes

Summary

0m 22s

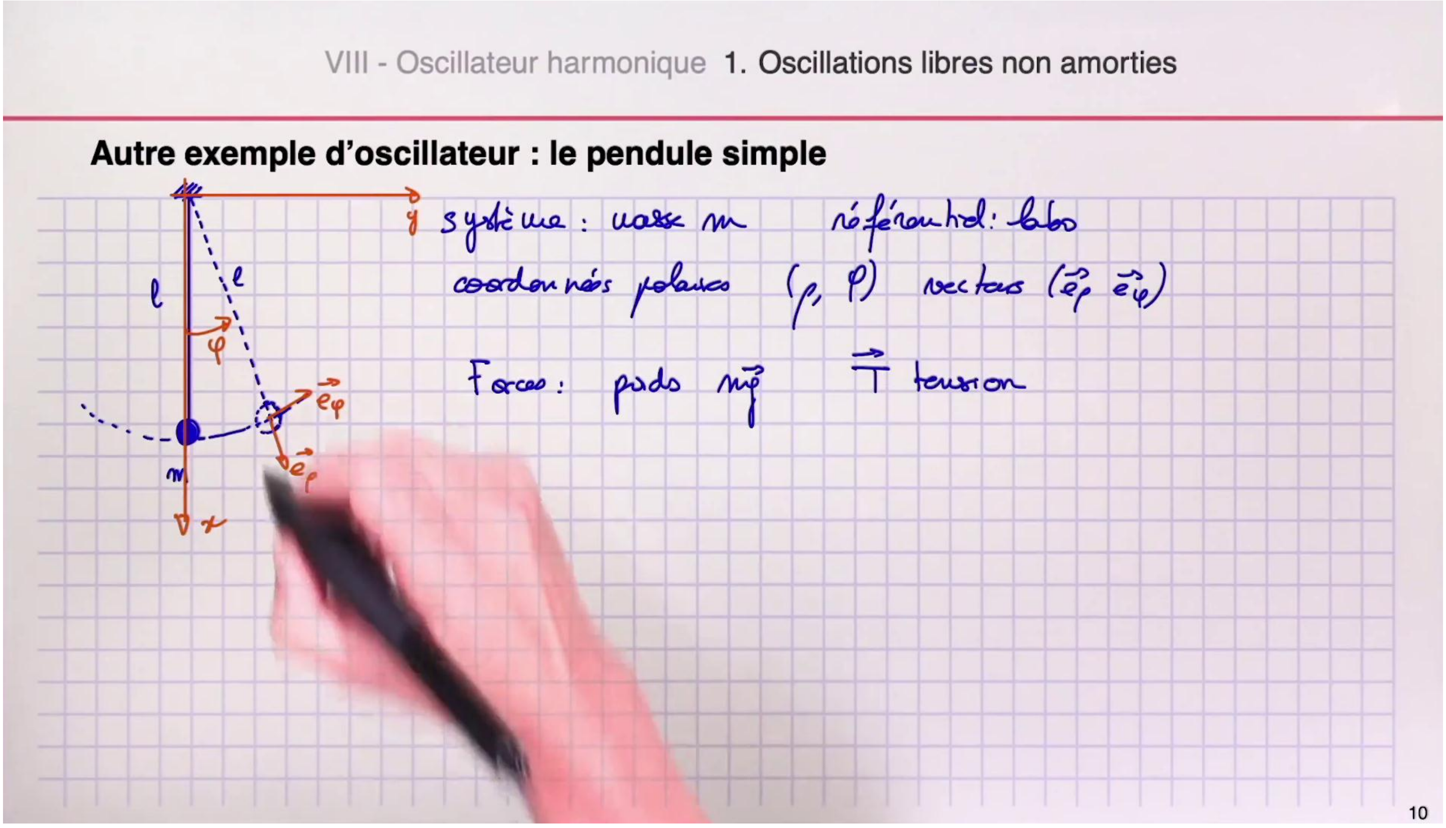


Cet exemple est celui de ce qu'on appelle un pendule simple. Une masse m est pendue à un fil de longueur l. Ce fil est accroché à un point fixe. Nous pouvons écarter la masse de sa position d'équilibre et à ce moment-là, nous verrons le pendule se mettre à osciller. La longueur du fil étant constante, cette oscillation se fera sur une portion de cercle. En l'absence de frottement, on se doute que cette oscillation durera indéfiniment. Maintenant, la question est d'étudier le mouvement de cette masse. La première chose à faire est de trouver le bon paramètre pour l'étudier. Avec ce problème, on pourrait penser que les coordonnées sphériques sont une bonne solution. L'origine O serait ici. Nous prendrions l'angle thêta pour caractériser la position verticale du pendule. R serait égal à l qui serait égale à une constante. Malheureusement, avec ce choix, que va-t-il se passer lorsque le pendule repasse par l'origine ? À ce moment-là, thêta augmente, arrive ici à la valeur de pi, mais l'angle azimutal phi, qui valait zéro, va d'un seul coup passer à pi. Je vais avoir besoin de deux paramètres : l'angle thêta et l'angle phi, et je vais en plus avoir une discontinuité sur l'angle phi.

Notes

Summary

0m 31s

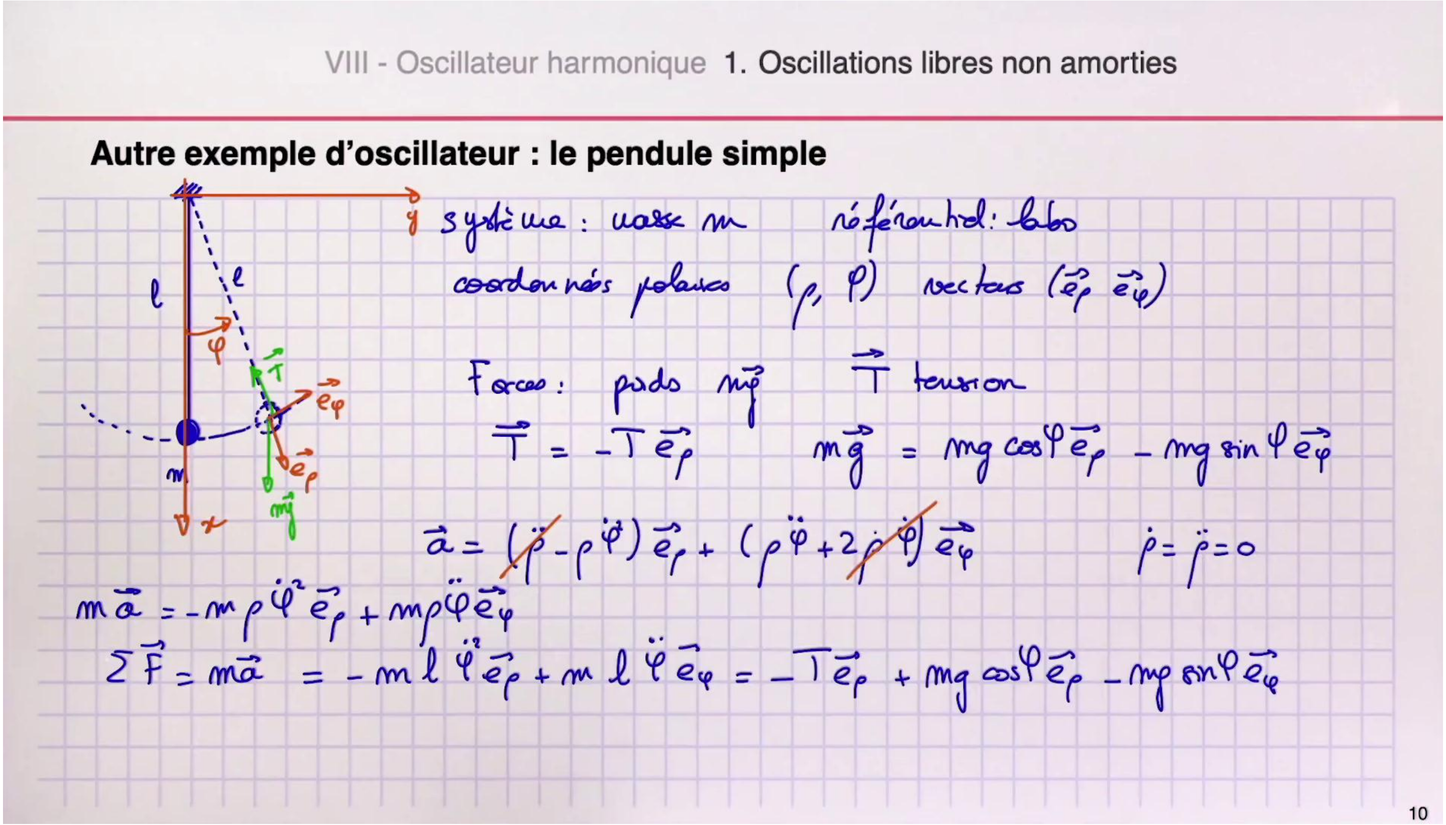


C'est donc un très mauvais choix de coordonnées. Il sera bien plus judicieux de trouver un système de coordonnées dans lequel je n'aurai besoin que d'un seul angle et idéalement, je souhaite avoir ce paramètre égal à zéro lorsque le pendule est à l'équilibre. Tout va se passer dans un plan vertical, mais je peux parfaitement prendre des coordonnées polaires dans ce plan. Si en plus, je prends l'axe ox vertical vers le bas et donc l'axe oy vers la droite, l'angle phi des coordonnées polaires remplira exactement ce que je cherche. De plus, l sera égale à rhô, sera égal à une constante. J'aurais bien donc décrit mon problème uniquement avec un angle qui pourra être positif ou négatif et qui sera égal à zéro lorsque la masse est verticale à l'équilibre. Nous allons donc avoir comme système à étudier : la masse. Nous nous placerons dans le référentiel du laboratoire et les coordonnées seront les coordonnées polaires. Les vecteurs de base des coordonnées polaires seront donc e rhô et e phi et les coordonnées rhô et phi. Les forces en présence sont le poids mg et la tension dans la ficelle T. Le poids est forcément vertical, quant à T, elle est collinaire au fil.

Notes

Summary

2m 01s

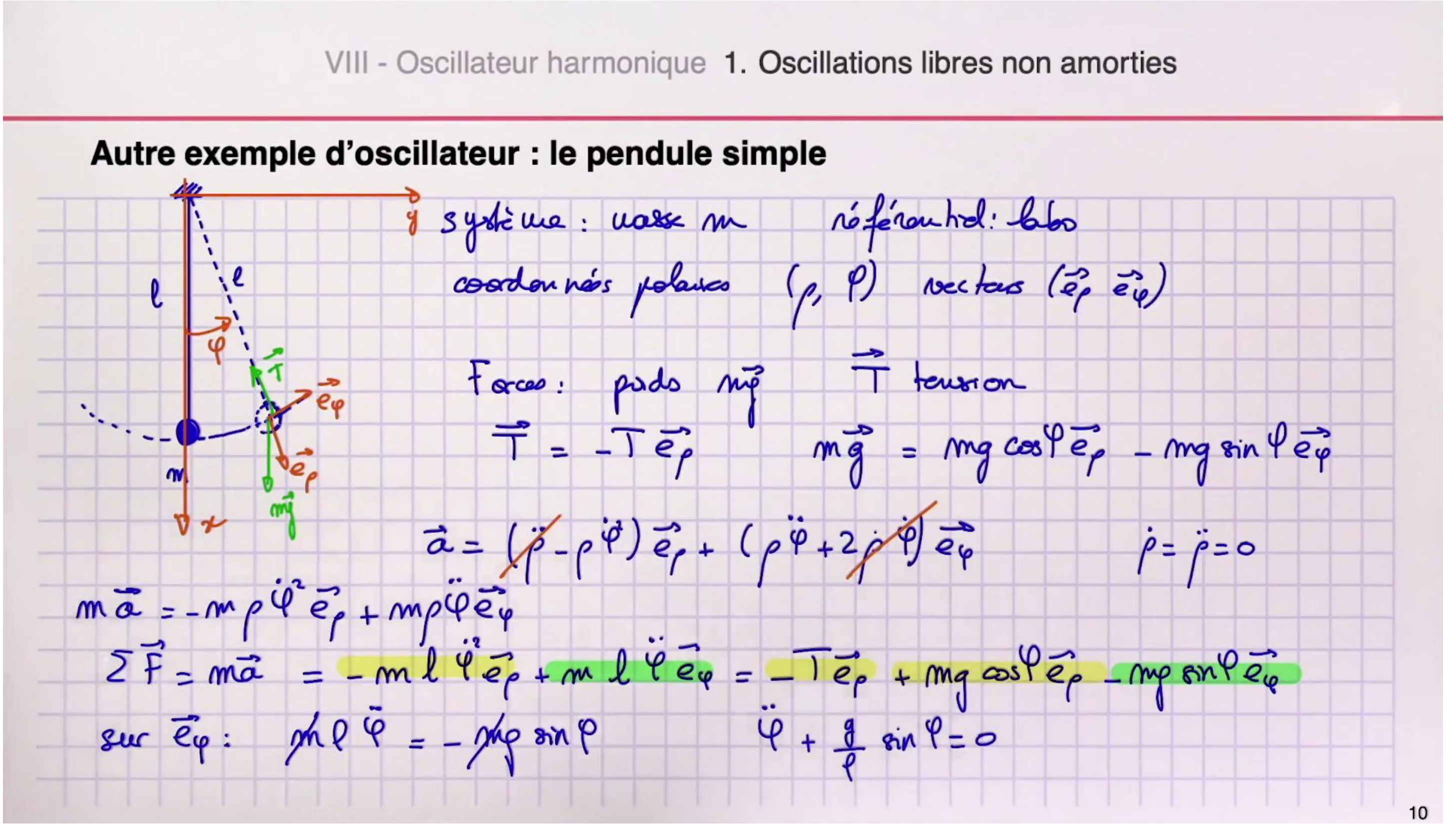


T n'a donc de composante que sur e rhô et en moins e rhô. Mg a une composante sur e rhô et une composante sur e phi. Lorsque je projette mg sur e rhô, je retrouve un mg cosinus phi sur les e rhô positifs. Sur e phi, mg se projette en moins sinus phi. Puisque nous sommes en coordonnées polaires, nous allons utiliser l'expression de l'accélération en coordonnées polaires. Rhô deux points moins rhô phi point carré, e rhô plus rhô phi deux points plus deux rhô point phi, point e phi. Puisque la ficelle reste tendue, l égale constante égale rhô, donc rhô point égale rhô deux points égale zéro. Cela me permet de simplifier deux termes. L'expression de l'accélération multipliée par la masse sera donc ma égale moins m rhô phi point carré e rhô plus m rhô phi deux points e phi. Je vais maintenant écrire somme des forces égale ma, ce qui me donne moins m rhô, qui est égale à l, je le rappelle, phi point carré e rhô plus m ro, qui vaut l, phi deux point e phi est égal à moins T e rhô plus mg cosinus phi e rhô moins mg sinus phi e phi. Mon expression a donc une composante sur e rhô, aussi bien du côté de l'accélération que du côté de la force, et une partie sur e phi.

Notes

Summary

3m 34s

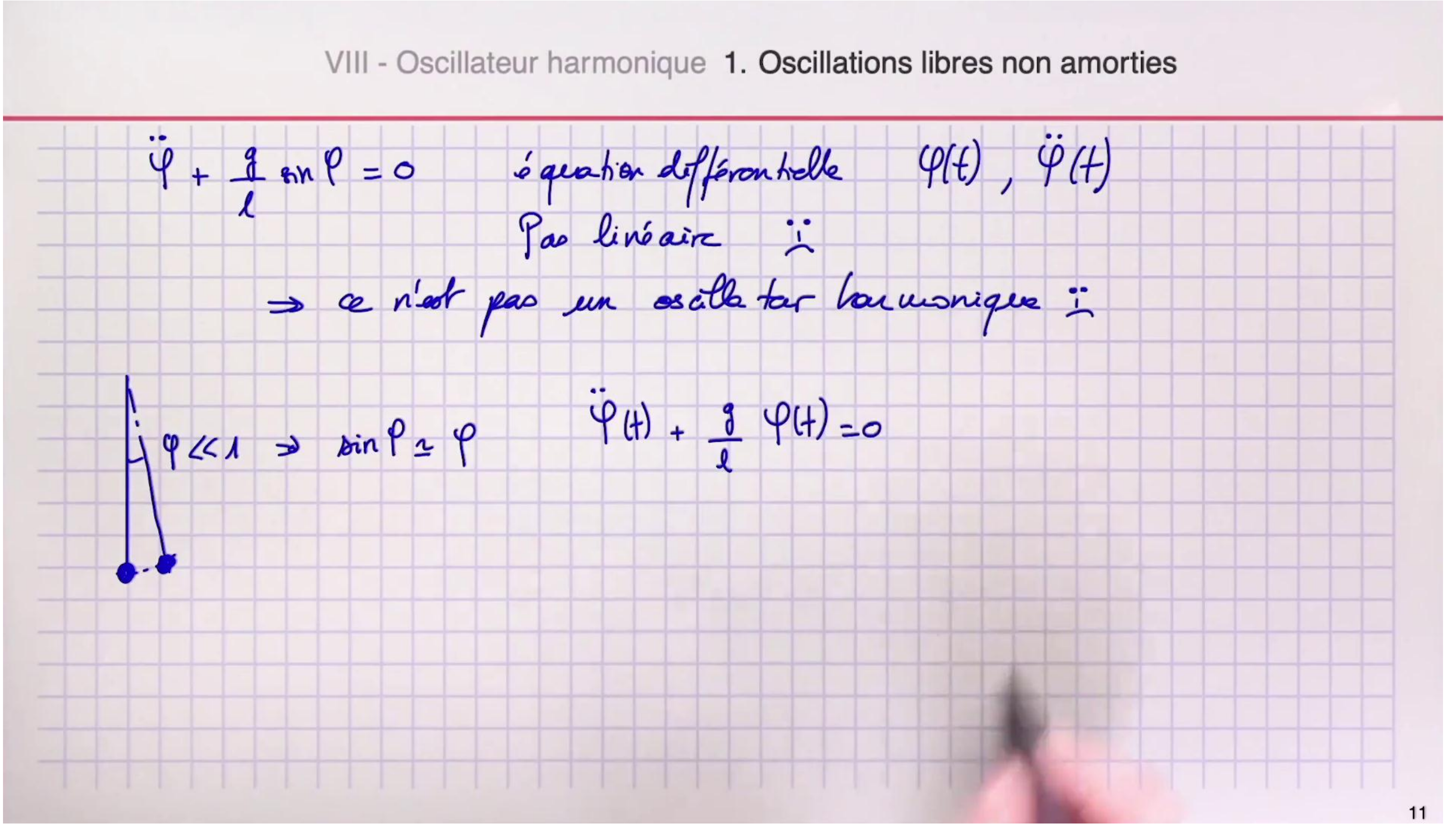


La partie sur e rhô contient la tension dans la corde que je ne connais pas. C'est donc une inconnue qui m'encombre. Mais heureusement, si je m'intéresse uniquement à ce qui se passe sur e phi, je vais obtenir une équation qui ne comprendra que des grandeurs, soit que je connais, soit que je cherche. Je vais donc projeter cette équation sur e phi. ml phi deux points égale moins mg sinus phi. Je peux simplifier par m, diviser par l et obtenir phi deux points plus g sur l sinus phi égale zéro.

Notes

Summary

5m 39s

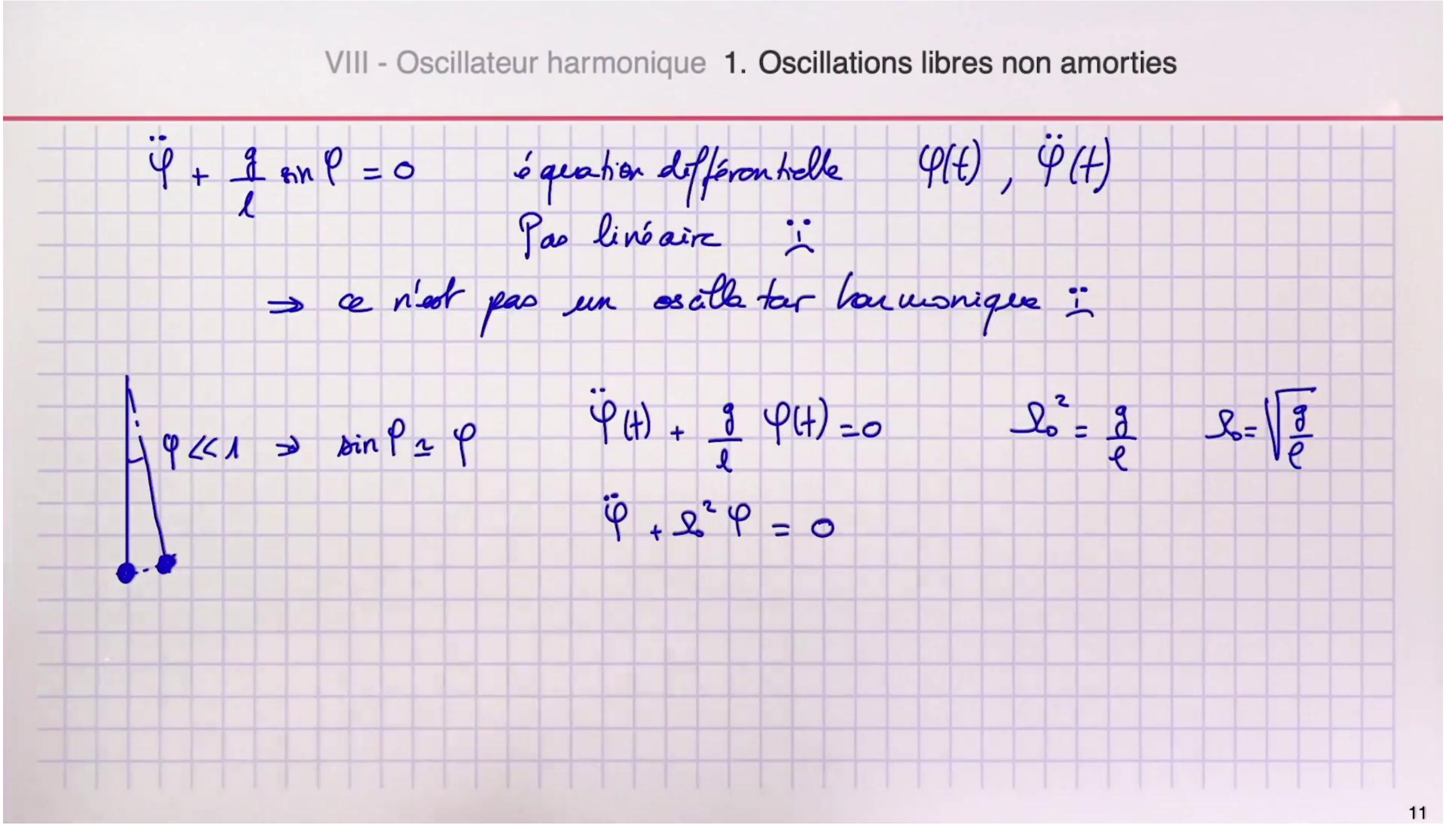


C'est donc mon équation différentielle. Phi deux points plus g sur l sinus phi égale zéro. C'est effectivement une équation différentielle. C'est une équation qui lie phi de T, la dérivée seconde phi deux points de T en une équation égale zéro. Mais là, j'ai un gros problème par rapport à tout à l'heure. Ici, j'ai phi de T, mais là, j'ai sinus de phi de T. Ça n'est pas une équation différentielle linéaire. Cette équation différentielle, je ne sais pas la résoudre. Je ne peux pas vous donner de recette de cuisine comme avant. Elle ne peut être résolue complètement que de manière numérique. Ça veut dire que c'est l'équation différentielle d'un oscillateur qui n'est pas un oscillateur harmonique. Mais heureusement, nous avons un moyen de nous en sortir, au moins dans certains cas. Supposons que nous écartions la masse m d'un angle phi petit. Si phi est très inférieur à 1, alors nous pouvons utiliser l'approximation : sinus phi à peu près égal à phi. Dans ce cas-là, mon équation différentielle va se réécrire : phi deux points de T plus g sur l phi de T est égal à zéro. À condition d'appeler omega 0 carré égale g sur l, soit omega zéro racine de g sur l.

Notes

Summary

6m 19s

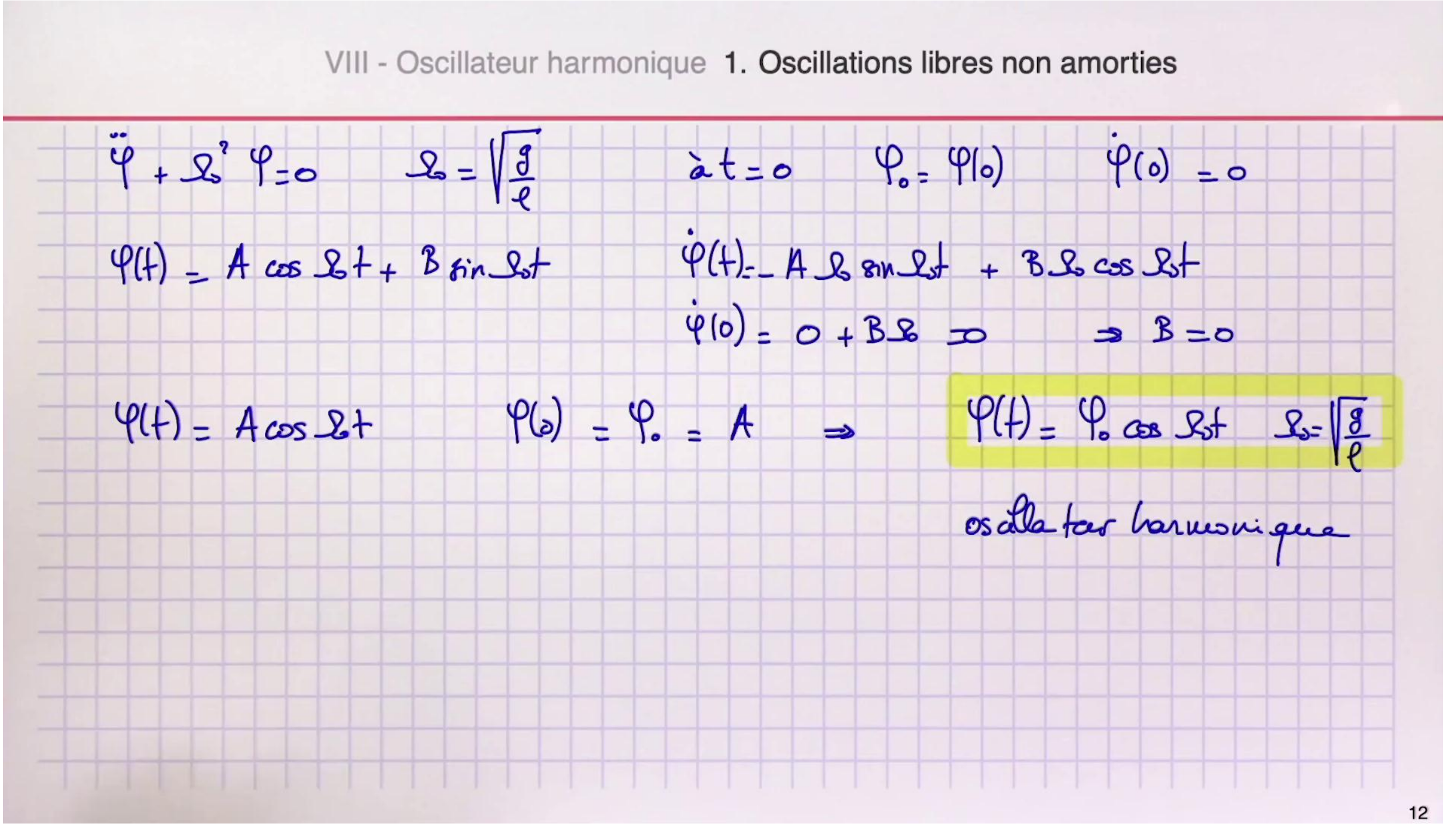


Je retrouve une équation qui a la forme : phi deux points plus omega 0 carré phi est égal à zéro. Cette équation a la même forme que l'équation obtenue dans le cas du ressort. Simplement, au lieu d'avoir un x, on a un phi. Puisque l'allure est la même, les solutions seront identiques. C'est tout l'intérêt d'avoir utilisé ce omega 0 qui nous permet d'avoir une équation de forme générique et d'appliquer toujours la même solution aux équations de même type. La seule différence, c'est que le omega 0 dépendra de paramètres différents.

Notes

Summary

7m 56s



Nous allons donc maintenant chercher la solution de cette équation. Nous aurons aussi besoin des conditions initiales. Or, à T égale zéro, nous avons lâché la masse d'un angle donné qui est phi 0, qui est donc phi de 0 et nous l'avons lâché sans vitesse angulaire initiale, donc phi point de 0 vaut zéro. La solution générique de cette équation différentielle est de la même forme que pour le ressort. Cela sera donc phi de T égale A cosinus omega 0 T plus B sinus omega 0 T. Phi points sera donc égal à moins A omega 0 sinus omega 0 T plus B omega 0 cosinus omega 0 T. Phi point de 0 vaudra donc le premier terme 0 plus B omega 0, cosinus de 0, c'est 1. Or, phi point de 0 valant zéro, j'obtiens B égale zéro. J'ai donc phi de T est égal à A cosinus omega 0 T, le terme avec B a disparu, phi de 0 valait phi 0, mais c'est aussi A cosinus de 0 soit A. J'ai donc au final phi de T est égal à phi 0 cosinus omega 0 T, avec omega 0 égale racine de g sur l. À nouveau, la pulsation propre ne dépend pas de l'amplitude phi 0. J'ai donc bien un oscillateur harmonique. Utiliser l'approximation des petits angles, phi très inférieur à 1, me permet d'avoir un oscillateur harmonique.

Notes

Summary

8m 39s

$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0 \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad$ à $t = 0 \qquad \varphi_0 = \varphi(0) \qquad \dot{\varphi}(0) = 0$

$\varphi(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t \qquad \dot{\varphi}(t) = -A \Omega_0 \sin \Omega_0 t + B \Omega_0 \cos \Omega_0 t$

$\dot{\varphi}(0) = 0 + B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$\varphi(t) = A \cos \Omega_0 t \qquad \varphi(0) = \varphi_0 = A \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega_0 t \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

oscillateur harmonique

$\varphi \ll 1 \Rightarrow$ oscillateur harmonique

OK si $\sin \varphi \simeq \varphi \qquad \varphi = 20° = 0{,}35$ rad $\qquad \sin(0{,}35) = 0{,}343$

$\varphi = 30° = 0{,}52$ rad $\qquad \sin(0{,}52) = 0{,}5$

12

En gros, ça marche lorsque sinus phi à peu près égal à phi. Que se passe-t-il si phi vaut 20 degrés ? 20 degrés, c'est 0,35 radians. Or sinus de 0,35 vaut 0,343 et pour phi qui vaut 30 degrés, cela fait : 0,52 radians et sinus de 30 degrés, donc de 0,52 vaut 0,5. Nous voyons donc que même pour un angle de 30 degrés, l'erreur que nous faisons en prenant sinus phi est égal à phi n'est que de 10 %. Lorsque nous cherchons à faire des calculs d'ordre de grandeur, cette approximation des petits angles sera même encore valable pour un angle de 30 degrés.

Notes

Summary

10m 37s

Voilà, nous avons vu un deuxième exemple d'oscillateur : la masse accrochée à un fil qui oscille dans un plan. Ce système n'est pas forcément un oscillateur harmonique. Il faut faire une approximation pour être dans le cas de l'oscillateur harmonique. Ce qui est important, c'est qu'on a vu qu'en utilisant les lois de Newton, nous sommes arrivés à une équation différentielle qui a la même forme que celle de l'oscillateur simple. Nous avons donc pu utiliser la même solution. C'est une démarche courante en physique de ramener un problème inconnu à une forme d'un problème connu et d'utiliser la même forme de solution.

Notes

Summary

11m 45s