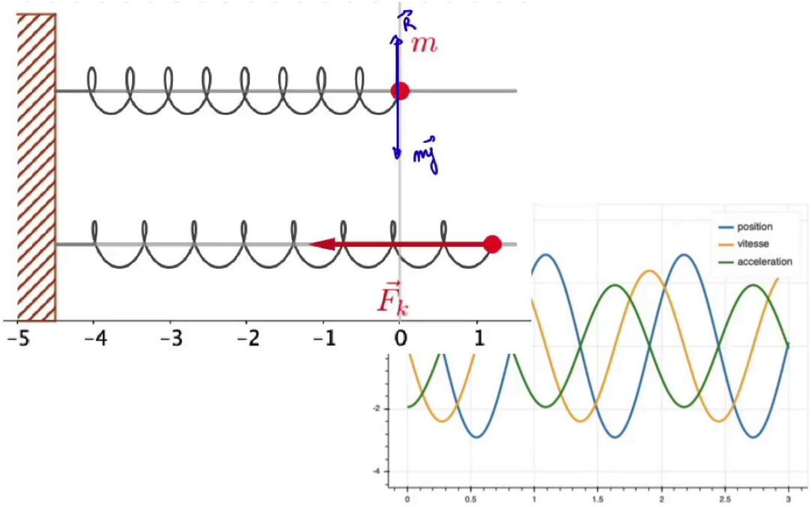
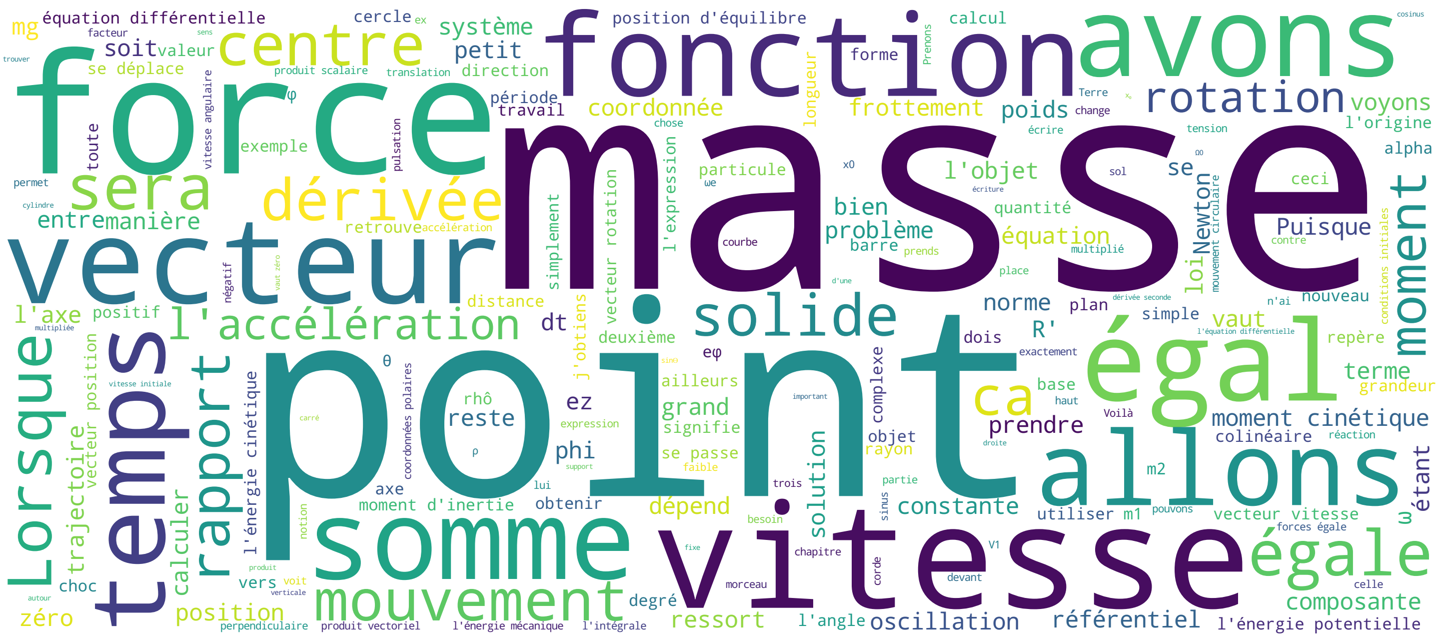


Oscillations libres

Partie 1

Prof. Cécile Hébert



Video

Voilà, nous allons maintenant aborder un nouveau chapitre. C'est le chapitre concernant les oscillations. Nous parlons ici de mouvements périodiques qui se maintiennent au moins pendant un certain temps. Nous allons aller du plus simple au plus complexe. Pour commencer, nous allons étudier un système modèle. Il s'agit d'un ressort auquel j'accroche une masse. Je peux écarter cette masse de sa position d'équilibre et la lâcher. Et on va alors observer des oscillations. Pour l'instant, je vais considérer le cas où il n'y a pas de force de frottement, pas de dissipation d'énergie et donc ces oscillations vont se maintenir indéfiniment.

Notes

Summary

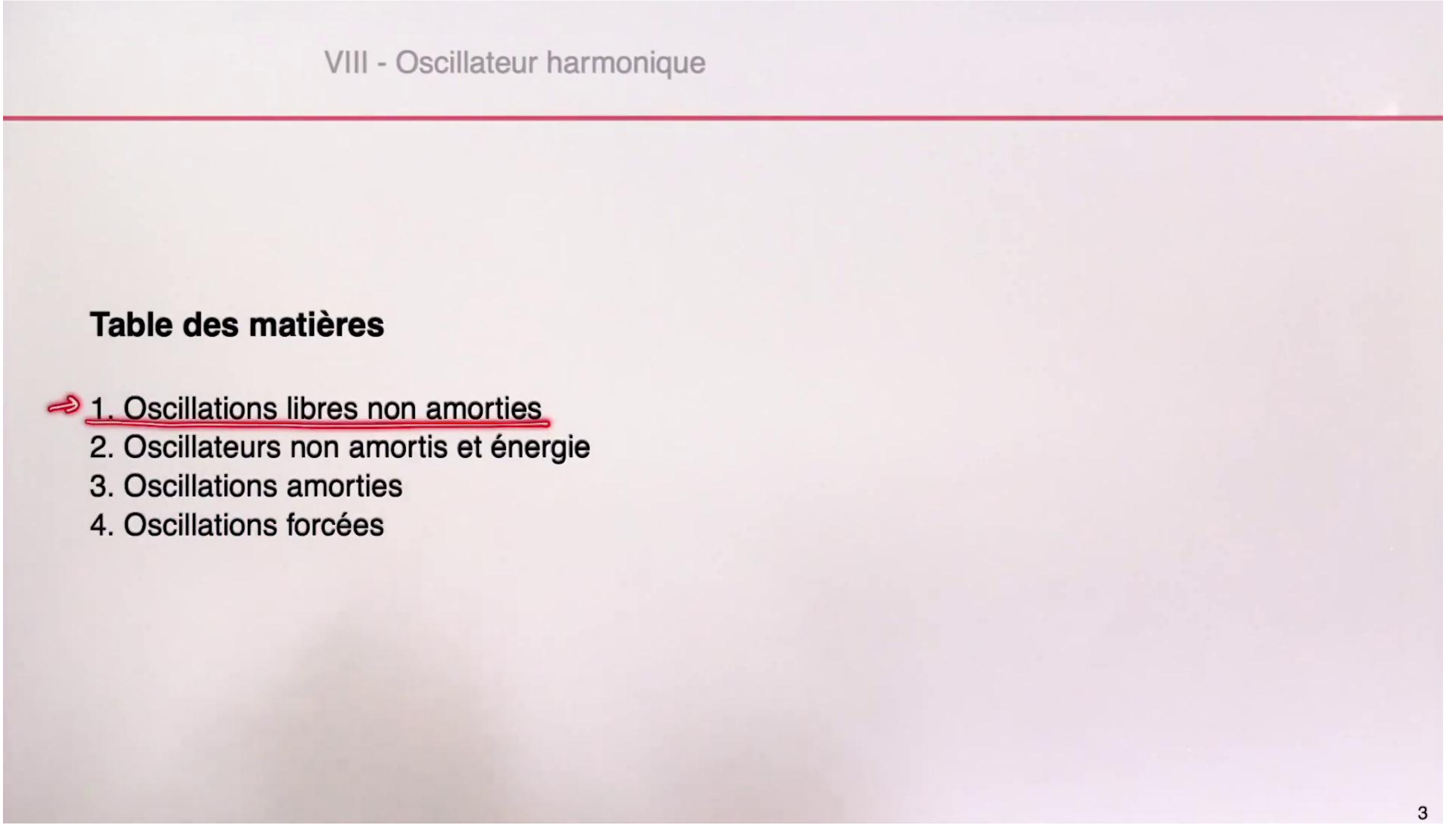
0m 05s

Plan du cours

Notes

Summary

0m 49s

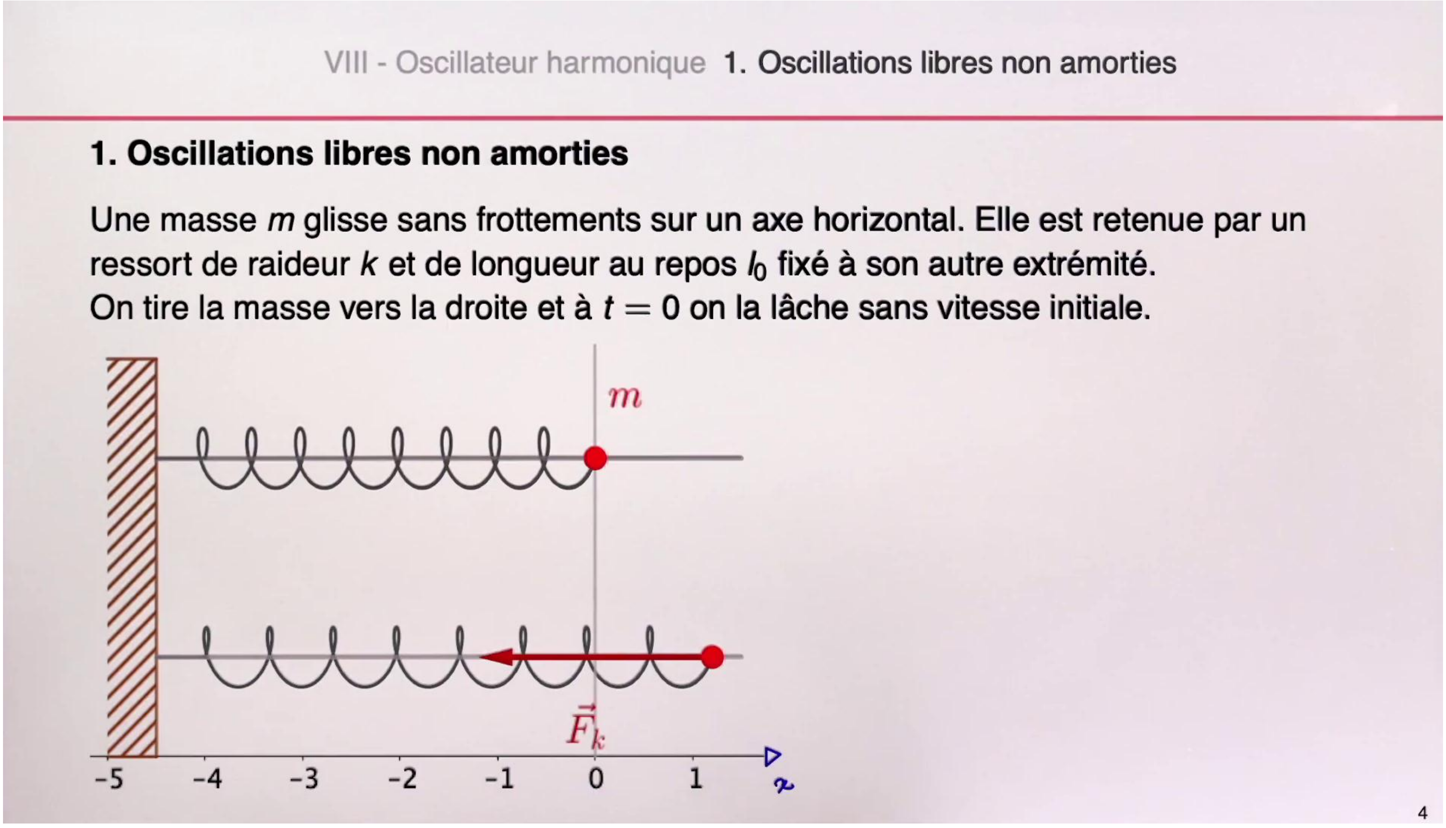


Nous sommes dans le chapitre VIII sur l'oscillateur harmonique et nous allons voir la première partie, les oscillations libres non amorties.

Notes

Summary

0m 50s

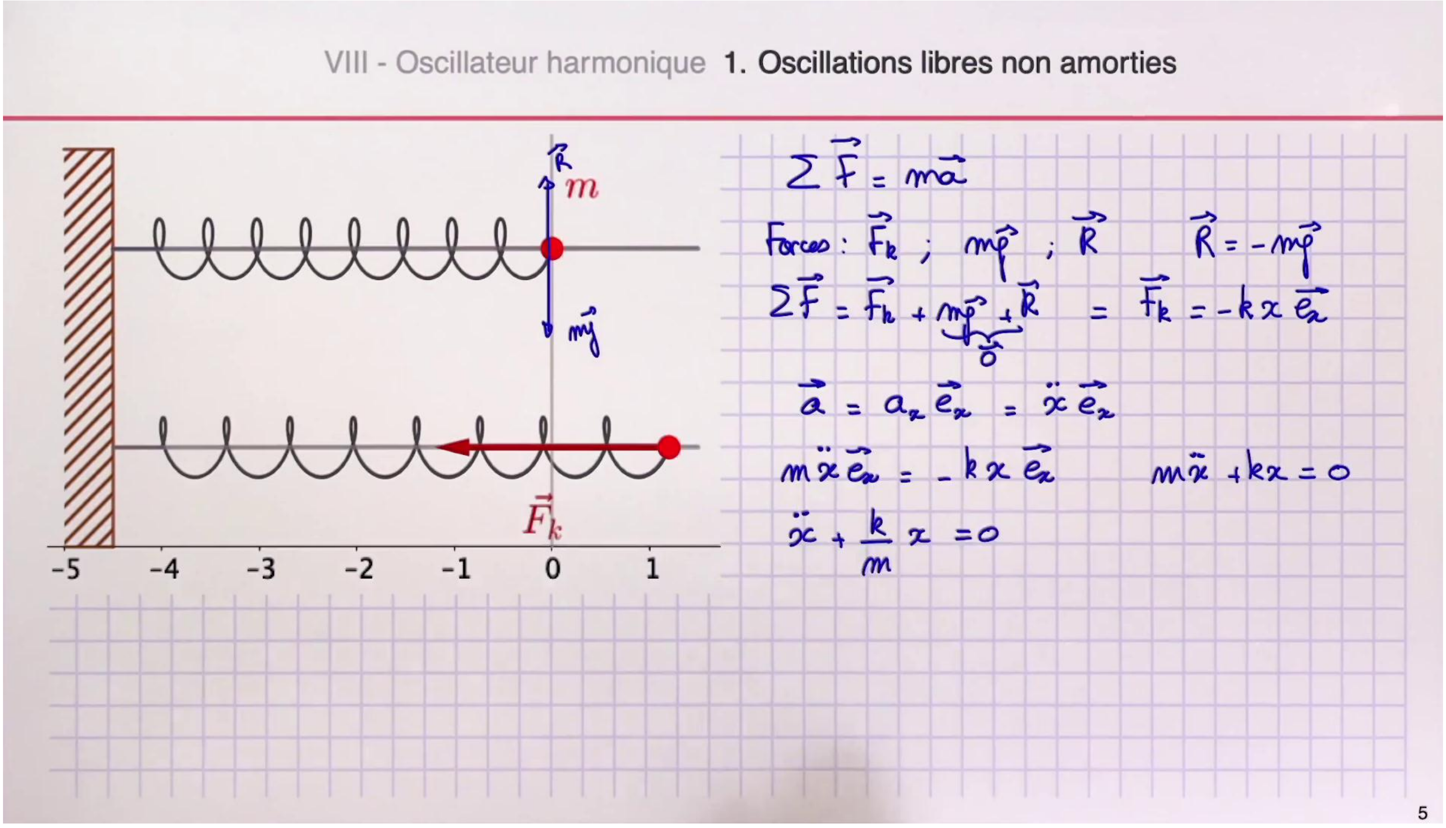


Nous allons utiliser un oscillateur modèle. Une masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal. Elle est retenue par un ressort de longueur au repos l0 et de raideur k. Ce ressort est fixé à une extrémité, à un point fixe et bien sûr à l'autre extrémité, j'ai m qui se déplace sur le rail. Ce que je vais faire, c'est tirer la masse m vers la droite et à t égal 0, la lâcher sans vitesse initiale. Je vais appeler x0 la distance depuis laquelle je la lâche. Dans le référentiel du laboratoire, je vais prendre un repère à une dimension ox et je vais placer l'origine o, de telle manière que la masse m soit en 0 lorsque le ressort est au repos. Lorsque je déplace la masse vers la droite, j'ai un x positif.

Notes

Summary

0m 59s

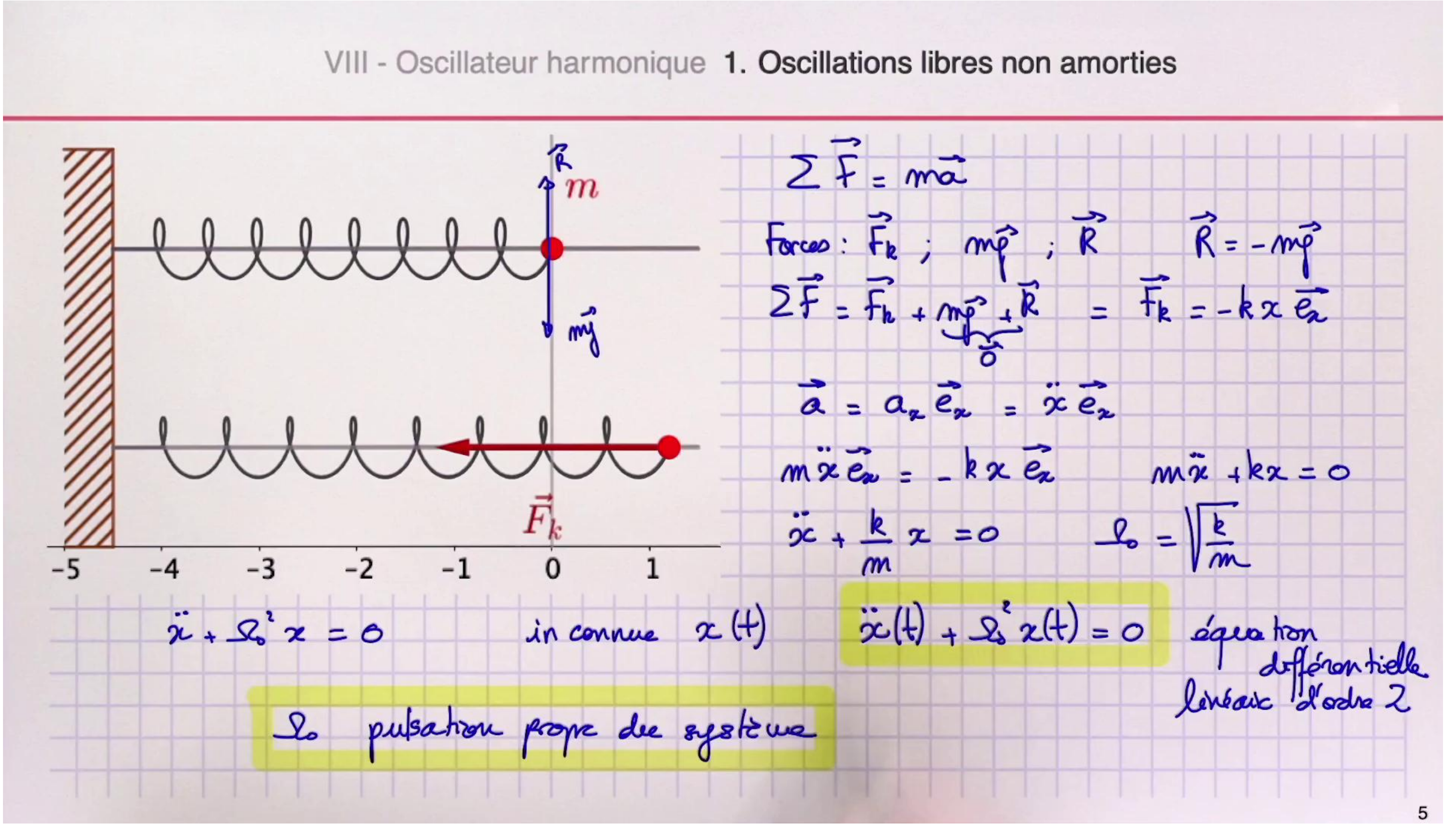


Pour ce faire, nous allons utiliser les lois de Newton et la deuxième en particulier. Somme des forces égale m1. Avec un tel dispositif, les forces en présence sont bien sûr la force de rappel du ressort, mais la masse est aussi sur le rail. Je n'ai pas de frottement, mais j'ai quand même le poids mg et la réaction du rail R. Le rail étant horizontal, R va être égal à -mg. Dont la somme des forces, Fk+mg+r, ces deux derniers termes vont avoir une somme nulle. Il me reste donc somme des forces égale Fk. La force de rappel du ressort dans cette configuration-là est moins kx vecteur de base ex. De plus, j'ai un problème, à une dimension, l'accélération est donc uniquement la composante sur x de l'accélération axex, ce qui est égal à la dérivée seconde de la position x deux points, ex. J'obtiens donc, grâce à Newton, mx deux points ex est égal à -kxex. En ramenant tout du même côté et en projetant sur ex, j'ai comme équation mx deux points plus kx est égal à 0. Ici, nous allons appliquer une démarche courante en physique. Je vais isoler le x deux points, faire diviser tout par m, donc plus k sur mx est égal à 0. Et je vais renommer cette grandeur-là en l'appelant Ω0².

Notes

Summary

1m 59s

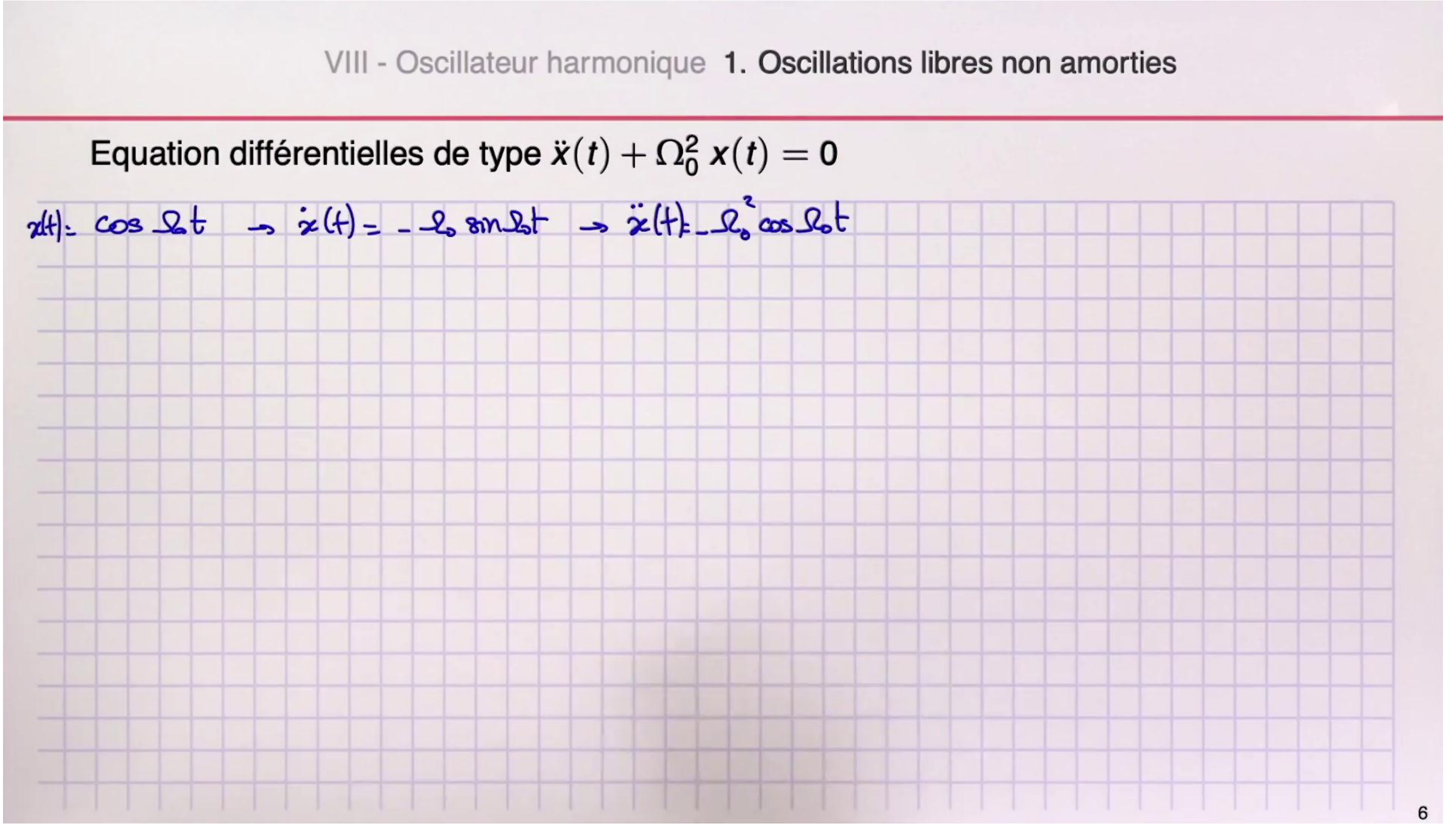


Donc, Ω0 est égal à racine carrée de k/m. Et avec ceci, mon équation serait écrite x deux points + Ω0²x = 0. Attention, car l'inconnu est une fonction x(t). Donc, la dérivée seconde sera aussi une fonction de t, c'est x deux points de t,+ Ω0²x(t)= 0. Nous cherchons donc une fonction qui réponde à cette équation. Cette équation qui lie une fonction et ses dérivées s'appelle une équation différentielle. Celle-ci a la particularité d'être linéaire sur la fonction et ses dérivées et de lier la fonction à la dérivée seconde. C'est donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Par ailleurs, Ω0 sera appelé la pulsation propre du système. Nous verrons pourquoi tout l'heure.

Notes

Summary

3m 52s

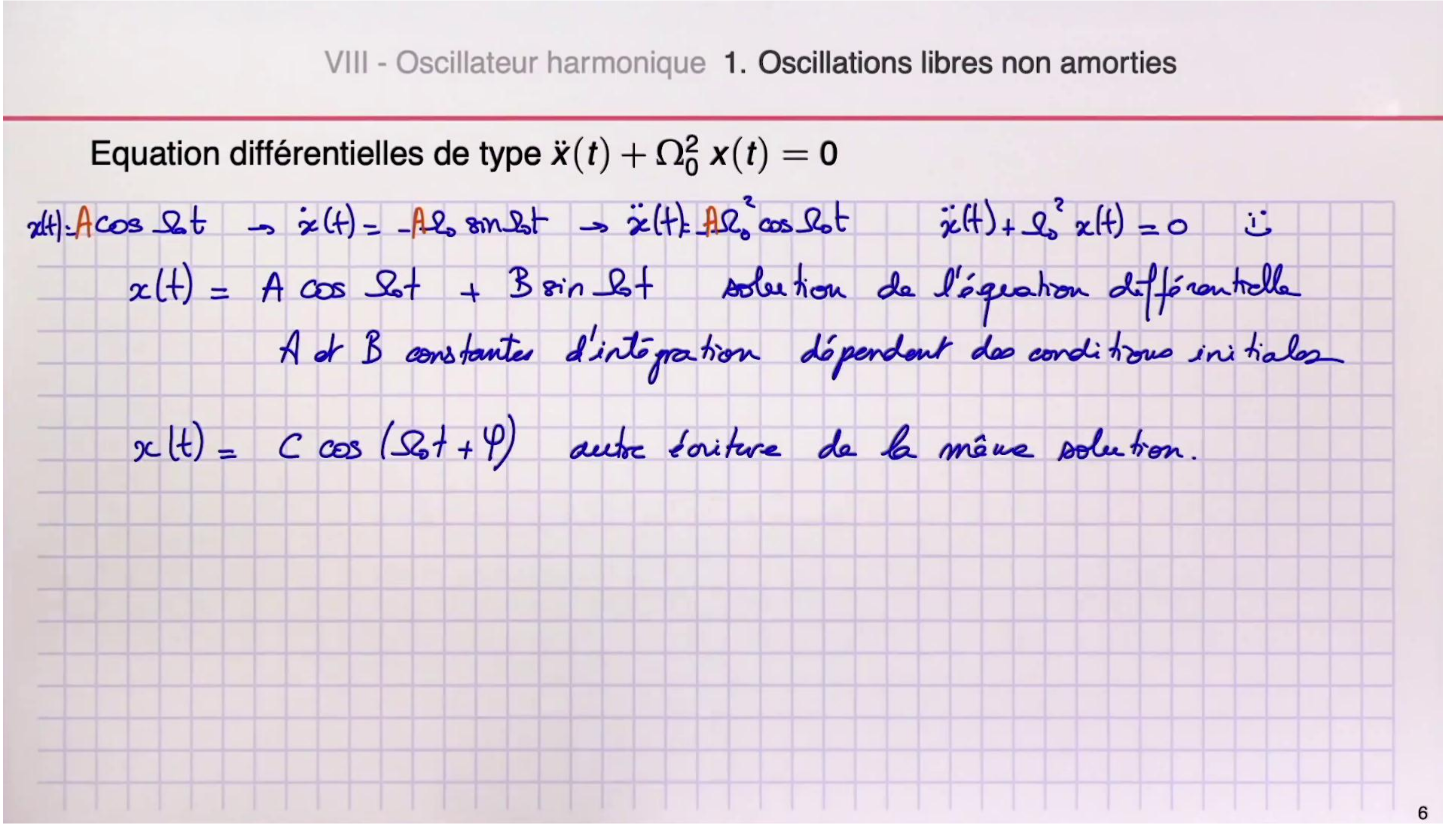


Comme vous n'avez probablement pas vu en mathématiques la résolution de ce type d'équation, je vais vous donner la recette de cuisine pour la résoudre. Cette recette de cuisine sera applicable à toutes les équations de ce type-là que vous rencontrerez en physique. C'est donc une équation linéaire d'ordre 2, mais en plus, ici, j'ai un Ω0², Ω0² étant réel, c'est donc un terme positif. Voyons, nous avons une fonction, avec ici un plus devant et lorsque je la somme avec sa dérivée seconde, je dois obtenir 0. Prenons la fonction cosx. Lorsque je la dérive une fois, j'obtiens −sinx. Lorsque je la redérive une deuxième fois, j'obtiens −cosx. Si je fais donc la fonction plus la dérivée, cosx moins cosx, je vais obtenir 0. Donc, si au lieu de prendre cosx, j'ai cost, deux fois vaut 0. On y est presque, j'ai juste le Ω0² qui est là. J'ai Ω0² devant le x. Pour que la somme fasse 0, il me faudrait Ω0² devant x deux points. Pour y arriver, je n'ai qu'à faire cosΩ0t. Voyons ce qui se passe. Si je prends une fonction de la cosΩ0t, sa dérivée va valoir -Ω0sinΩ0t, sa derivée seconde x deux points (t), -Ω0²cosΩ0t. Lorsque je vais calculer x deux points(t) -Ω0²x(t), x2t, je vais bien obtenir 0.

Notes

Summary

5m 00s



Cette fonction est donc une solution de mon équation différentielle. Mais si je multiplie ma fonction par une constante A, AcosΩ0t, je retrouve ma constante A devant, elle reste avec moi devant, et lorsque je fais la somme des deux, j'obtiens toujours 0. Donc AcosΩ0t est toujours solution de cette équation différentielle. Et puis, si je prends sinus au lieu de cosinus, il va se passer la même chose. Et si je mets BsinΩ0t, ça marchera aussi. Je vous demande donc d'admettre que la solution générique de cette équation différentielle est de la forme x(t) = AcosΩ0t + BsinΩ0t. Et je vous demande en particulier d'admettre qu'avec cette écriture là, vous avez toutes les solutions possibles grâce aux constantes A et B appelées constantes d'intégration. Elles dépendent des conditions initiales. Ceci est donc une façon d'écrire la solution de cette équation différentielle. Il est aussi possible d'écrire la solution de l'équation différentielle sous la forme x(t)=C cos(Ω0t+φ). C'est une autre écriture de la même solution. Pour s'en convaincre, nous allons développer cos(Ω0t+φ) en utilisant cos(a+b)=cosacosb-sinasinb. Cela nous donne x(t)=C[cosΩ0tcosφ-sinΩ0tsinφ].

Notes

Summary

7m 09s

Equation différentielles de type $\ddot{x}(t) + \Omega_0^2\, x(t) = 0$

$x(t) = A\cos\Omega_0 t \rightarrow \dot{x}(t) = -A\Omega_0 \sin\Omega_0 t \rightarrow \ddot{x}(t) = -A\Omega_0^2 \cos\Omega_0 t \qquad \ddot{x}(t) + \Omega_0^2\, x(t) = 0$:)

$x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$ solution de l'équation différentielle

A et B constantes d'intégration dépendent des conditions initiales

$x(t) = C\cos(\Omega_0 t + \varphi)$ autre écriture de la même solution.

$C\left[\cos\Omega_0 t \cos\varphi - \sin\Omega_0 t \sin\varphi\right] = C\cos\varphi \cos\Omega_0 t + [-C\sin\varphi]\sin\Omega_0 t$

$x(t) = D\sin(\Omega_0 t + \varphi)$

ici prenons $x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$

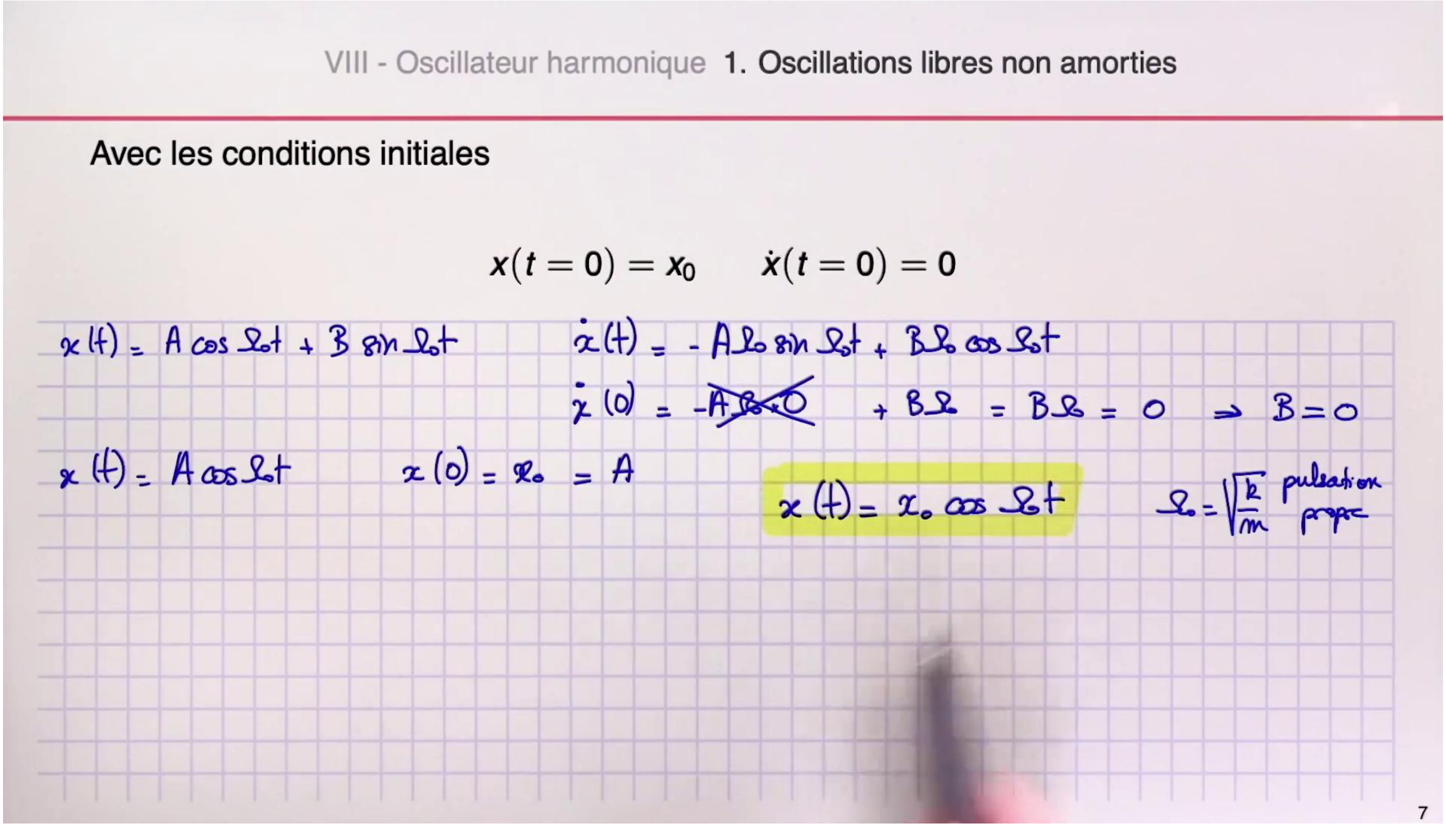
6

Je peux regrouper pour avoir une écriture similaire à celle-ci. C'est donc CcosφcosΩ0t+[-Csinφ]sinΩ0t À ce moment-là, Ccosφ est A et -Csinφ, B. Et je retrouve la même écriture. Il est donc possible d'utiliser cette notation. Et enfin, il serait également possible d'écrire x(t)=Dsin(Ω0t+φ) exactement de la même manière. Nous avons donc trois façons possibles d'écrire la solution de cette équation différencielle. À nous de choisir celle qui sera la plus commode. Dans le problème que nous avons, nous allons choisir cette écriture. Maintenant, il faut trouver A et B, les constantes d'intégration. Cela sera fait grâce aux conditions initiales.

Notes

Summary

9m 03s



Les conditions initiales, c'est dans quelle situation ai-je placé le système à t=0 quand il commence à osciller. À t=0, j'ai écarté la masse de sa position d'équilibre pour l'amener en x0. Donc x(0) vaut x0. Je l'ai lâché sans vitesse initiale, x point (0) vaut 0. Reprenons x(t)= AcosΩ0t+BsinΩ0t, la dérivée première x point (t) vaut donc -AΩ0sinΩ0t+BΩ0cosΩ0t. Puisque la dérivée x point vaut 0 à t=0, je vais commencer par là. Or, x point (0) vaut ici -AΩ0sin0, donc multiplié par 0, ce terme disparaît, +BΩ0cos0, cela vaut 1. C'est donc BΩ0. Nous avons dit que c'est 0. Ω0 ne peut pas être égal à 0. Il reste donc B=0. x(t) s'écrit donc plus simplement AcosΩ0t. Il sera maintenant facile d'utiliser x(0) égal x0. Mais si je mets 0 dans cette équation, je vais obtenir cos0, ce qui vaut 1. Donc x(0) vaut A. J'ai donc A=x0. J'ai donc fini mon travail, obtenu x en fonction du temps x(t)=x0cosΩ0t. Je rappelle que Ω0 valait racine de k/m et que c'est la pulsation propre. C'est effectivement la pulsation de cette fonction cosinus en fonction du temps. Si je regarde x en fonction du temps, qu'est-ce que j'obtiens ? J'ai une fonction cosinus de t.

Notes

Summary

10m 20s

Avec les conditions initiales

$$x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0$$

$x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$ $\qquad$ $\dot{x}(t) = -A\Omega_0 \sin\Omega_0 t + B\Omega_0\cos\Omega_0 t$

$\dot{x}(0) = \cancel{-A\Omega_0 \times 0} + B\Omega_0 = B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$x(t) = A\cos\Omega_0 t$ $\qquad$ $x(0) = x_0 = A$

$\boxed{x(t) = x_0 \cos\Omega_0 t}$ $\qquad$ $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre

Ω_0 grand $\Rightarrow$ oscillations rapides

Ω_0 faible $\Rightarrow$ oscillations lentes.

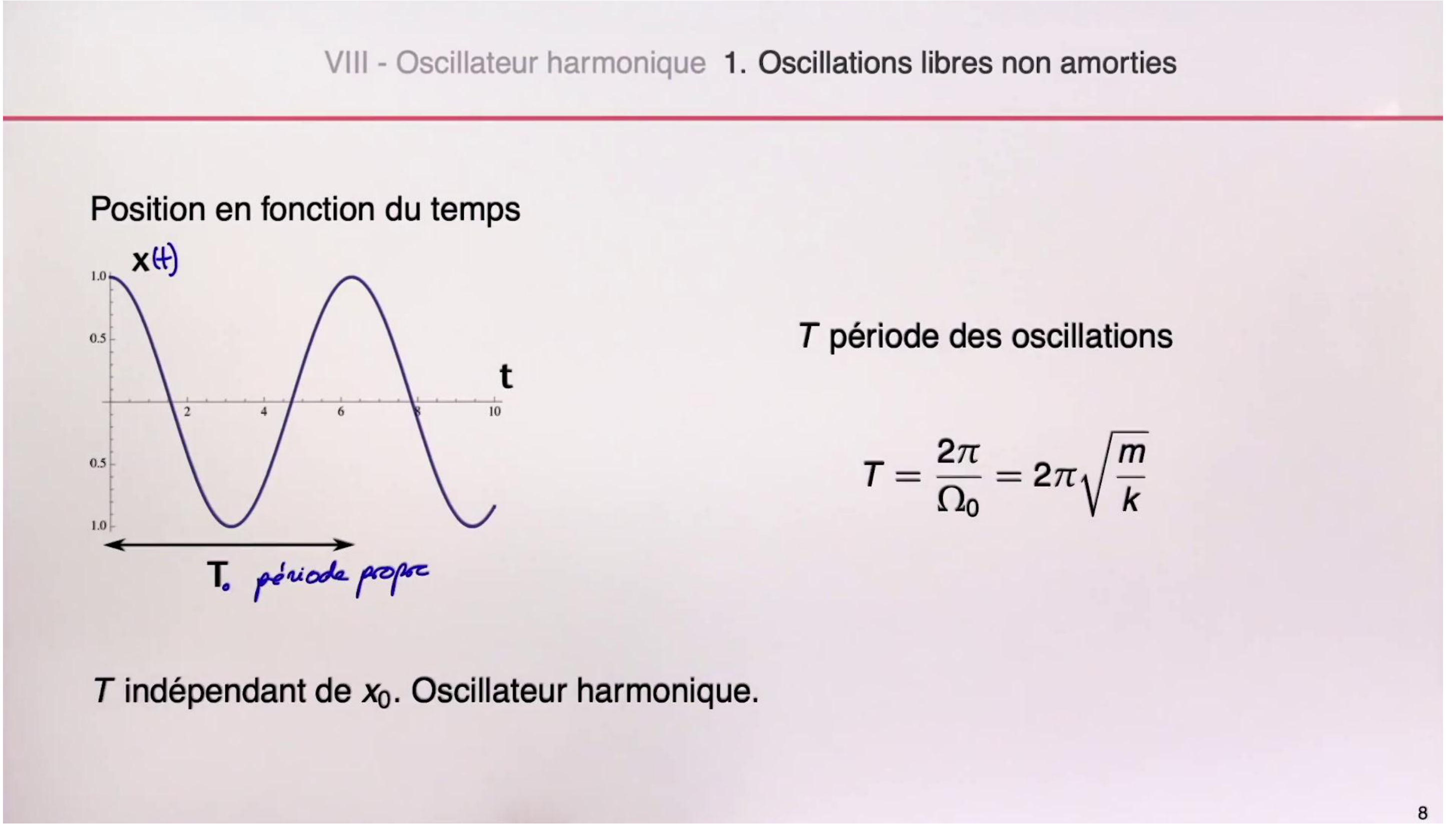
7

Cela veut dire que lorsque le temps avance à t=0, x vaut x0, puis je vais avoir une oscillation de la masse avec un x qui dépend du temps. Cette oscillation va se faire entre x0 et −x0. Si je regarde ce qui se passe sur l'axe avec le ressort, j'ai tout simplement la masse déplacée de sa position d'équilibre qui va revenir à sa position d'équilibre, traverser le 0, repartir à -x0 et osciller entre les deux. C'est donc effectivement une solution d'un oscillateur. Si Ω0 est grand, les oscillations seront rapides. Si Ω0 est plus faible, les oscillations seront plus lentes.

Notes

Summary

12m 37s



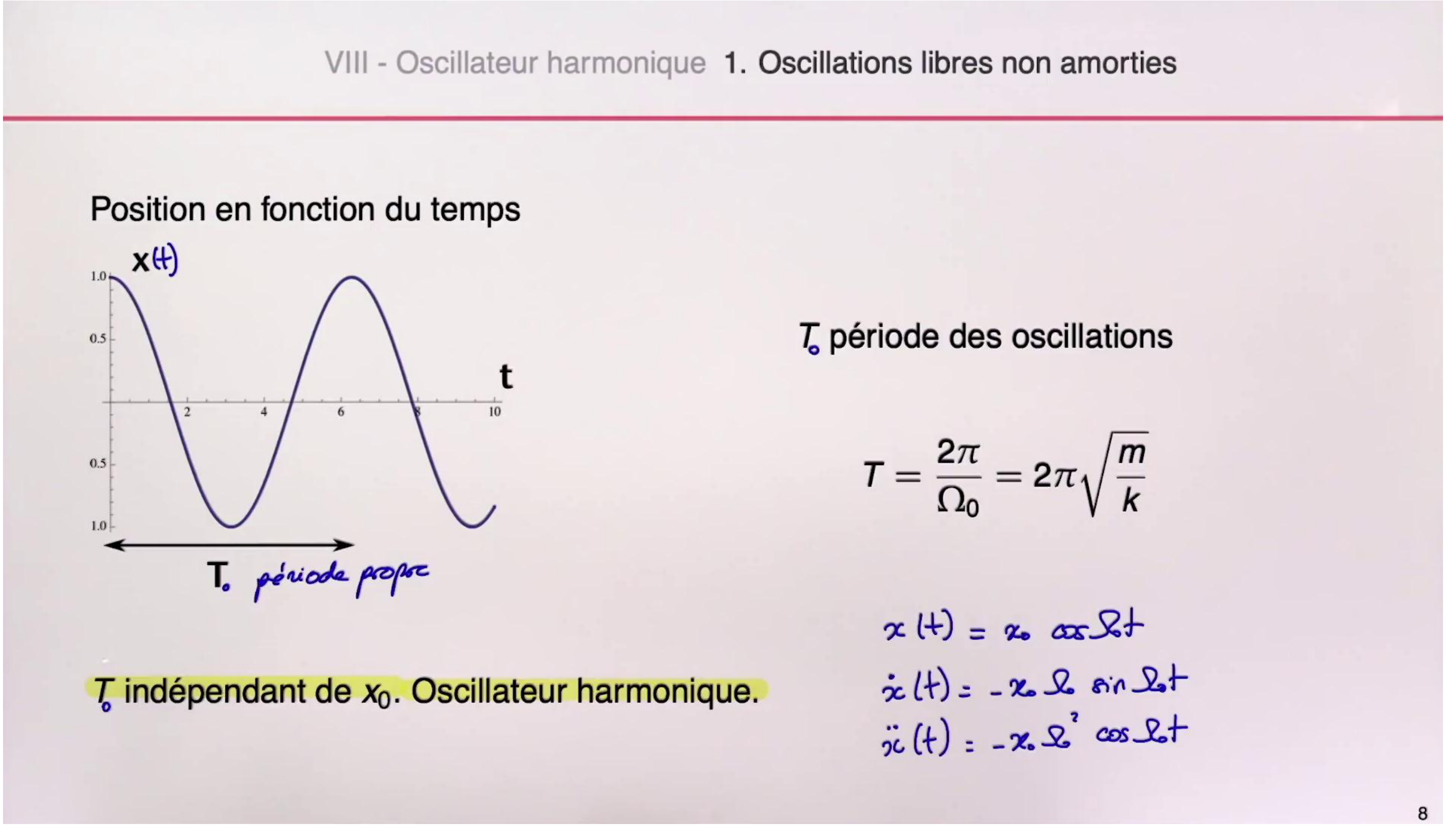
Lorsque nous représentons la position en fonction du temps, x(t), nous obtenons donc une fonction sinusoïdale qui commence à x_0 à t=0 et qui diminue, repasse par l'origine, va jusqu'en -x0, repasse par l'origine, et revient en x0. Le temps qu'il faut pour faire un aller/retour s'appelle la période. Puisque nous avons un oscillateur libre, nous appelons cette période T0, la période propre. Cette période propre est liée à la pulsation propre Ω0 par T=2π/Ω0. Soit 2π racine de m/k. Mais alors, ici, T ne dépend que de la masse et de k. Cela signifie que cela ne dépend pas de x0. J'aurais pu prendre ma masse et l'écarter juste un tout petit peu de la position d'équilibre et la regarder osciller, ou la prendre et l'écarter très loin de la position d'équilibre et la regarder osciller, et nous trouvons que la période ou la pulsation est égale dans les deux cas. Donc, en gros, quand je l'ai un petit peu écartée, elle ne va pas aller très vite, mais quand je l'ai écartée beaucoup plus loin, elle se devra aller beaucoup plus vite pour ses allers et retours, pour les faire dans le même temps. D'avoir une période propre T0 indépendante de x0 est la caractéristique de ce que l'on appelle un oscillateur harmonique.

Notes

Summary

13m 40s

VIII - Oscillateur harmonique 1. Oscillations libres non amorties



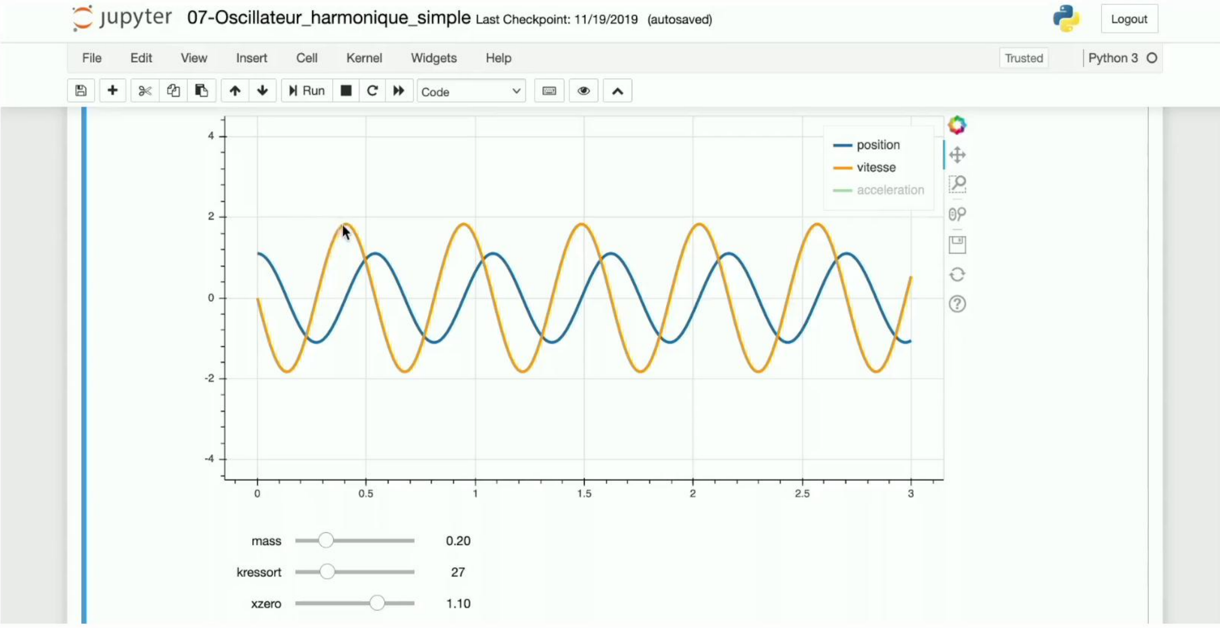
Pour cet oscillateur harmonique, dans les cas précis avec les conditions initiales que nous avons choisies, nous avons x(t)=x0cosΩ0t. Donc, la vitesse en fonction du temps, x point (t)=−x0Ω0sinΩ0t. Et l'accélération en fonction du temps x deux points (t) vaut −x0Ω0²cosΩ0t. La période ne change pas si x0 augmente. Par contre, si x0 augmente, la vitesse, elle, sera plus grande.

Notes

Summary

15m 26s

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.



9

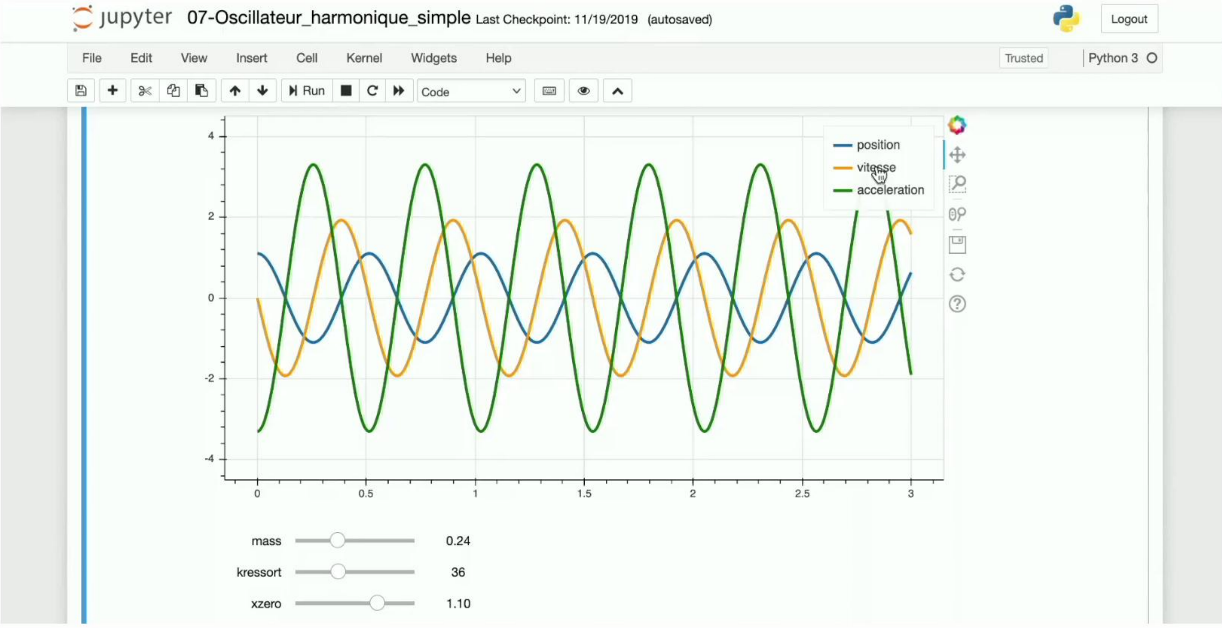
Regardons l'allure des courbes x(t), v(t) et a(t). Commençons par la position en fonction du temps. Nous retrouvons cette fonction cosinus et nous voyons que si nous changeons x0, nous ne changeons pas la période des oscillations, mais par contre, nous changeons l'amplitude. Lorsque je pars d'un x0 négatif, je commence du côté négatif pour avoir cette oscillation, toujours entre x0 et -x0. Fixons maintenant un x0 donné. Et augmentons la masse. Lorsque j'augmente la masse, la période augmente, ce qui revient à dire qu'Ω0 diminue. C'est logique, racine de k/m diminue quand m augmente. Reprenons m de tout à l'heure, augmentons maintenant k et nous voyons la période qui diminue. J'ajoute maintenant la vitesse. Nous voyons que la vitesse commence à 0, sa norme augmente, la norme de la vitesse est maximum lorsque la masse passe par l'origine, puis la norme de la vitesse diminue et redevient nulle lorsque la masse est en -x0. C'est l'endroit où elle fait demi-tour. À ce moment-là, le sens du vecteur vitesse change. Il était négatif, il devient positif. La masse se redéplace vers les x positifs. Et à nouveau, à une vitesse maximum lorsque la masse repasse en zéro.

Notes

Summary

16m 10s

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.



9

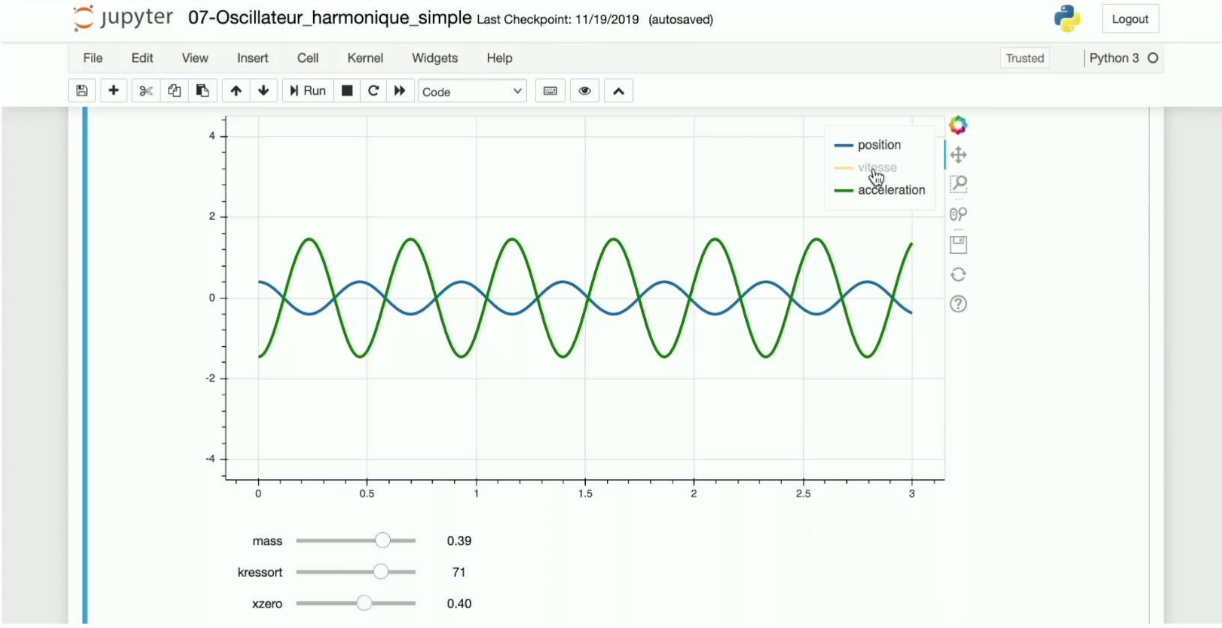
Si j'augmente la masse, la période de la vitesse augmente de la même manière que la période de la position. De la même manière, si je diminue k, nous voyons les deux qui diminuent en même temps. Mais en plus, lorsque j'augmente la masse, l'amplitude de la vitesse diminue, alors que lorsque j'augmente k, l'amplitude de la vitesse augmente. C'est parce que dans le terme de la vitesse, j'ai le Ω0 devant le sinus.

Notes

Summary

18m 07s

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.



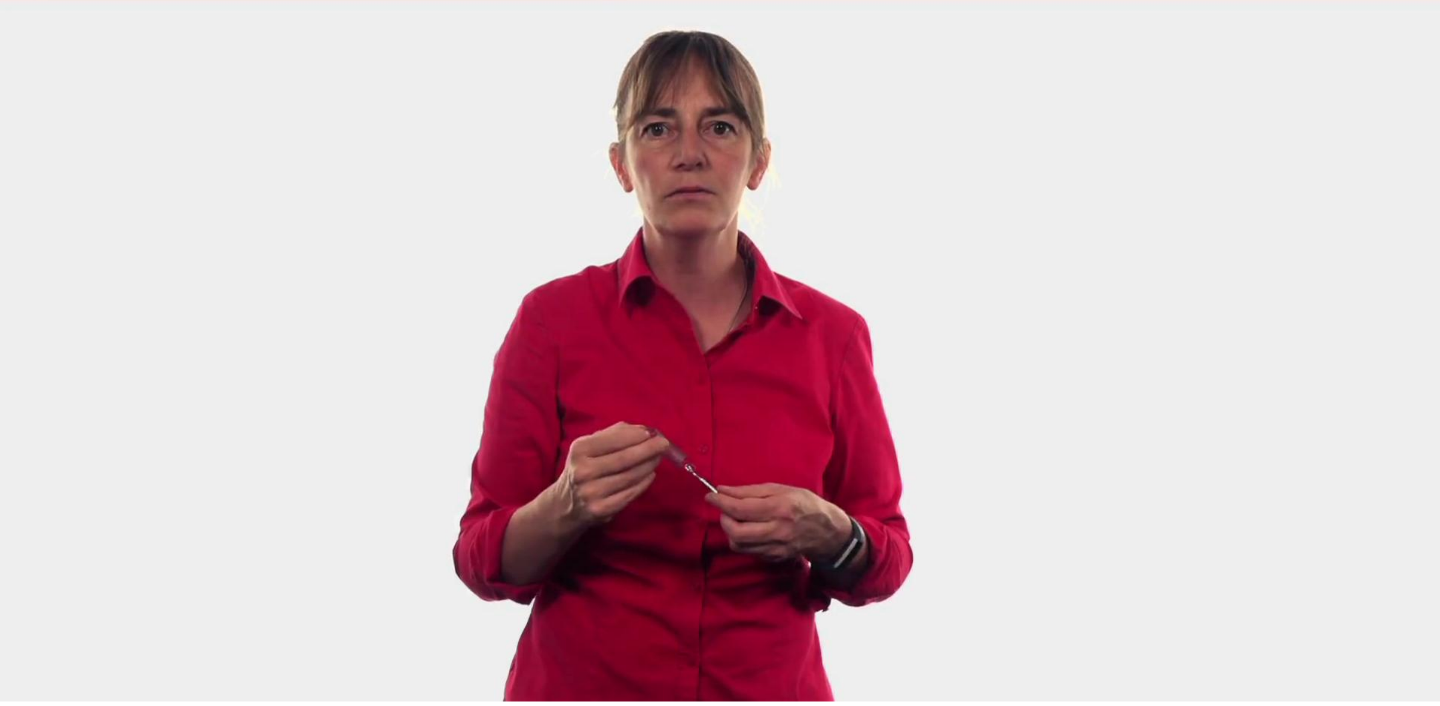
9

Si maintenant, j'ajoute l'accélération et que j'enlève la vitesse, nous voyons que l'accélération est très exactement en opposition de phase par rapport à la vitesse. De la même manière, j'augmente la masse, l'amplitude de l'accélération diminue. J'augmente k, l'amplitude de l'accélération augmente. Et lorsque je diminue x0, les deux amplitudes diminuent en même temps.

Notes

Summary

18m 44s



Voilà pour ce modèle, le plus simple d'oscillateur libre non amorti, les lois de Newton nous ont permis d'obtenir les grandeurs : accélération, position et vitesse en fonction du temps. Le résultat est une fonction sinusoïdale. Dans la prochaine vidéo, nous allons voir que d'autres types de mouvements peuvent amener à des oscillations.

Notes

Summary

19m 15s