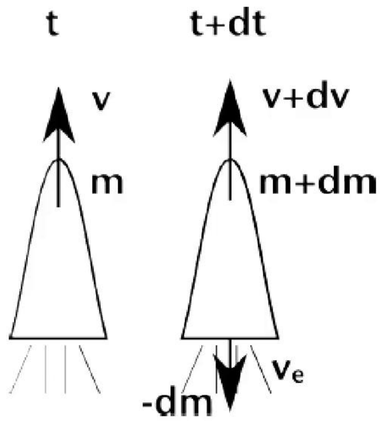
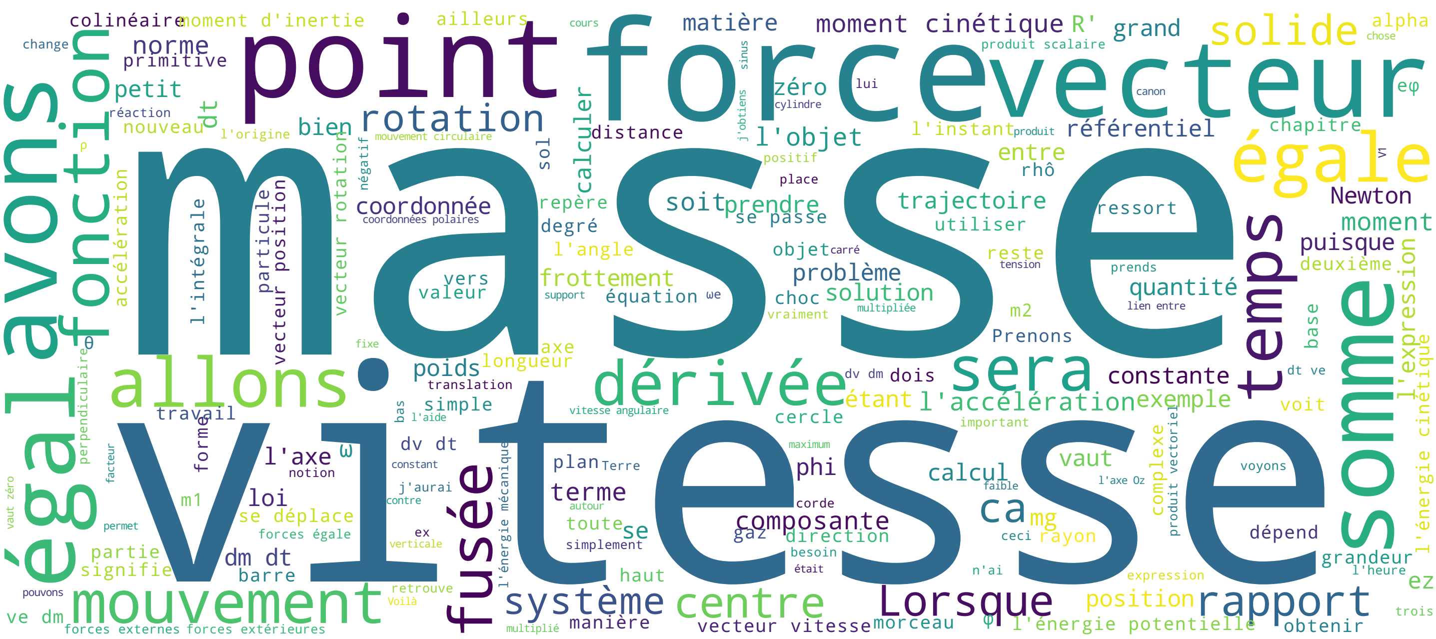


Fusée

Prof. Cécile Hébert



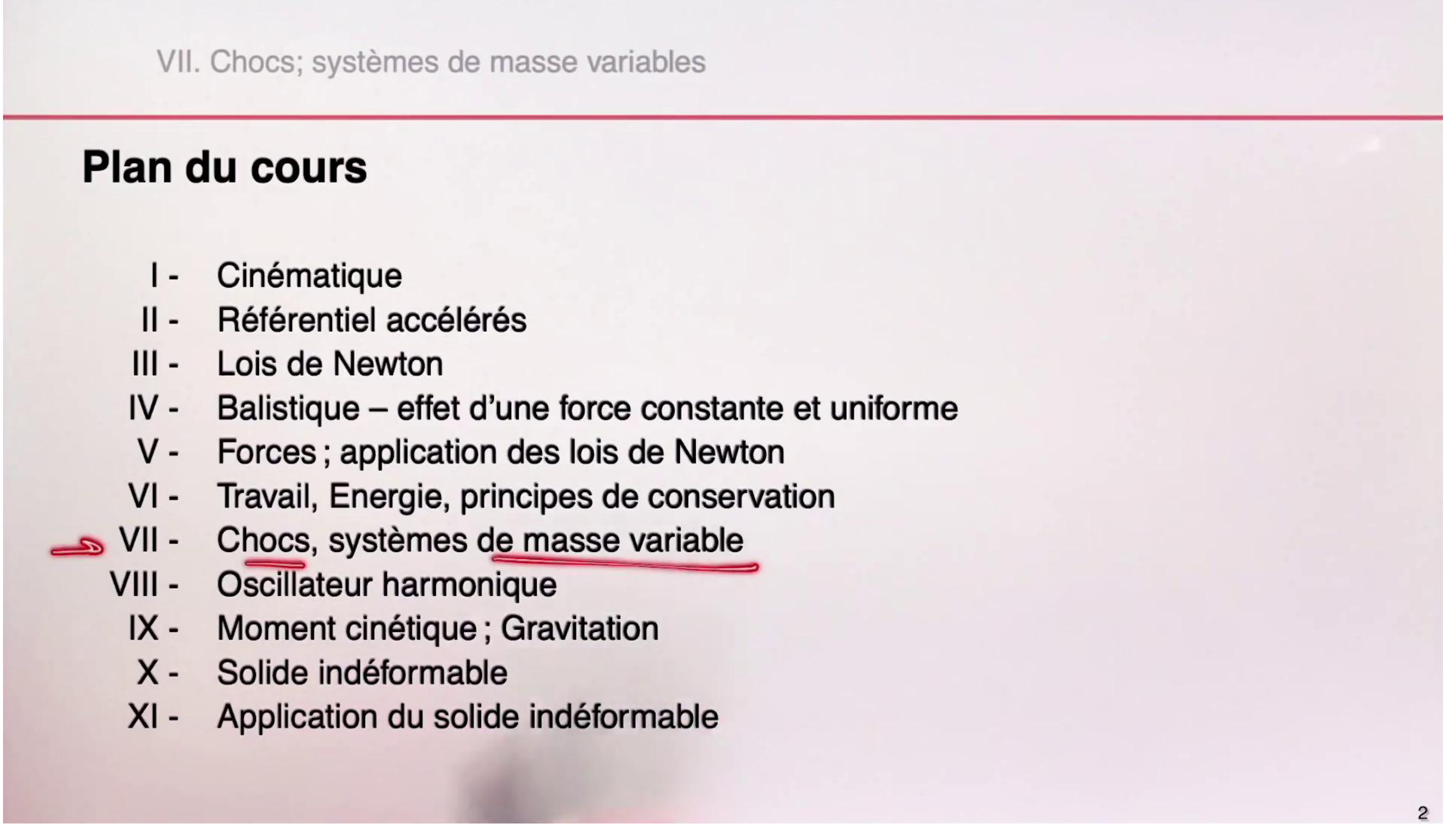
Video

Dans cette vidéo, nous allons maintenant aborder le cas particulier d'un système dont la masse n'est pas constante. Notre exemple sera celui d'une fusée qui utilise la matière en combustion, éjectée par les tuyères pour permettre sa propulsion. Vous verrez que dans ce cas, il faut faire un pas en arrière. On ne peut plus utiliser les lois de Newton naïvement et on doit remonter à l'origine de la loi somme des forces égale dp sur dt. Le calcul mené est vraiment un calcul différentiel qui n'est pas forcément évident à suivre de manière conceptuelle. Le calcul à suivre, le calcul que nous faisons est vraiment un calcul différentiel qui demande un petit peu d'agilité mathématique.

Notes

Summary

0m 05s

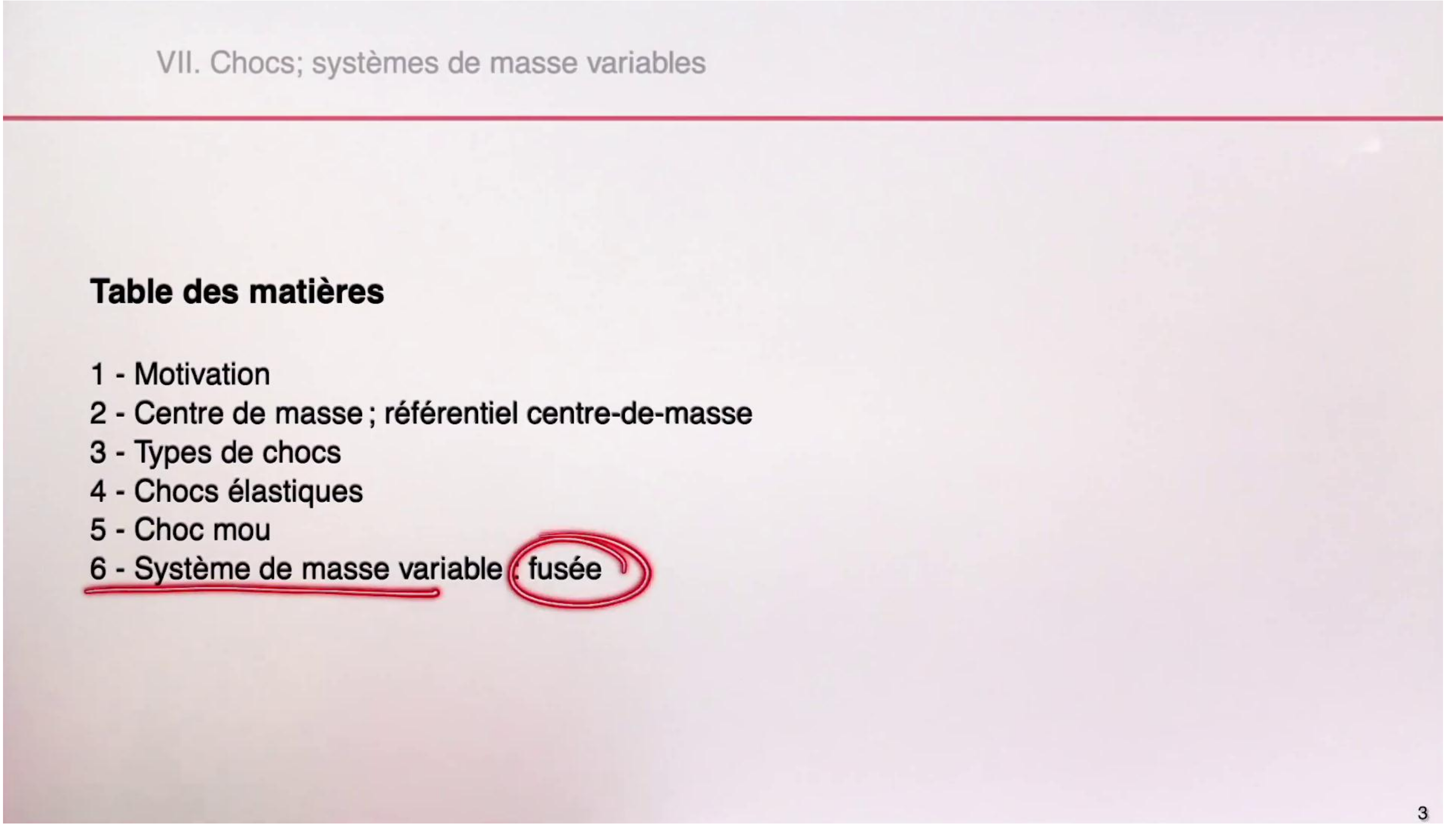


Nous sommes dans le chapitre sept : Chocs, système de masse variable.

Notes

Summary

0m 51s



Et nous allons voir les systèmes de masse variables avec comme exemple la fusée.

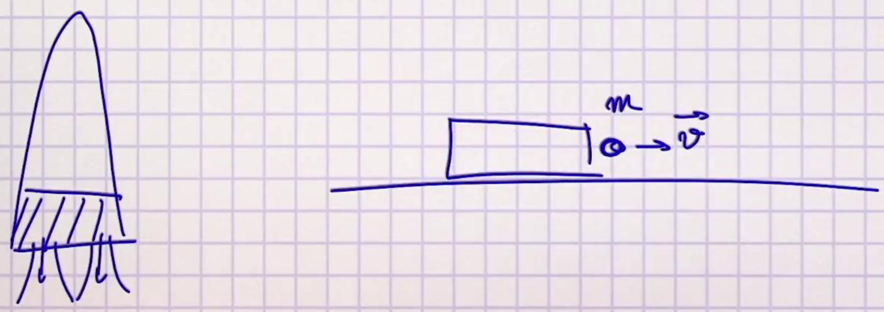
Notes

Summary

0m 56s

VII. Chocs; systèmes de masse variables **6 - Système de masse variable : fusée**

6 - Système de masse variable : fusée



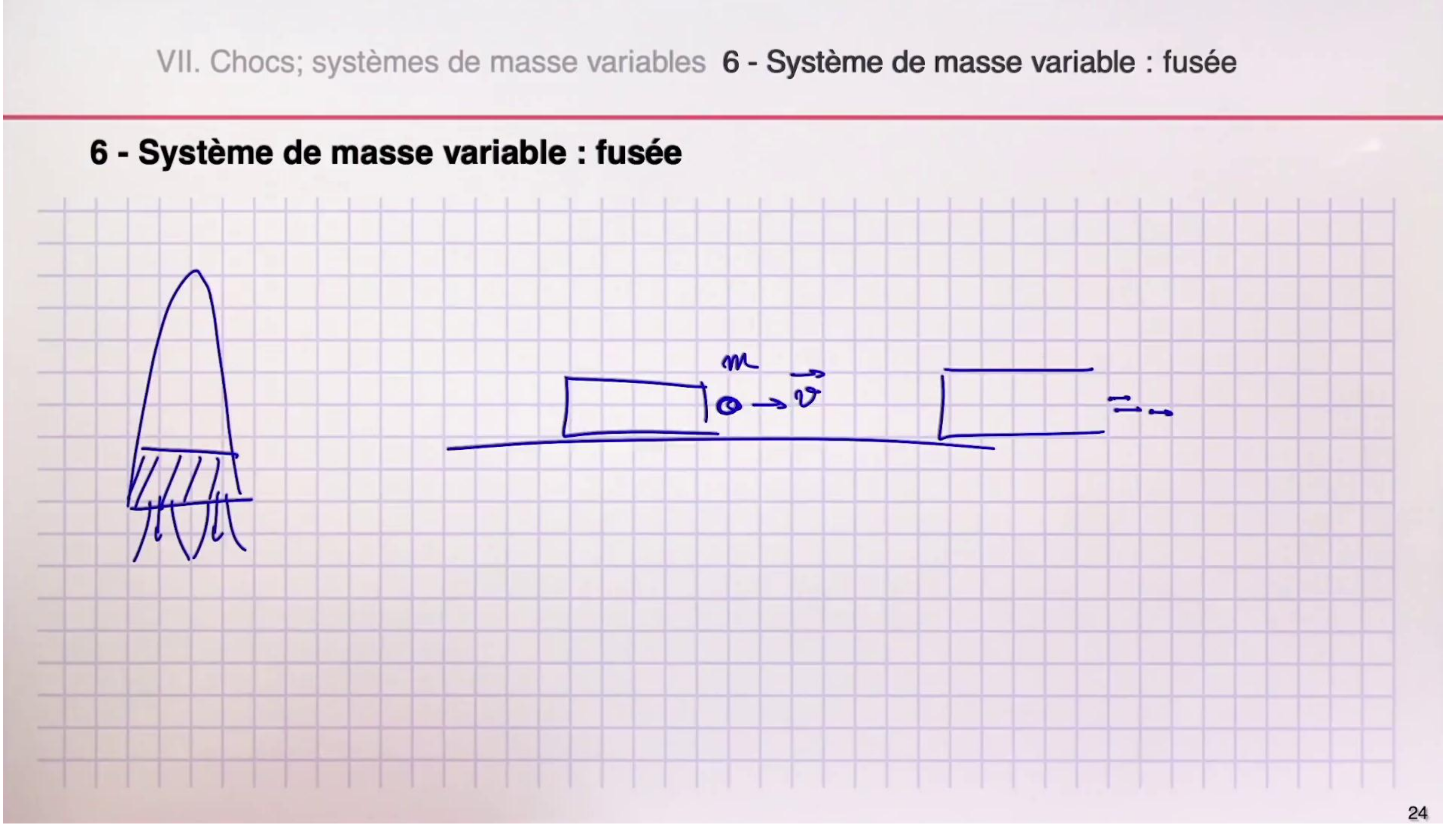
24

Nous avons le problème suivant : une fusée est propulsée à l'aide de matière qui est brûlée et éjectée par des tuyères. C'est un processus qui se passe en continu. J'ai continuellement de la matière en combustion qui quitte la fusée. Ce qui m'intéresse, c'est la vitesse de la fusée en fonction du temps. Le problème, c'est que, au fur et à mesure que la matière s'en va, la masse de la fusée dépend du temps aussi. Lorsque nous avions écrit la seconde loi de Newton, somme des forces extérieures égale dp sur dt, nous avions dit que si m égal constant, nous pouvons écrire somme des forces égale ma. Malheureusement, avec une masse non constante, cela n'est pas valable. Nous allons donc devoir repartir de somme des forces égale dp sur dt. Nous pouvons essayer de voir le lien entre la fusée et le problème plus simple que nous avions d'un canon sur un rail à air qui éjecte un boulet. Dans le cas du canon sur un rail à air, il y a un boulet de masse m qui quitte le canon à une vitesse v. Le système est donc simple, c'est le canon plus la masse. On pourrait imaginer à la place un canon qui, au lieu d'éjecter un seul boulet, éjecte nombre de petites billes.

Notes

Summary

1m 01s

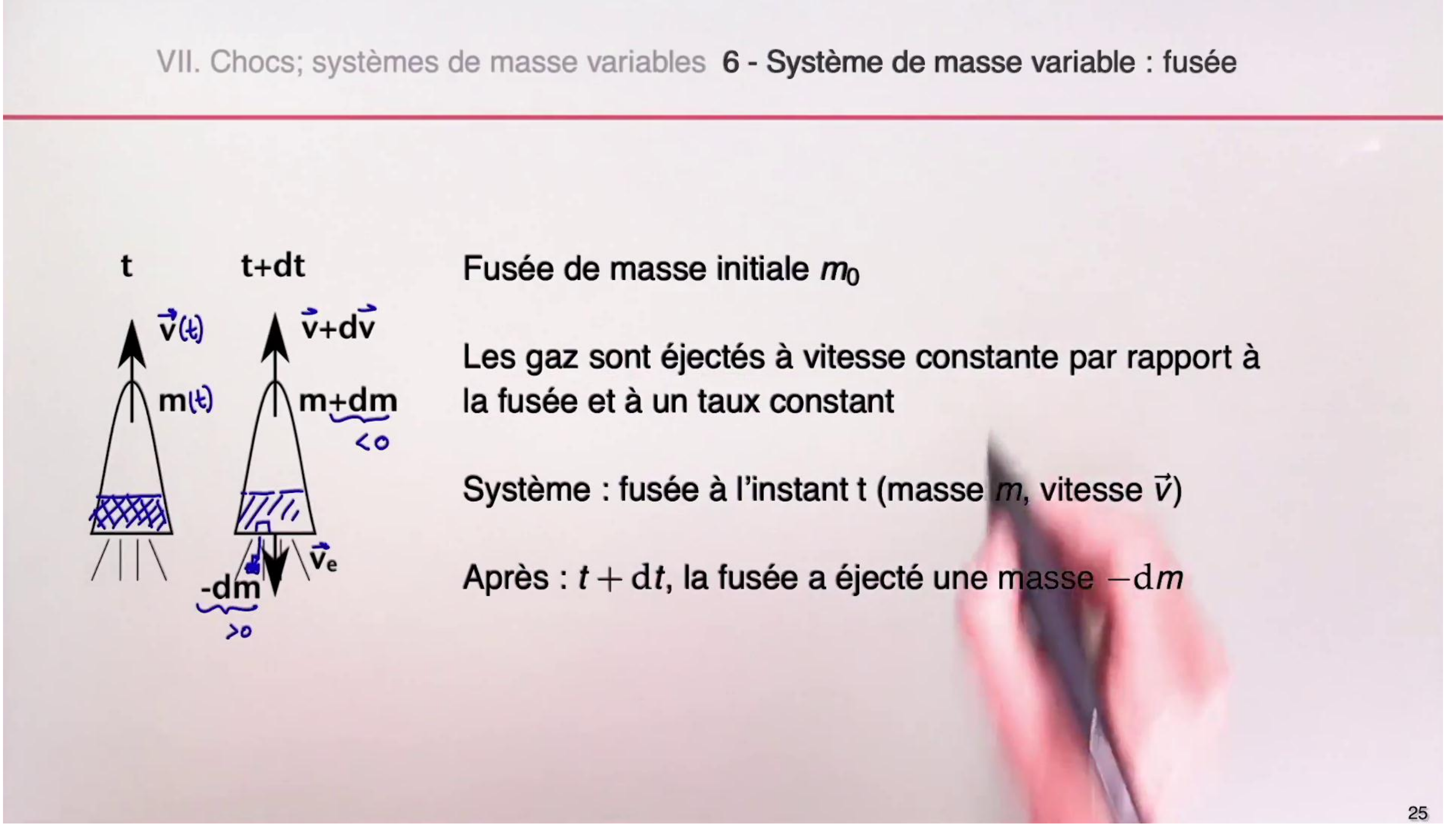


Le problème serait alors plus complexe à traiter puisque nous devrions refaire le même calcul bille après bille. On voit qu'à chaque bille partie, la vitesse du canon a un petit peu changé. Et en plus ça masse a aussi changé. Et maintenant, c'est encore pire puisque j'ai vraiment de la matière qui part en continu et qu'il est bien évident que je ne vais pas traiter individuellement chaque atome comme une bille. Donc dans un problème comme ça, nous prenons une approche différentielle, nous prenons un intervalle de temps dt faible et nous regardons ce qui se passe entre le système à t et le système à t+dt. Et ce qui est important, c'est de garder le même système au deux intervalles de temps. Donc il va bien falloir suivre le morceau de matière qui était dans la fusée et qu'il a quitté entre t et t+dt.

Notes

Summary

2m 30s

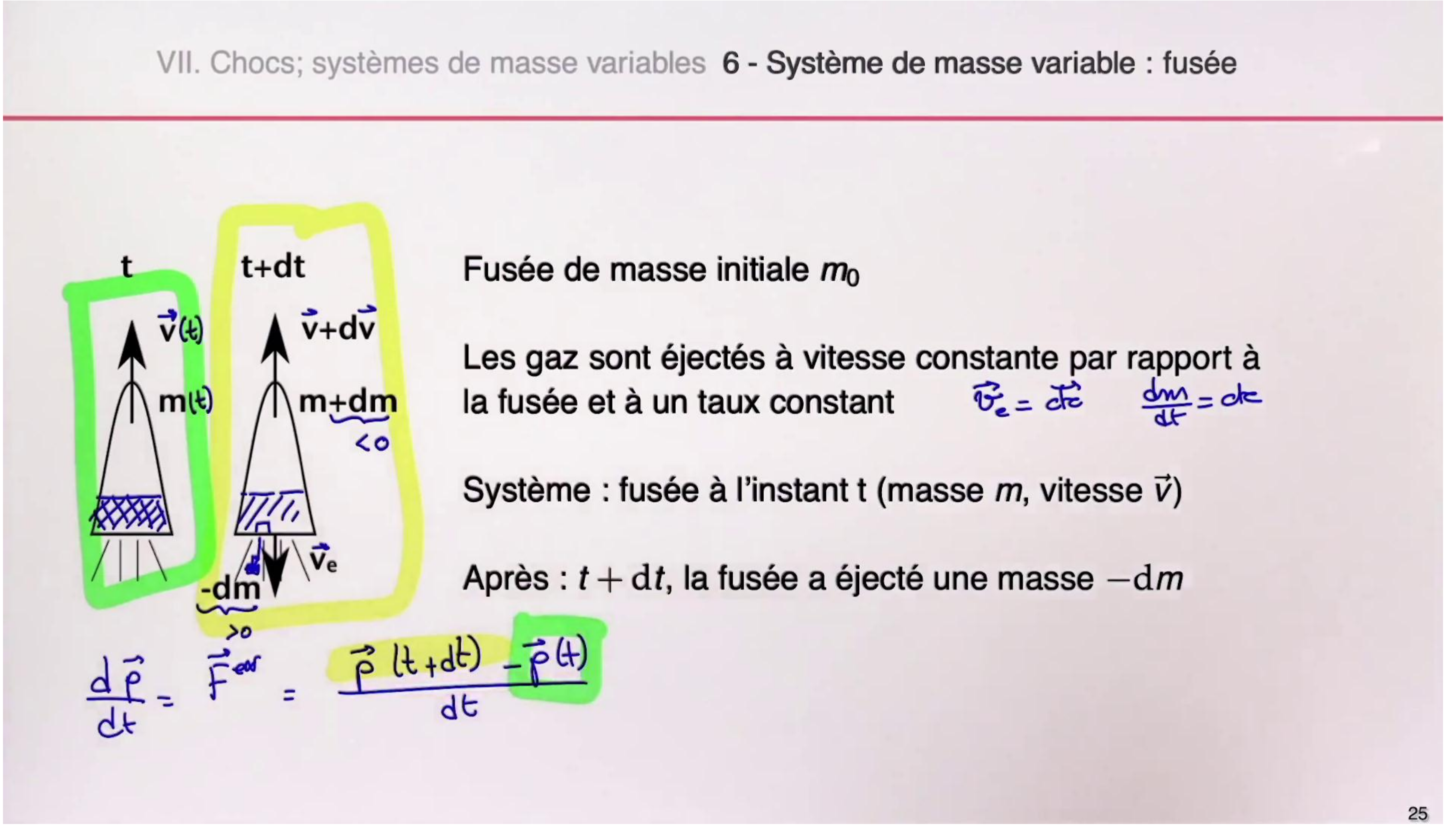


Voici donc notre problématique. Nous avons une fusée de masse initiale m0. Au cours du temps, elle perd de la masse et donc à l'instant t, elle a une masse m(t). Elle a déjà injecté de la matière, elle a obtenu une vitesse v(t). À t, il lui reste une certaine quantité de combustible. Pendant le temps dt, une partie de ce combustible va quitter la fusée et être éjectée. Le système sera bien la fusée avec ce morceau de combustible. D'abord dans la fusée et ensuite hors de la fusée. À t+dt, la vitesse aura changé, ce sera la vitesse v+dv. Et puisque la flèche du temps va vers les temps positifs, nous aurons une masse m+dm. La masse de la fusée aura diminué, dm sera donc négatif. Et nous retrouverons à l'extérieur de la fusée la masse -dm qui est positive. Le dernier paramètre à prendre en compte est la vitesse d'éjection. Elle est liée à la combustion de la matière dans la fusée. Elle va donc gouverner la vitesse du morceau de matière dm par rapport à la fusée. Les gaz sont éjectés à une vitesse constante ve par rapport à la fusée et à un taux constant, ce qui signifie que dm/dt égal constante. Nous avons donc ve égale constante et dm/dt égale constante.

Notes

Summary

3m 24s

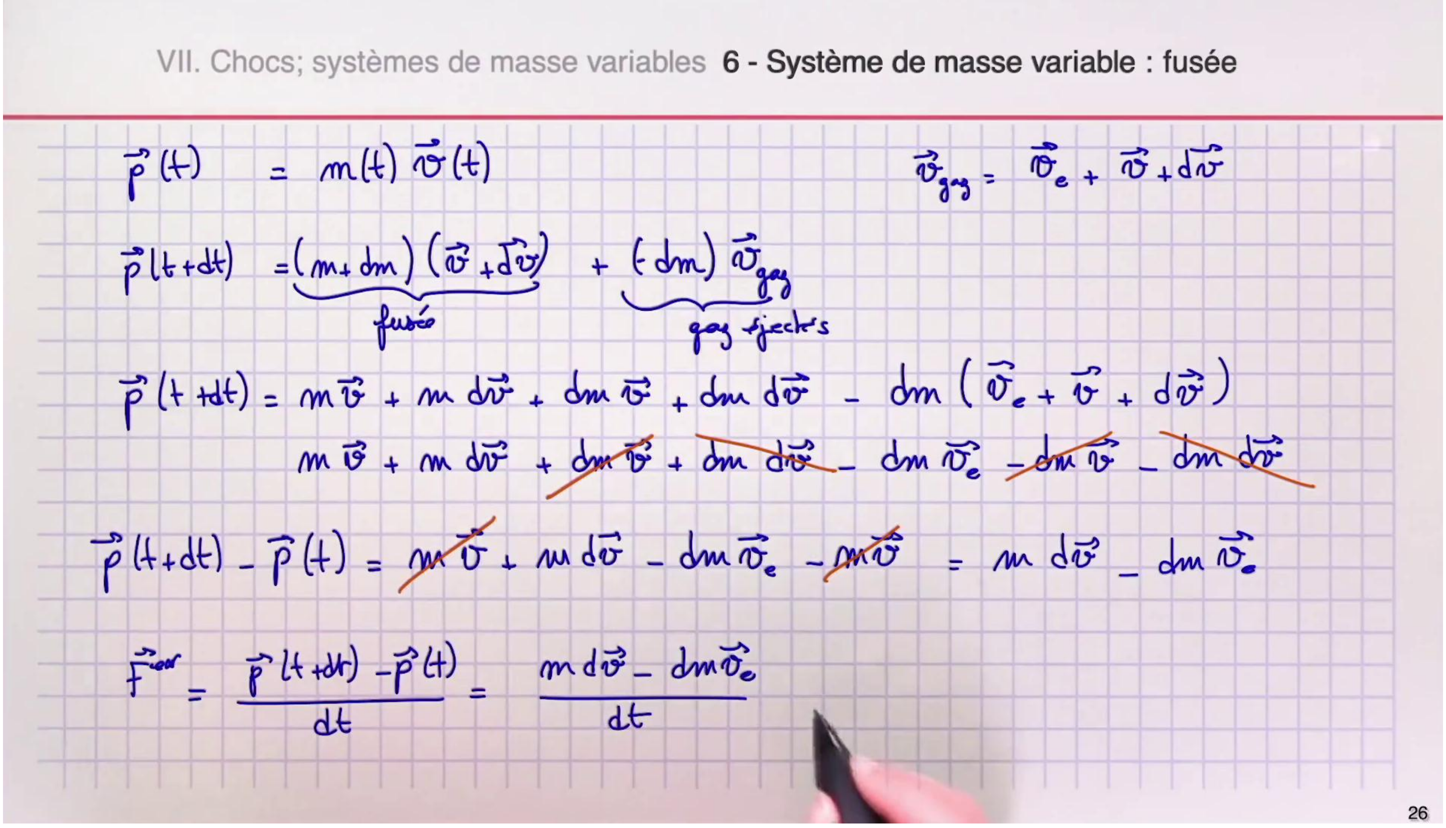


ve est la vitesse des gaz par rapport à la fusée, ça n'est pas la vitesse des gaz dans le référentiel galiléen. Comme dit, notre système est la fusée à l'instant t de masse m et de vitesse v, et à l'instant t+dt, nous avons la fusée qui a une masse m+dm et les gaz séparés. Si nous reprenons la seconde loi de Newton sous forme différentielle dp/dt égale la somme des forces extérieures que j'écris Fext dp/dt, c'est la quantité de mouvement à l'instant t+dt moins la quantité de mouvement à l'instant t divisée par dt. Et je dois bien prendre la quantité de mouvement du système, donc à t+dt ce système complet et à t, le système fusée qui est en un morceau. Ma première étape va donc être de calculer la quantité p(t+dt)-p(t).

Notes

Summary

5m 13s



Pour cela, nous allons calculer séparément p(t) et p(t+dt). p(t), c'est le plus simple. À t, j'ai toute la masse m(t) dans la fusée qui se déplace à la vitesse v(t). À t+dt, je dois séparer la partie fusée et la partie masse sortie. La fusée se déplace maintenant à la vitesse v+dv et elle a une masse m+dm. Je dois aussi prendre en compte le petit morceau de matière qui a une masse -dm et une vitesse vgaz. La vitesse des gaz est la vitesse dans le référentiel galiléen. C'est donc égale à la vitesse par rapport à la fusée ve plus la vitesse de la fusée, qui est v+dv. Cette partie-là, c'est la fusée. Et cette partie-là, les gaz éjectés. J'obtiens non p(t+dt) égal en développant le premier terme mv + m dv + dm v + dm dv - dm(ve+v+dv). En développant aussi le deuxième terme, je retrouve un bon nombre de termes qui se simplifient. +dm v, -dm v. +dm dv, -dm dv. Je rappelle que nous voulons calculer la différence p(t+dt)-p(t). p(t+dt)-p(t) est donc égal à m v + m dv - dm ve - p(t)- mv. Encore une simplification et il ne me reste au final plus que m dv - dm ve. Les forces externes sont égales à p(t+dt)-p(t) sur dt, soit (m dv - dm ve)/dt. C'est donc (m dv/dt) - (ve dm/dt).

Notes

Summary

6m 16s

VII. Chocs; systèmes de masse variables **6 - Système de masse variable : fusée**

$$\vec{p}(t) = m(t)\,\vec{v}(t) \qquad \vec{v}_{gaz} = \vec{v}_e + \vec{v} + d\vec{v}$$

$$\vec{p}(t+dt) = \underbrace{(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})}_{\text{fusée}} + \underbrace{(-dm)\,\vec{v}_{gaz}}_{\text{gaz éjectés}}$$

$$\vec{p}(t+dt) = m\vec{v} + m\,d\vec{v} + dm\,\vec{v} + dm\,d\vec{v} - dm\left(\vec{v}_e + \vec{v} + d\vec{v}\right)$$

$$m\vec{v} + m\,d\vec{v} + \cancel{dm\,\vec{v}} + \cancel{dm\,d\vec{v}} - dm\,\vec{v}_e - \cancel{dm\,\vec{v}} - \cancel{dm\,d\vec{v}}$$

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \cancel{m\vec{v}} + m\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e - \cancel{m\vec{v}} = m\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e$$

$$\vec{F}^{ext} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \frac{m\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

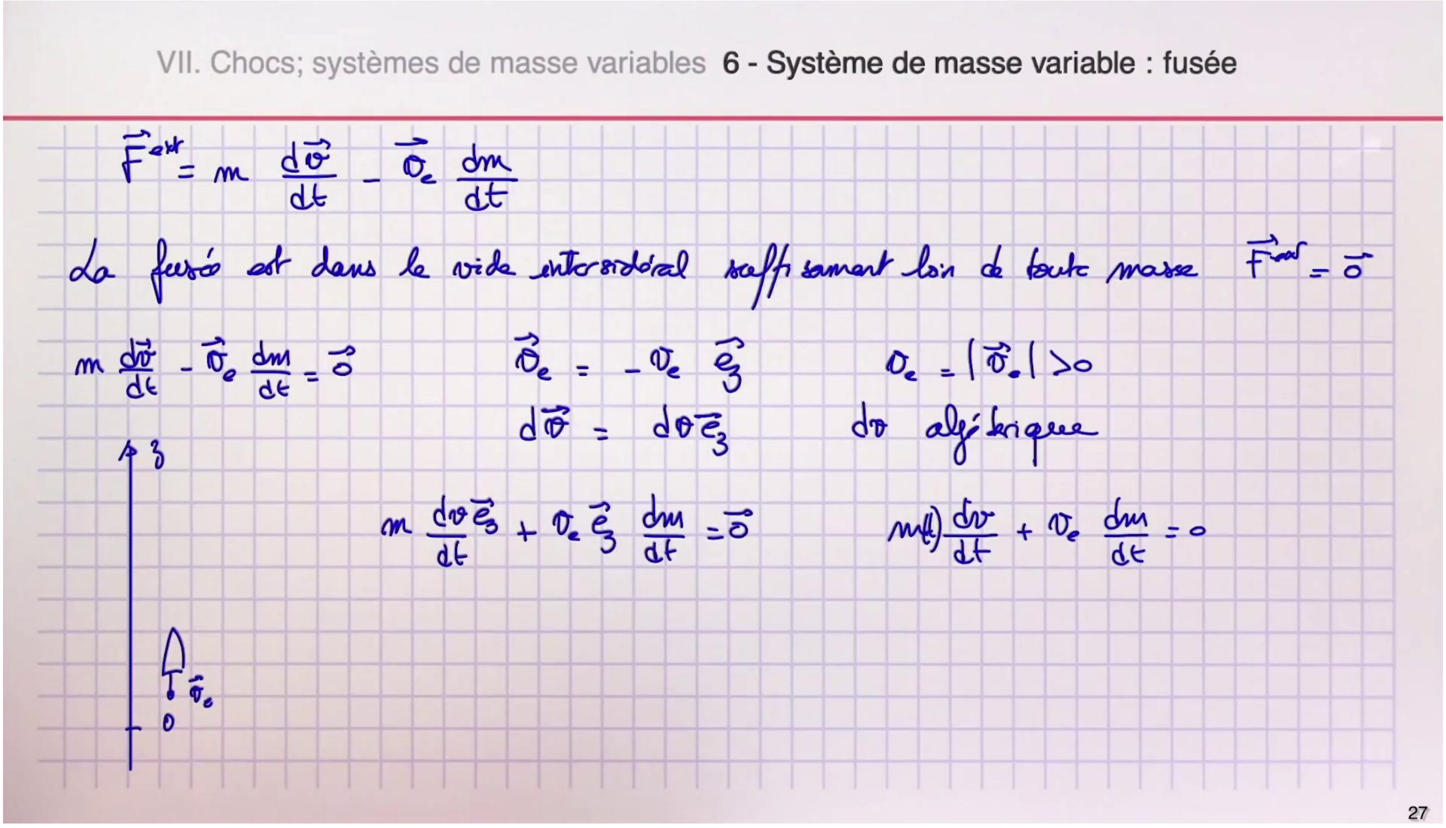
26

C'est une équation vectorielle un peu complexe qui lie la dérivée de v à la dérivée de la masse, mais avec ici en plus la masse. Nous allons résoudre cette équation dans deux cas particuliers. Pour la résoudre, il faut connaître les forces externes.

Notes

Summary

9m 19s



Je reprends mon équation. Je vais prendre le cas le plus simple possible et supposer que la fusée est dans le vide intersidéral, donc suffisamment loin de toute masse gravitationnelle. Avec cela, les forces extérieures pour être en prise égale à zéro. J'aurais donc (m dv/dt) - (ve dm/dt) = 0. Prenons un cas d'école. Supposons que la fusée part depuis le point O dans la direction dz. Ce que je suppose, c'est que la vitesse d'éjection des gaz est selon moi ez. Je suppose donc que j'ai ve = -ve ez. ve est la norme de la vitesse d'éjection, et elle est positive. Si la fusée commence avec une vitesse nulle, dv sera colinéaire à ve, la fusée va commencer à acquérir une vitesse colinéairement à ve, donc également selon l'axe Oz. Donc, je peux supposer que dv en vecteur va être égal à dv ez. Ici, dv est algébrique. Un dv positif signifie une fusée qui est propulsée vers le haut, un dv négatif, une fusée propulsée vers le bas. J'ai donc m(dv ez)/dt, -- cela fait +, ve ez dm/dt = 0 projeté sur ez, (m dv/dt) + (ve dm/dt) = 0. Il ne faut pas perdre de vue que la masse dépend du temps. En divisant les deux termes par m et en faisant passer celui-ci de l'autre côté. Je vais obtenir dv/dt = - ve (dm/dt) sur m.

Notes

Summary

9m 40s

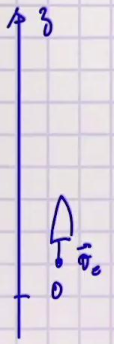
VII. Chocs; systèmes de masse variables **6 - Système de masse variable : fusée**

$$\vec{F}^{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt}$$

La fusée est dans le vide intersidéral suffisamment loin de toute masse $\vec{F}^{ext} = \vec{0}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt} = \vec{0} \qquad \vec{v}_e = -v_e\,\vec{e}_z \qquad v_e = |\vec{v}_e| > 0$$

$$d\vec{v} = dv\,\vec{e}_z \qquad dv \text{ algébrique}$$



$$m\frac{dv\,\vec{e}_z}{dt} + v_e\,\vec{e}_z\frac{dm}{dt} = \vec{0} \qquad m(t)\frac{dv}{dt} + v_e\frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm/dt}{m}$$

$$\int_{t=0}^{t}\frac{dv}{dt}\,dt = \int_{t=0}^{t} -v_e\frac{dm/dt}{m(t)}\,.dt \Rightarrow \left[v(t)\right]_0^t = -v_e\left[\ln m(t)\right]_{t=0}^{t}$$

27

J'ai là deux fonctions du temps qui sont égales. Je peux donc prendre leur intégrale sur un intervalle de temps donné de t0 jusqu'à t fois dt et les deux devront être égales. La variable d'intégration est le temps. Ici, j'intègre la dérivée de la vitesse à l'intégrale de la dérivée, c'est la fonction elle-même prise entre t0 et t, est égale à -ve puisque c'est une constante que je peux sortir de l'intégrale. J'ai là la dérivée de la masse par rapport au temps divisé par la masse. Si je prends la fonction lnx, sa dérivée est 1/x. lnfx et f' sur f. J'ai ici dérivé de la masse sur la masse. Sa primitive sera donc ln de m du temps pris entre t0 et t.

Notes

Summary

12m 00s

VII. Chocs; systèmes de masse variables **6 - Système de masse variable : fusée**

$$[v(t)]_0^t = -v_e\,[\ln m(t)]_0^t$$

$$v(t) - v(0) = -v_e\,[\ln m(t) - \ln(\underbrace{m(0)}_{m_0})]$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$= -v_e \ln \frac{m}{m_0}$$

$$v(t) = v_0 + v_e \ln \frac{m_0}{m}$$

si à $t = 0$ $v(0) = v_0 = 0$

$$v(t) = v_e \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

si v_e grand $v(t)$ grand

si $\frac{m_0}{m}$ grand $v(t)$ grand

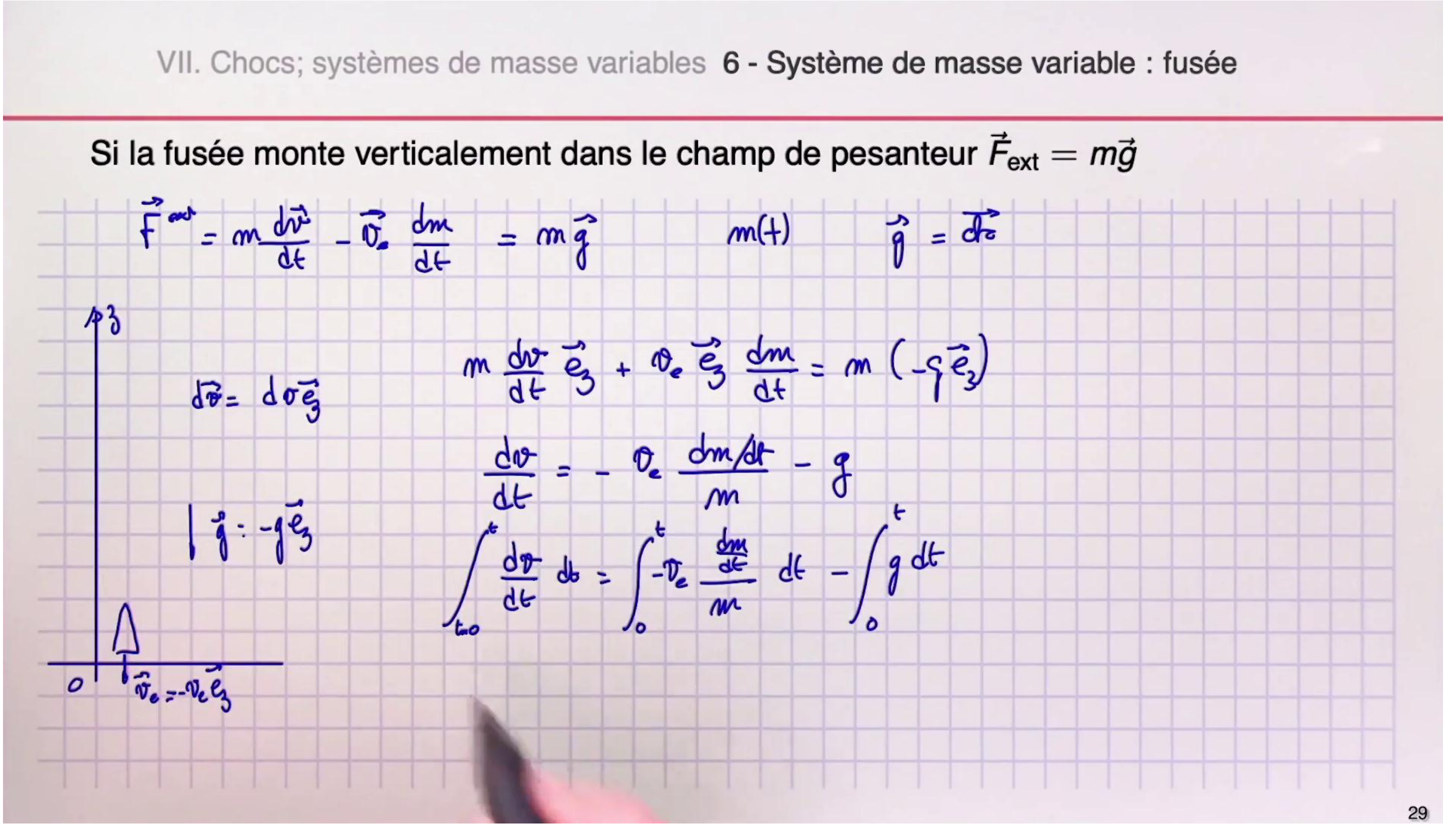
28

Je vais maintenant exprimer la fonction entre les bornes. J'ai donc v(t) - v(t0) = -ve (lnm(t) - lnm(t0)). m(t0) = m0 et lna - lnb = ln(a/b). C'est donc égal à -v1 ln(m/m0). J'obtiens donc v(t) = v0 que je vais appeler v0, + ve ln(m0/m). J'ai inversé m0 et m et ça m'a remis un deuxième signe moins. Moins par moins fais plus. Si à t0, v = 0, alors la vitesse en fonction du temps va être égale à ve ln(m0/m). Et je rappelle, c'est m(t). On voit donc que j'ai deux solutions pour obtenir une grande vitesse à un temps donné, c'est soit avoir une vitesse d'éjection des gaz qui est grande, donc une combustion qui va être efficace, qui va propulser les gaz à grande vitesse ou bien m0 sur m qui soit le plus grand possible. Ce qui veut dire que par rapport à la masse m0 à l'instant t, la fusée doit avoir éjecté le plus de matière possible.

Notes

Summary

13m 20s

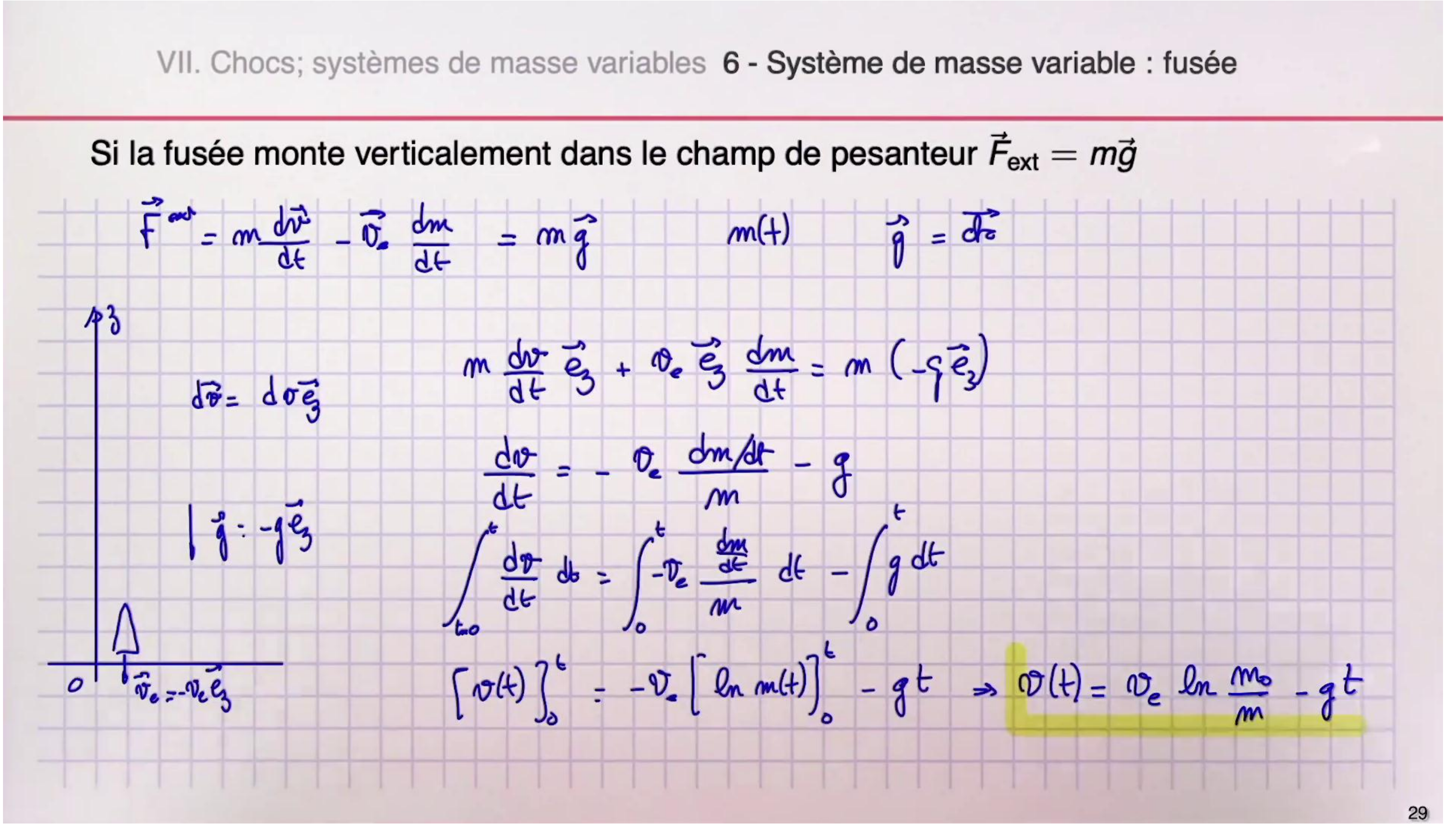


Prenons maintenant le deuxième cas. La fusée monte verticalement dans le champ de pesanteur, donc la somme des forces extérieures vaut mg. m(t) toujours. Nous pouvons repartir de l'équation que nous avions trouvée précédemment Fext = m(dv/dt) - ve(dm/dt). Cette fois Fext = mg m, c'est m(t), mais g est constant. Prenons un axe Oz orienté vers le haut, g et donc vers le bas, c'est -g ez. La fusée essaie de décoller, donc forcément ve est toujours -ve ez. Et dv reste égale à dv ez. En mettant ces trois éléments dans l'équation, j'obtiens m(dv/dt)ez + ve ez(dm/dt) = m (-g ez). En projetant sur ez, en divisant par m et en passant ce terme de l'autre côté, j'obtiens dv/dt = - ve dm/dt sur m - g. Lorsque je vais calculer la primitive de ses fonctions en prenant l'intégrale entre t0 et t, j'aurais la même chose que tout à l'heure. Au début (dv/dt)dt est égal à l'intégrale de 0 jusqu'à t de -ve (dm/dt) sur m dt mais j'ai encore l'intégrale de 0 jusqu'à t de g dt. Nous avons pris le cas où g est constant, c'est-à-dire que la fusée n'est pas encore montée trop loin. Je n'ai pas de changement de g en fonction de l'altitude. La primitive de cette fonction sera la même que tout à l'heure v(t) entre 0 et t.

Notes

Summary

15m 04s



La primitive de la deuxième sera -ve ln(m(t)) entre 0 et t et j'aurais encore moins la primitive de la constante sera gt prise entre 0 et t. sera tout simplement. -gt. Au final, j'obtiens v(t) - v0 qui vaut 0. Donc v(t) est égal de la même manière que tout à l'heure à ve ln(m0/m) - gt. Nous avons donc un terme positif et un terme négatif. Il est bien évident que si ce terme gagne, cela voudrait dire que v(t) sera négatif. C'est comme si la fusée s'enfonçait dans le sol. C'est impossible à cause de la réaction du sol que nous n'avons pas pris en compte au début puisque nous supposions que la fusée décolle. C'est-à-dire que si la poussée n'est pas suffisante, la fusée restera au sol sans décoller. Je dois avoir une poussée minimale afin qu'elle puisse partir.

Notes

Summary

17m 50s

Voilà, maintenant, nous avons vu comment faire lorsque le problème que l'on a est à masse variable. La même démarche peut s'appliquer dans tous les cas dans lesquels un système perd de la masse. Vous en aurez quelques exemples en exercice.

Notes

Summary

19m 05s