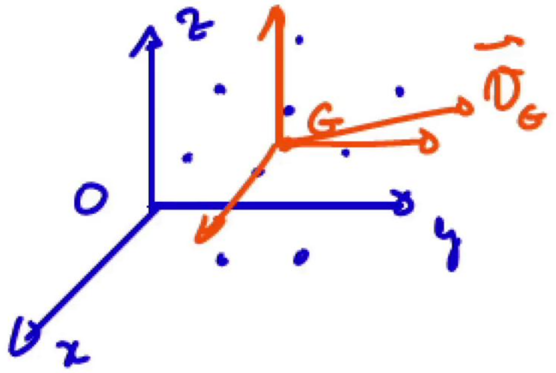
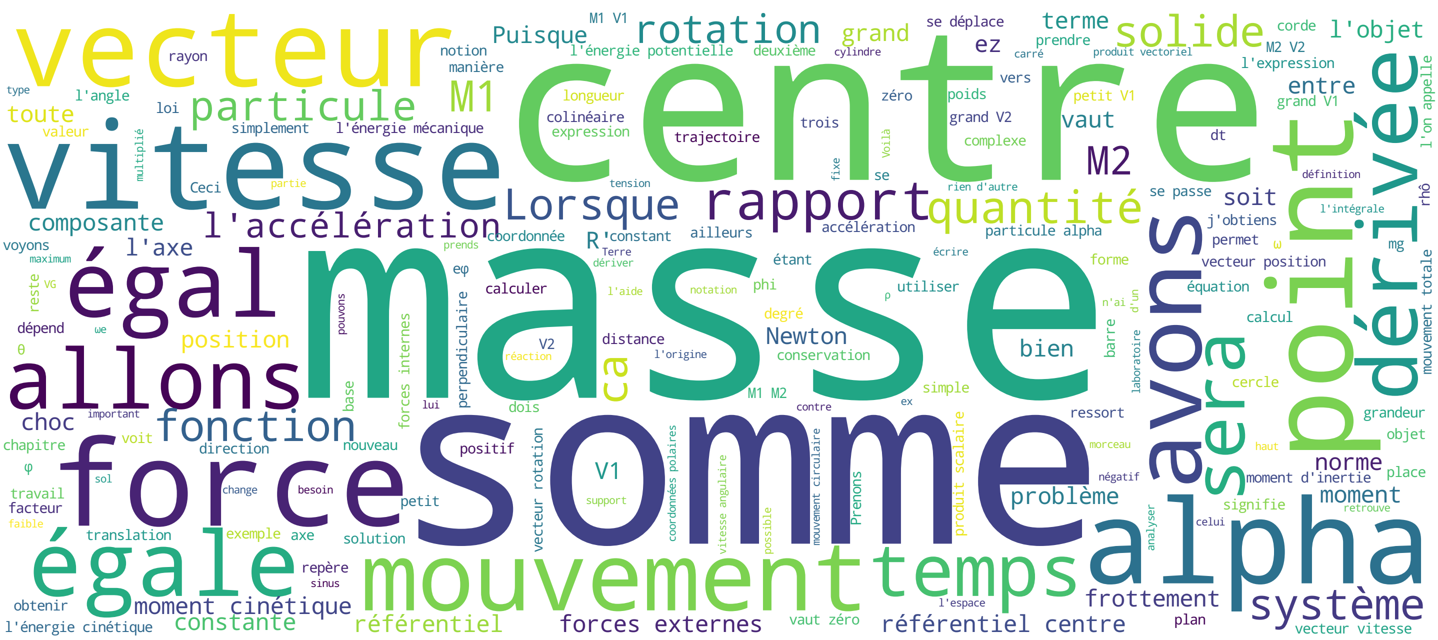
Physique générale : mécanique



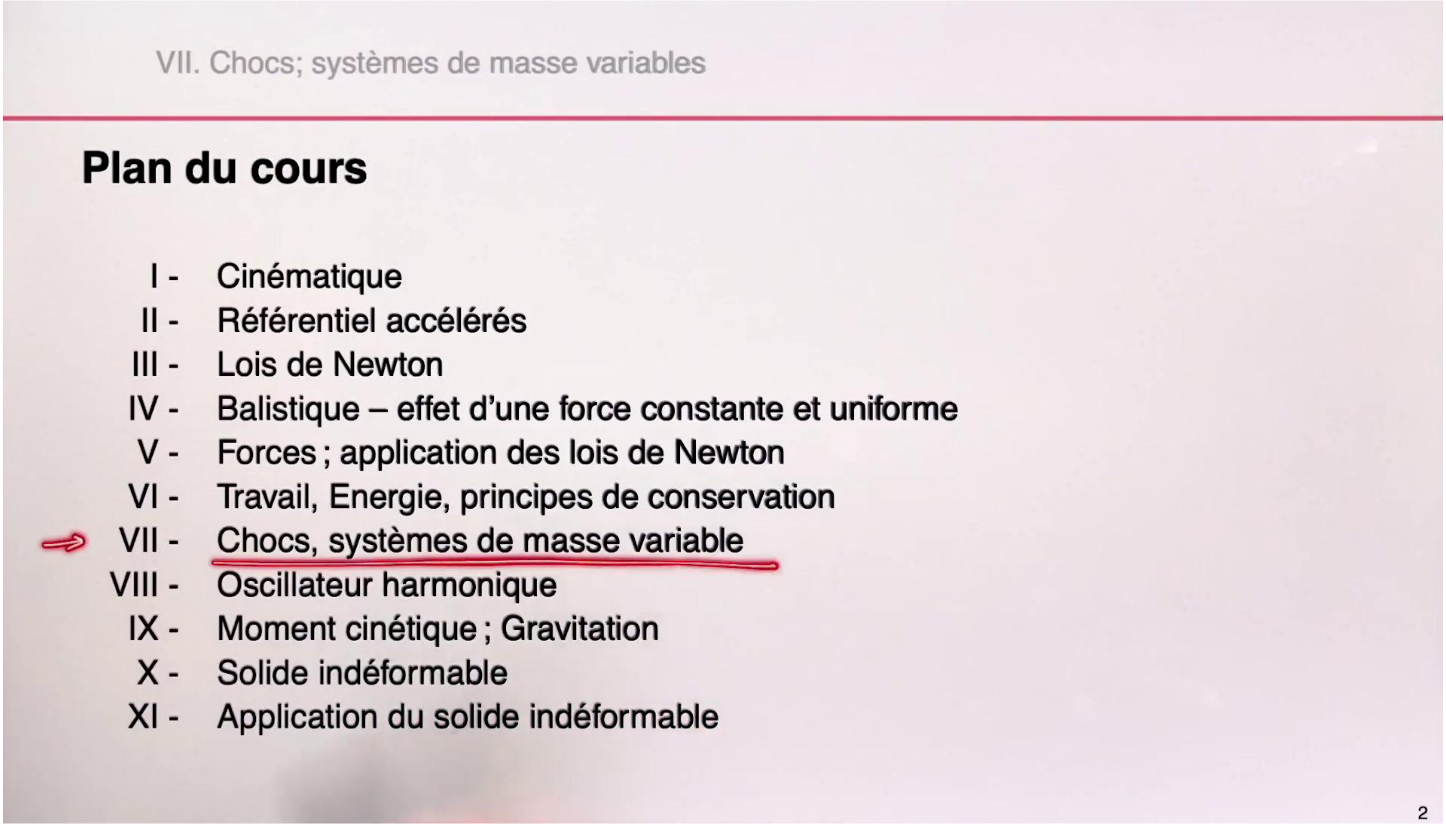

# Centre de masse

Prof. Cécile Hébert




Video

EPFL

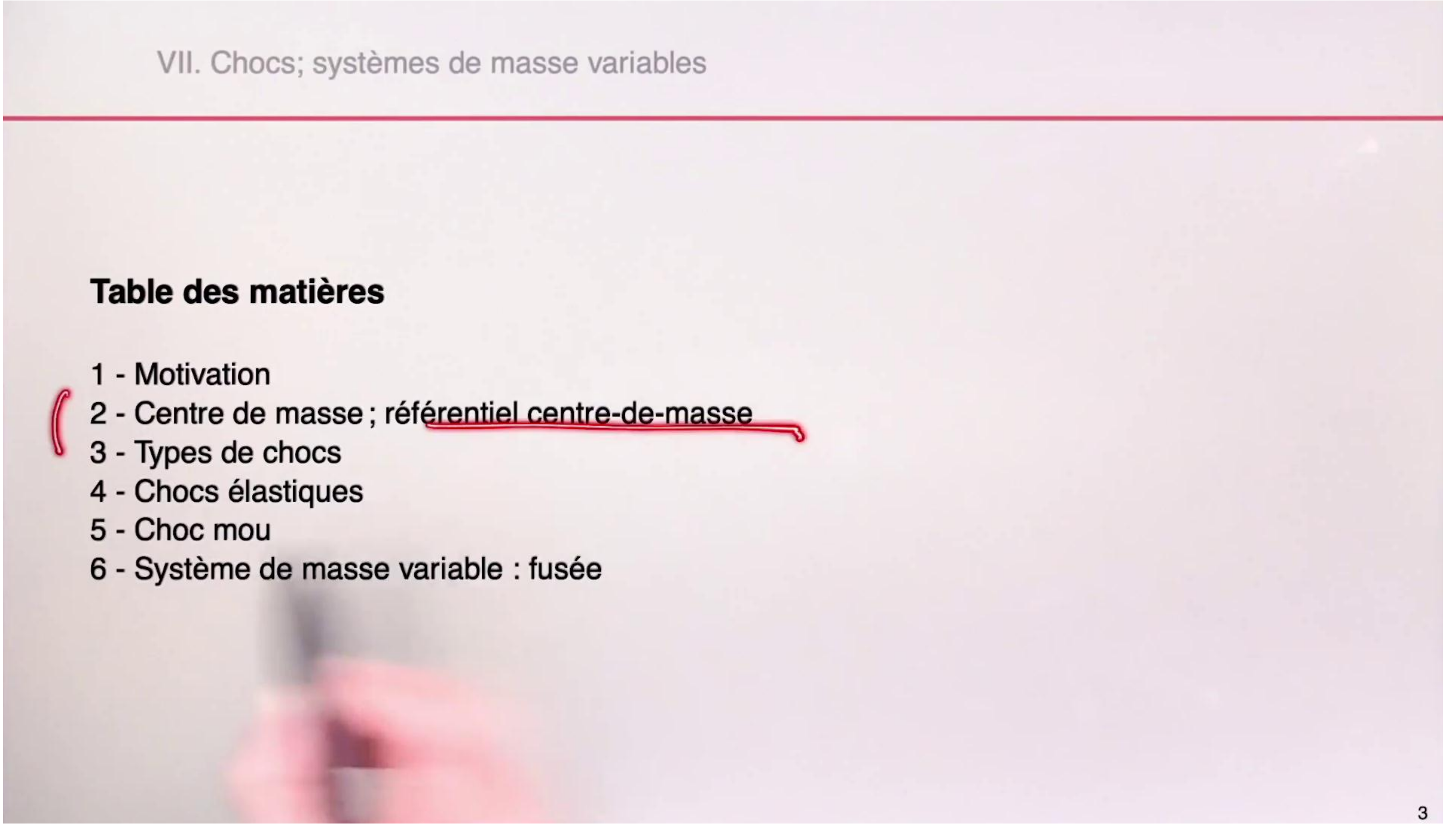



Afin d'analyser un système de particules, nous allons commencer par définir le centre de masse de ce système et voir que nous pouvons utiliser un référentiel lié au centre de masse. Il est nommé référentiel centre-de-masse.

Notes

Summary

0m 05s




Nous sommes dans le chapitre sept : chocs, systèmes de masse variable et nous allons voir la notion de centre de masse; référentiel centre-de-masse, ainsi que les différents types de chocs.

Notes

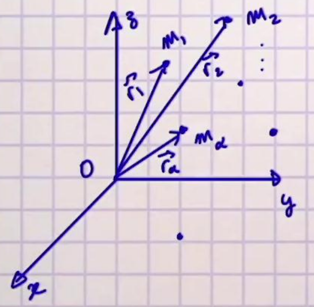
Summary

0m 21s

## 2 - Centre de masse ; référentiel centre-de-masse

Soit un **système** de N particules $(m_1, m_2, \dots m_N)$ à des positions $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N)$ dans un référentiel $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Par définition, le centre de masse *G* du système est donné par




$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \dots m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 \dots + m_N}$$

$$= \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} \qquad M = \sum_\alpha m_\alpha \quad \text{masse totale}$$

5

Notre système est un ensemble de N particules indépendantes et je me place dans un référentiel d'origine O en coordonnées cartésiennes. Je place donc mes N particules. M1, M2, etc. Et je vais utiliser l'indice alpha pour la particule générique, donc M alpha. Ces particules ont des vecteurs positions R1, R2 et la particule alpha a le vecteur position R alpha. Par définition, le centre de masse, que nous noterons G, est la moyenne pondérée des positions des particules alpha et c'est pondéré par la masse de chaque particule. J'obtiens donc la position de G par le vecteur OG qui va être la somme des vecteurs position de chacune des particules : R1, R2, etc., pondérée par la masse. Donc, je dois multiplier par N1, N2 jusqu'à NN, RN et diviser par la somme de toutes les masses : M1 plus M2 plus MN. Nous simplifions cette notation en utilisant la notation somme : somme sur alpha des M alpha, R alpha divisé par la somme sur alpha des M alpha. Nous appellerons grand M la masse totale du système, donc somme sur alpha des M alpha. Nous pourrons donc écrire plus simplement la position du centre de masse OG donnée par somme sur alpha des M alpha, R alpha sur grand M.

Notes

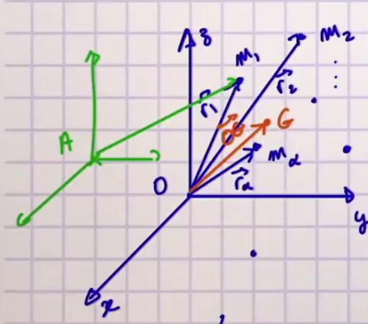
Summary

0m 33s

## 2 - Centre de masse ; référentiel centre-de-masse

Soit un **système** de N particules $(m_1, m_2, ...m_N)$ à des positions $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N)$ dans un référentiel $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Par définition, le centre de masse $G$ du système est donné par




$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \dots m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 \dots + m_N}$$

$$= \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}$$

$M = \sum_\alpha m_\alpha$ masse totale

$$\vec{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}$$

La position de G ne dépend pas de l'origine

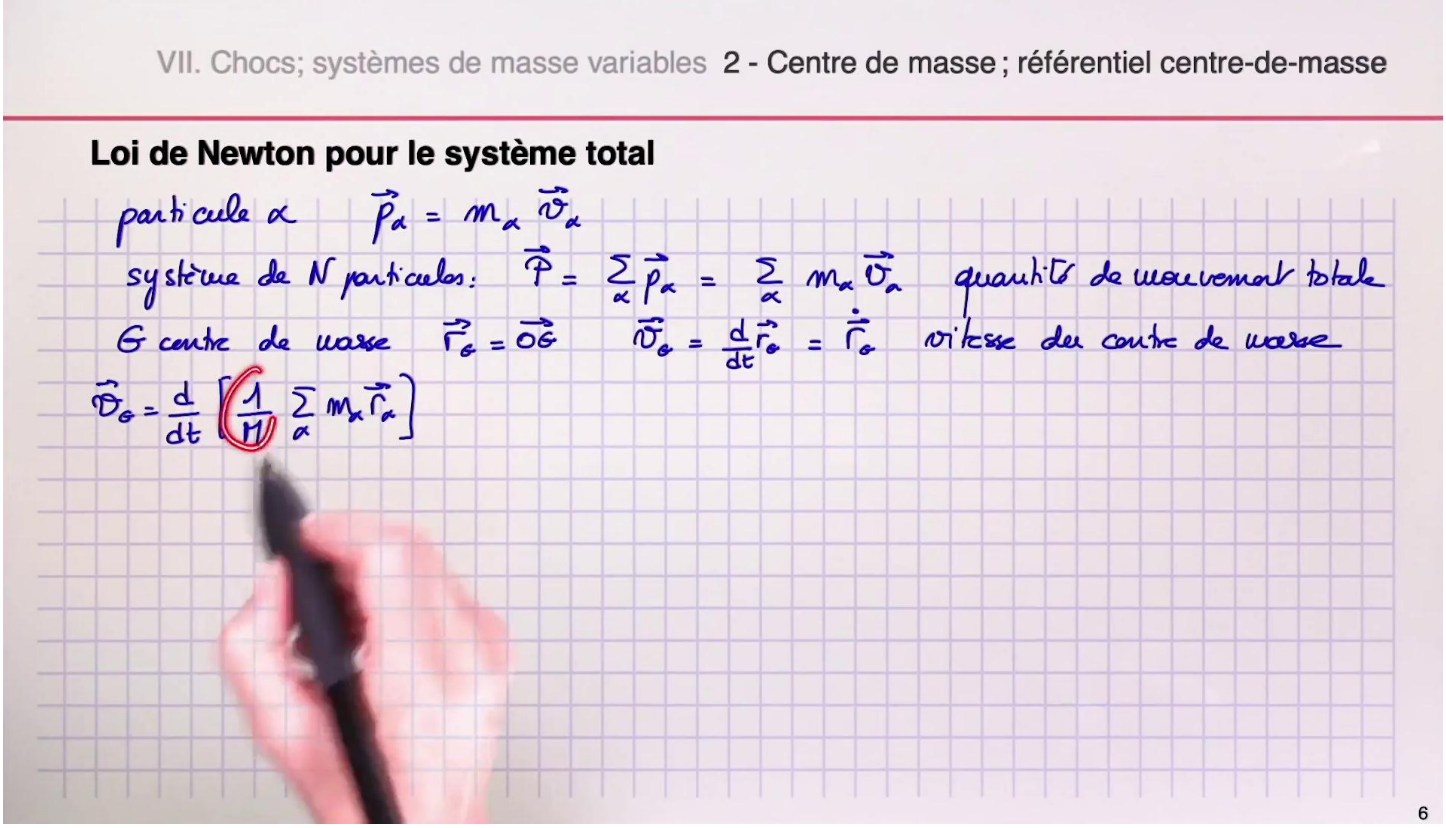
5

Si j'avais choisi une autre origine, A par exemple, avec les mêmes vecteurs de base EX, EY, EZ, les vecteurs positions seraient donnés par les vecteurs A particules. La position du centre de masse serait le vecteur AG. La position dans l'espace par rapport aux particules du centre de masse G ne dépend pas de l'origine. J'aurais donc trouvé le centre de masse au même endroit avec mon origine A.

Notes

Summary

2m 28s

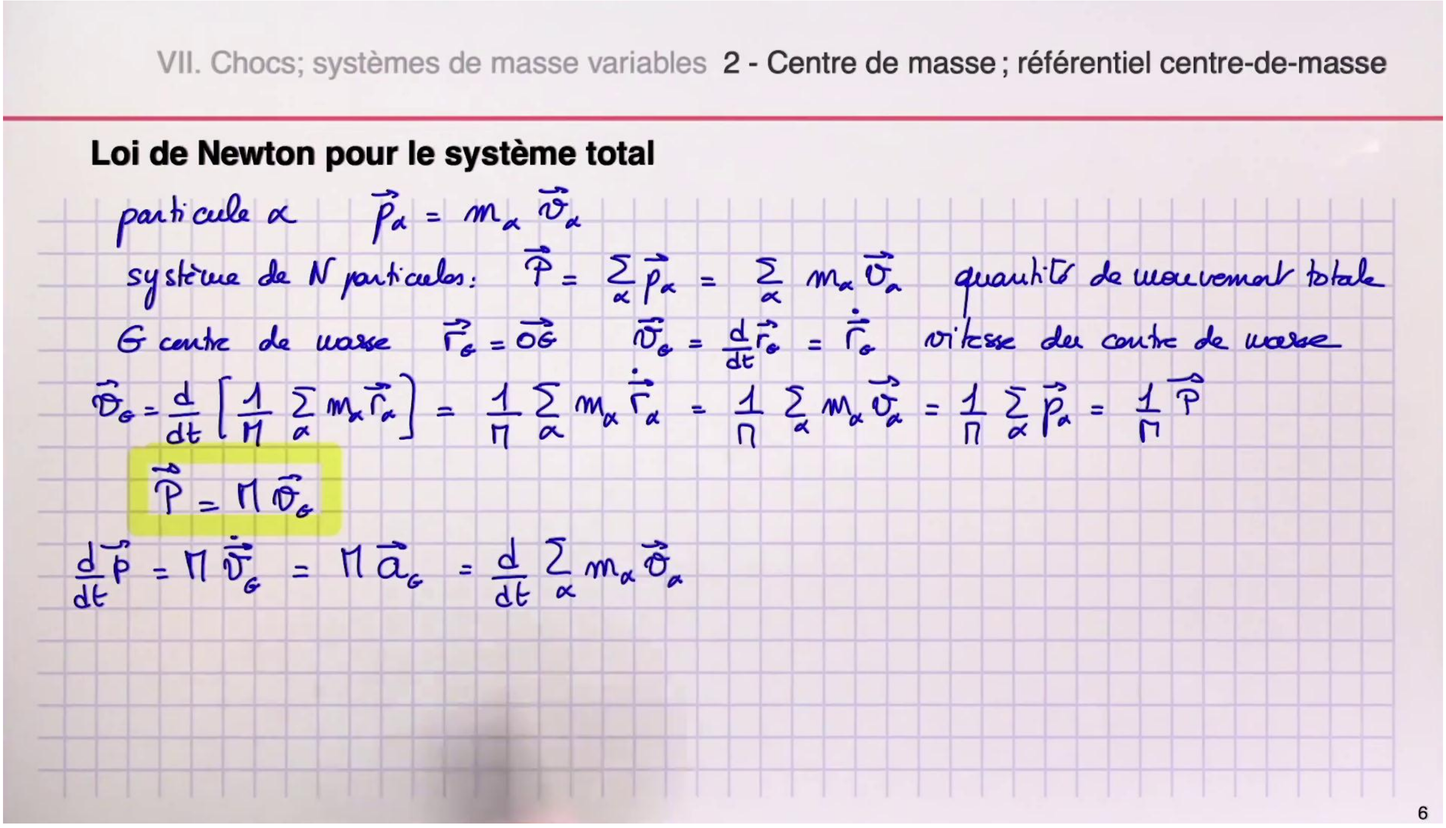



Nous allons utiliser cette notion de sens de masse pour exprimer la loi de Newton pour un système total. Commençons par voir la notion de quantité de mouvement. Pour la particule alpha, la quantité de mouvement P alpha est égale à la masse d'alpha multipliée par la vitesse d'alpha. Pour le système de N particules, la quantité de mouvement P, qui est la quantité de mouvement du système est égale à la somme sur toutes les particules des P alpha. La quantité de mouvement est une grandeur extensive. C'est donc la somme sur les particules alpha des M alpha V alpha. Le centre de masse du système de particules est appelé G. Son vecteur position RG est égal au vecteur OG. Le centre de masse se déplace à la vitesse VG. C'est la vitesse du centre de masse. C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur position du centre de masse, soit DrG sur Dt aussi noté RG point. Puisque la vitesse du centre de masse est la dérivée par rapport au temps du vecteur OG et que par définition OG vaut 1 sur M somme sur alpha des M alpha R alpha, je peux donc calculer la vitesse du centre de masse comme étant la dérivée de cette somme. M est constant, je peux le sortir de la dérivée.

Notes

Summary

3m 14s




J'ai donc la dérivée d'une somme et je peux dériver les termes un par un. Par ailleurs, chaque M alpha est constant et j'obtiens donc la vitesse du centre de masse vaut 1 sur M somme sur alpha des M alpha dérivée par rapport au temps des R alpha. C'est donc 1 sur M somme sur alpha des M alpha V alpha. M alpha V alpha est la quantité de mouvement de la particule alpha. C'est donc 1 sur M somme sur alpha des P alpha qui n'est rien d'autre que 1 sur M grand P, quantité de mouvement totale puisque grand P est la somme sur alpha des P alpha. J'ai donc VG égale 1 sur M grand P ou bien grand P égale grand M VG. La quantité de mouvement totale est égale à la masse totale multipliée par la vitesse du centre de masse. Je vais maintenant dériver cette expression. Cela va me donner la dérivée par rapport au temps de grand P : d sur dt de grand P est égal à grand M dérivée par rapport au temps de la vitesse du centre de masse. Ceci n'est rien d'autre que grand M accélération du centre de masse. Pour obtenir la dérivée par rapport au temps de grand P, je vais dériver par rapport au temps la somme sur alpha des P alpha, donc la somme sur alpha des M alpha V alpha. Ceci n'est rien d'autre que grand P.

Notes

Summary

4m 57s

## Loi de Newton pour le système total

particule $\alpha$ $\quad \vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha$

système de N particules : $\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha$ quantité de mouvement totale

G centre de masse $\quad \vec{r}_G = \vec{OG} \quad \vec{v}_G = \frac{d}{dt}\vec{r}_G = \dot{\vec{r}}_G$ vitesse du centre de masse

$$\vec{v}_G = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha\right] = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha \vec{p}_\alpha = \frac{1}{M}\vec{P}$$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_G}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\dot{\vec{v}}_G = M\vec{a}_G = \frac{d}{dt}\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{a}_\alpha$$

2° loi de Newton sur la particule $\alpha$ $\quad \sum \vec{F}^\alpha = m_\alpha \vec{a}_\alpha = \sum \vec{F}^{int,\alpha} + \sum \vec{F}^{ext,\alpha}$

$$M\vec{a}_G = \sum_\alpha\left(\sum \vec{F}^{int,\alpha} + \sum \vec{F}^{ext,\alpha}\right) = \underbrace{\sum_\alpha\sum \vec{F}^{int,\alpha}}_{\vec{0}} + \underbrace{\sum_\alpha\sum \vec{F}^{ext,\alpha}}_{\sum \vec{F}^{ext}} \quad \Big\} \quad M\vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}$$

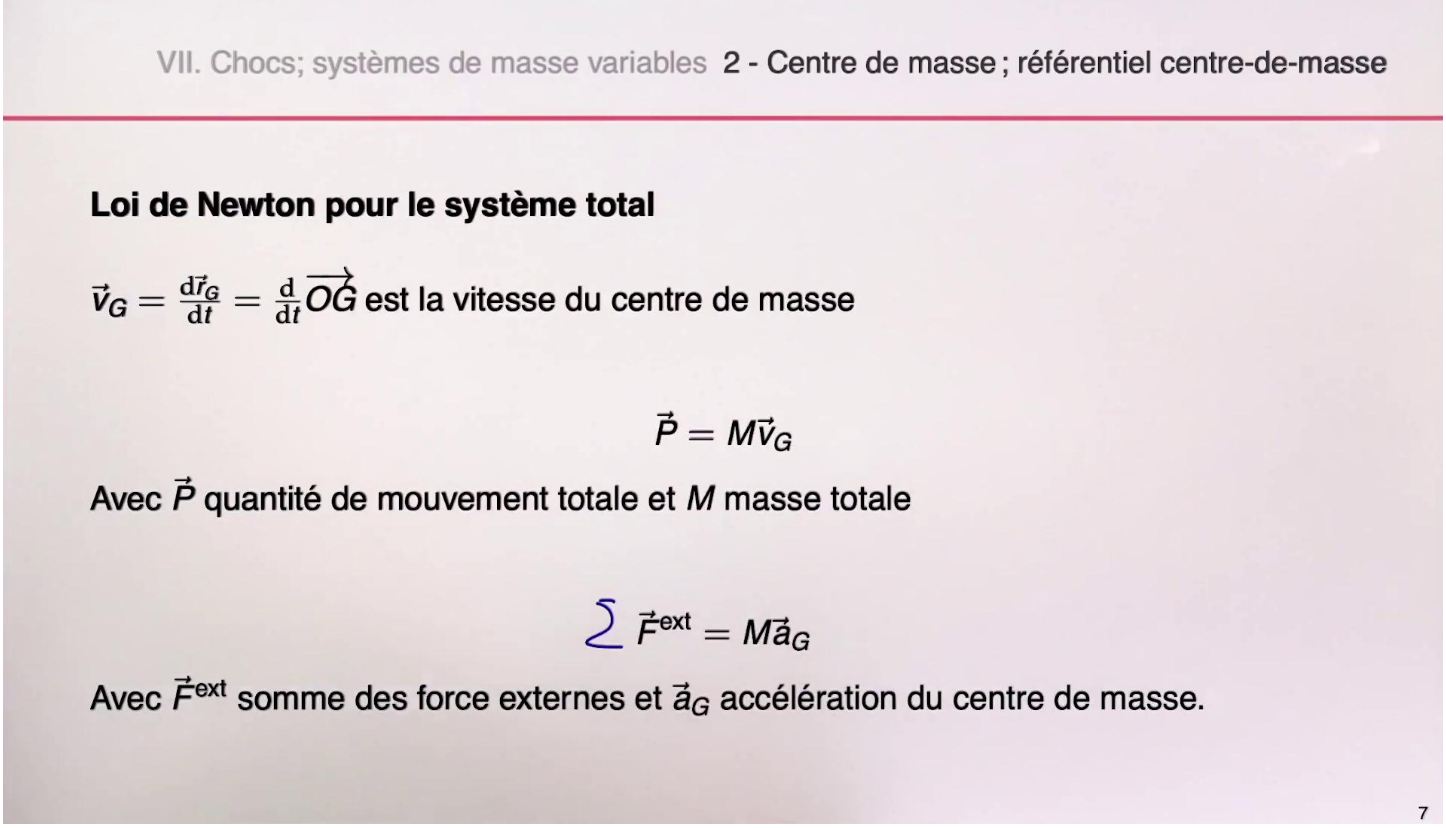
6

À nouveau, je peux rentrer la dérivée dans la somme et obtenir somme sur alpha des M alpha V alpha point. C'est donc somme sur alpha des M alpha A alpha. Si je considère individuellement chaque particule, je peux appliquer la deuxième loi de Newton sur la particule alpha. Elle me dit que la somme de toutes les forces sur la particule alpha est égale à M alpha A alpha. Je peux séparer cette somme des forces, en somme de toutes les forces internes sur la particule alpha plus la somme de toutes les forces externes sur la particule alpha. En introduisant ceci à l'intérieur de la somme, je vais donc avoir une double somme et obtenir M AG est égal à la somme sur alpha de la somme des forces internes sur la particule alpha plus la somme des forces externes sur la particule alpha. Je peux distribuer ma somme et obtenir la somme sur alpha de la somme des forces internes sur alpha plus toutes les sommes sur alpha des sommes des forces externes sur alpha. Ceci est la somme de toutes les forces internes. Nous avons vu que cela vaut zéro, ce terme disparaît. J'ai ici la somme de toutes les forces externes sur toutes les particules du système. C'est la force externe totale. Au final, j'obtiens donc M AG est égal à la somme de toutes les forces externes sur chacune des particules du système.

Notes

Summary

7m 01s

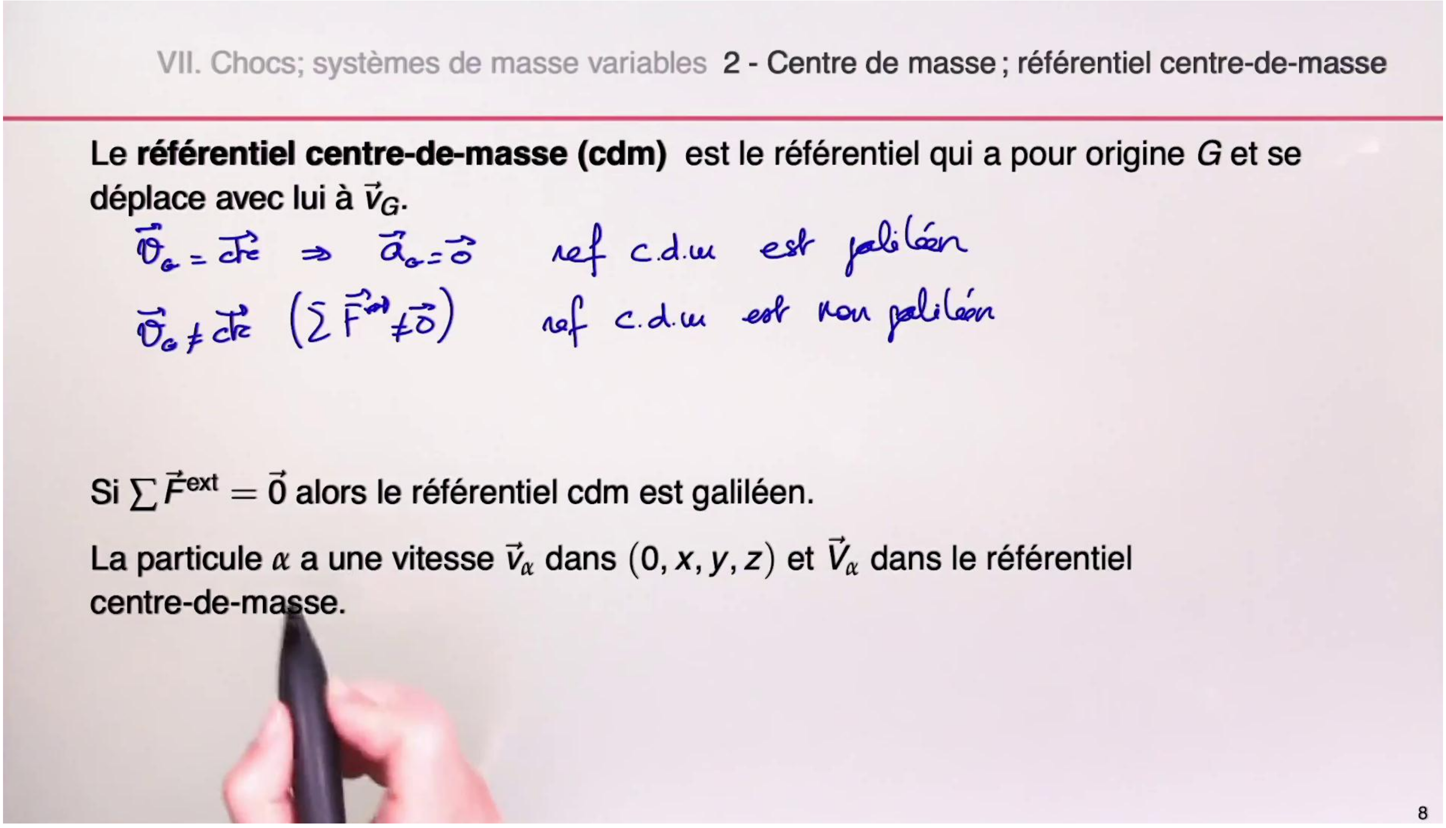



En résumé, lorsqu'on essaye d'exprimer les lois de Newton pour le système total, nous voyons la définition de la vitesse du centre de masse dérivée du vecteur position du centre de masse. Nous avons vu que la quantité de mouvement totale est égale à la masse totale multipliée par VG. Et que la somme de toutes les forces externes, parfois, on omet le signe somme devant, est égale à grand M multiplié par l'accélération du centre de masse. Lorsque j'ai un système de particules, je peux donc appliquer la loi de Newton uniquement au centre de masse et séparer mon problème en un mouvement du centre de masse lié aux forces externes et des mouvements des particules autour de ce centre de masse.

Notes

Summary

9m 19s




Puisque nous pouvons étudier le mouvement des particules autour du centre de masse séparément du mouvement du centre de masse, nous allons utiliser le référentiel centre-de-masse. C'est le référentiel qui a pour origine le centre de masse et se déplace avec lui à la vitesse VG, vitesse du centre de masse. Deux cas de figure : soit la vitesse du centre de masse est constante, dans ce cas-là, l'accélération du centre de masse vaut zéro, le référentiel centre-de-masse, souvent abrégé ref cdm, est galiléen. Soit la vitesse du centre de masse n'est pas constante. Cela vient de ce que la somme des forces externes est non nulle et dans ce cas-là, le référentiel centre-de-masse est non galiléen. Dans notre cas, nous n'étudierons les objets dans le référentiel centre-de-masse que lorsqu'il est galiléen. Si nous sommes dans le cas où la somme des forces externes n'est pas zéro sur l'ensemble du problème, nous séparons le problème en plusieurs morceaux. Plaçons-nous maintenant dans ce cas : somme des forces externes égale zéro, le référentiel centre-de-masse est galiléen. La particule alpha a une vitesse V alpha dans le référentiel du laboratoire et grand V alpha dans le référentiel centre-de-masse.

Notes

Summary

10m 11s

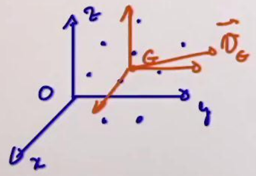
Le **référentiel centre-de-masse (cdm)** est le référentiel qui a pour origine $G$ et se déplace avec lui à $\vec{v}_G$.

$\vec{v}_G = \vec{cte} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0}$ ref c.d.m est galiléen

$\vec{v}_G \neq \vec{cte}$ $(\sum \vec{F}^{ext} \neq \vec{0})$ ref c.d.m est non galiléen

Si $\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0}$ alors le référentiel cdm est galiléen.

La particule $\alpha$ a une vitesse $\vec{v}_\alpha$ dans $(0, x, y, z)$ et $\vec{V}_\alpha$ dans le référentiel centre-de-masse.




$\vec{v}_\alpha = \vec{V}_\alpha + \vec{v}_G$

$\vec{V}_\alpha = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_G$ pas de rotation.

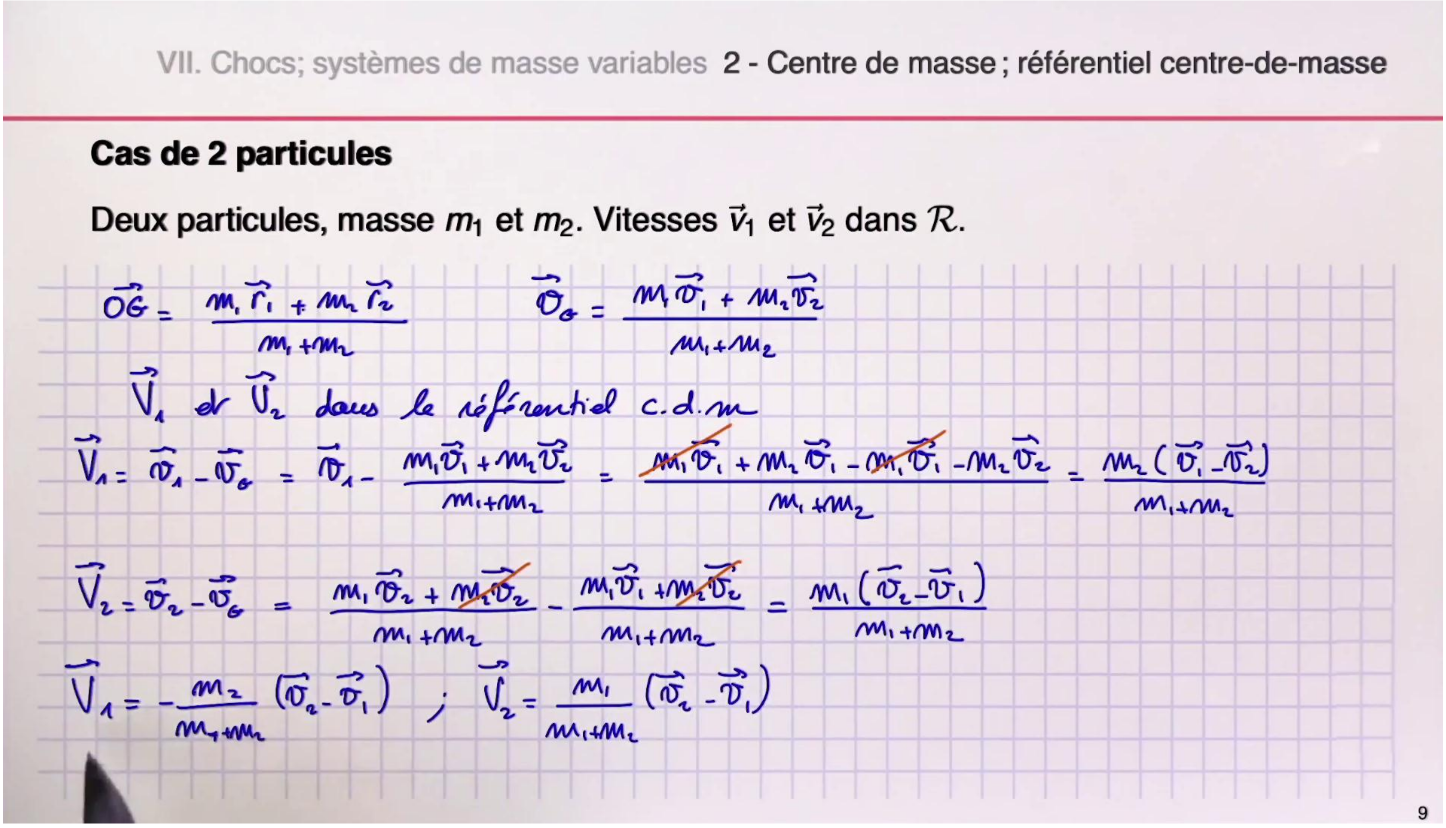


Le centre de masse, lui, se déplace à la vitesse VG. Le référentiel centre-de-masse est en translation dans le référentiel du laboratoire. En l'absence de rotation, j'ai donc petit V alpha est égal à grand V alpha plus VG. Ou bien : grand V alpha est égal à petit V alpha moins VG.

Notes

Summary

11m 50s




Prenons maintenant le cas de deux particules de masse M1 et M2 et de vitesse petit V1 et petit V2 dans grand R. Puisque je n'ai que deux particules, pas besoin de notation avec des sommes, je peux directement écrire OG égale M1 R1 plus M2 R2 sur M1 plus M2. La vitesse du centre de masse VG est égale à M1 V1 plus M2 V2 sur M1 plus M2. Les vitesses des particules dans le référentiel du centre-de-masse sont grand V1 et grand V2. Le but est maintenant d'exprimer grand V1 et grand V2 à l'aide de petit V1, petit V2, M1 et M2. Nous avons vu que grand V1 est égal à petit V1 moins VG. C'est donc petit V1 moins M1 V1 plus M2 V2 sur M1 plus M2. Soit M1 V1 plus M2 V1 moins M1 V1 moins M2 V2 sur M1 plus M2. Les M1 V1 se simplifient. Je peux mettre M2 en facteur et obtenir M2 facteur de V1 moins V2 sur M1 plus M2. V2 se calculera de la même manière. Faites le calcul vous-même. OK, voyons la solution. Grand V2 égale M1 V2 moins V1 sur M1 plus M2. Nous allons donc réécrire V1 et V2. V1 égale... Je vais changer le signe pour avoir V2 moins V1 partout. Donc, moins M2 sur M1 plus M2 V2 moins V1; V2 égale M1 sur M1 plus M2 V2 moins V1. Grand V1 est colinéaire à V2 moins V1. Grand V2 est colinéaire à V2 moins V1.

Notes

Summary

12m 22s

VII. Chocs; systèmes de masse variables 2 - Centre de masse ; référentiel centre-de-masse

## Cas de 2 particules

Deux particules, masse $m_1$ et $m_2$. Vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad \vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le référentiel c.d.m

$$\vec{V}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_G = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{\cancel{m_1\vec{v}_1} + m_2\vec{v}_1 - \cancel{m_1\vec{v}_1} - m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1+m_2}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_2 + \cancel{m_2\vec{v}_2}}{m_1+m_2} - \frac{m_1\vec{v}_1 + \cancel{m_2\vec{v}_2}}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1+m_2}$$

$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ ; $\vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ $\quad$ $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ colinéaires de sens opposé

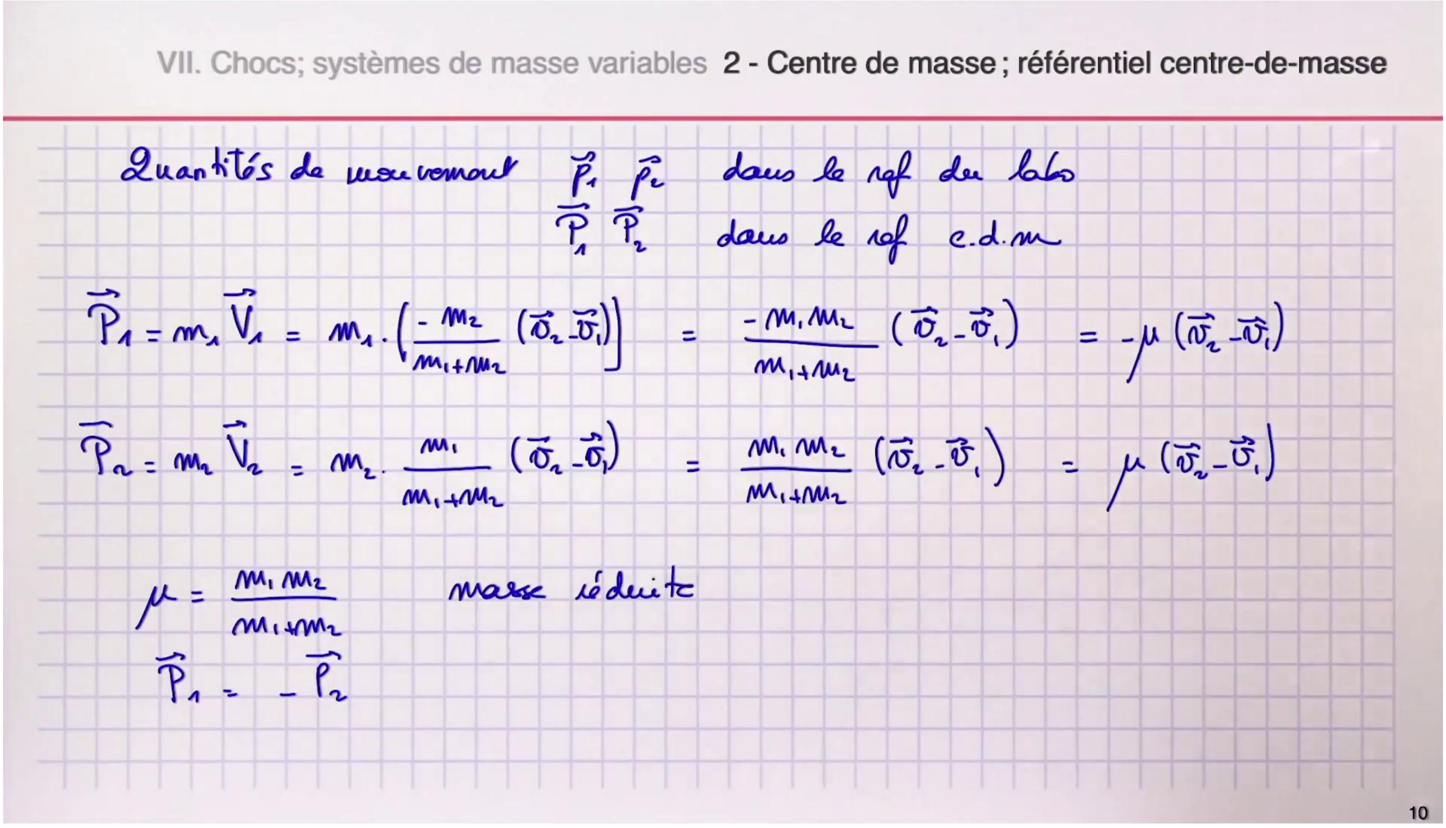
9

Donc, grand V1 et grand V2 sont colinéaires. Par ailleurs, j'ai ici moins une grandeur positive multipliée par V2 moins V1 et ici, plus une grandeur positive multipliée par V2 moins V1. Ils sont donc colinéaires et de sens opposé.

Notes

Summary

14m 51s




Nous allons maintenant chercher les quantités de mouvement P1 et P2 dans le référentiel centre-de-masse. Nous appellerons les quantités de mouvement petit P1 et petit P2 dans le référentiel du laboratoire et grand P1 et grand P2 dans le référentiel centre-de-masse. Grand P1 est égal à M1 grand V1. C'est donc M1 multiplié par moins M2 sur M1 plus M2, V2 moins V1. Soit moins M1 M2 sur M1 plus M2, V2 moins V1. Grand P2 vaut M2 grand V2 soit M2 multiplié par M1 sur M1 plus M2, V2 moins V1. C'est M1 M2 sur M1 plus M2, V2 moins V1. Nous retrouvons ici deux fois la même quantité : M1 M2 sur M1 plus M2, M1 M2 sur M1 plus M2. Là, juste, j'ai un signe moins. Nous allons lui donner la même définition. Nous allons l'appeler μ. C'est ce qu'on appelle la masse réduite. Avec cette masse réduite, P1 vaut moins μ V2 moins V1 et grand P2 : μ V2 moins V1. Nous voyons donc que P1 égale moins P2, les quantités de mouvement sont très exactement opposées dans le référentiel centre-de-masse pour les deux particules.

Notes

Summary

15m 12s

VII. Chocs; systèmes de masse variables **2 - Centre de masse ; référentiel centre-de-masse**

**Résumé :** Deux particules, masse $m_1$ et $m_2$. Vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{R}$.

Dans le réf. cdm les particules ont les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1); \qquad \vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1 = -\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad \vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2 = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

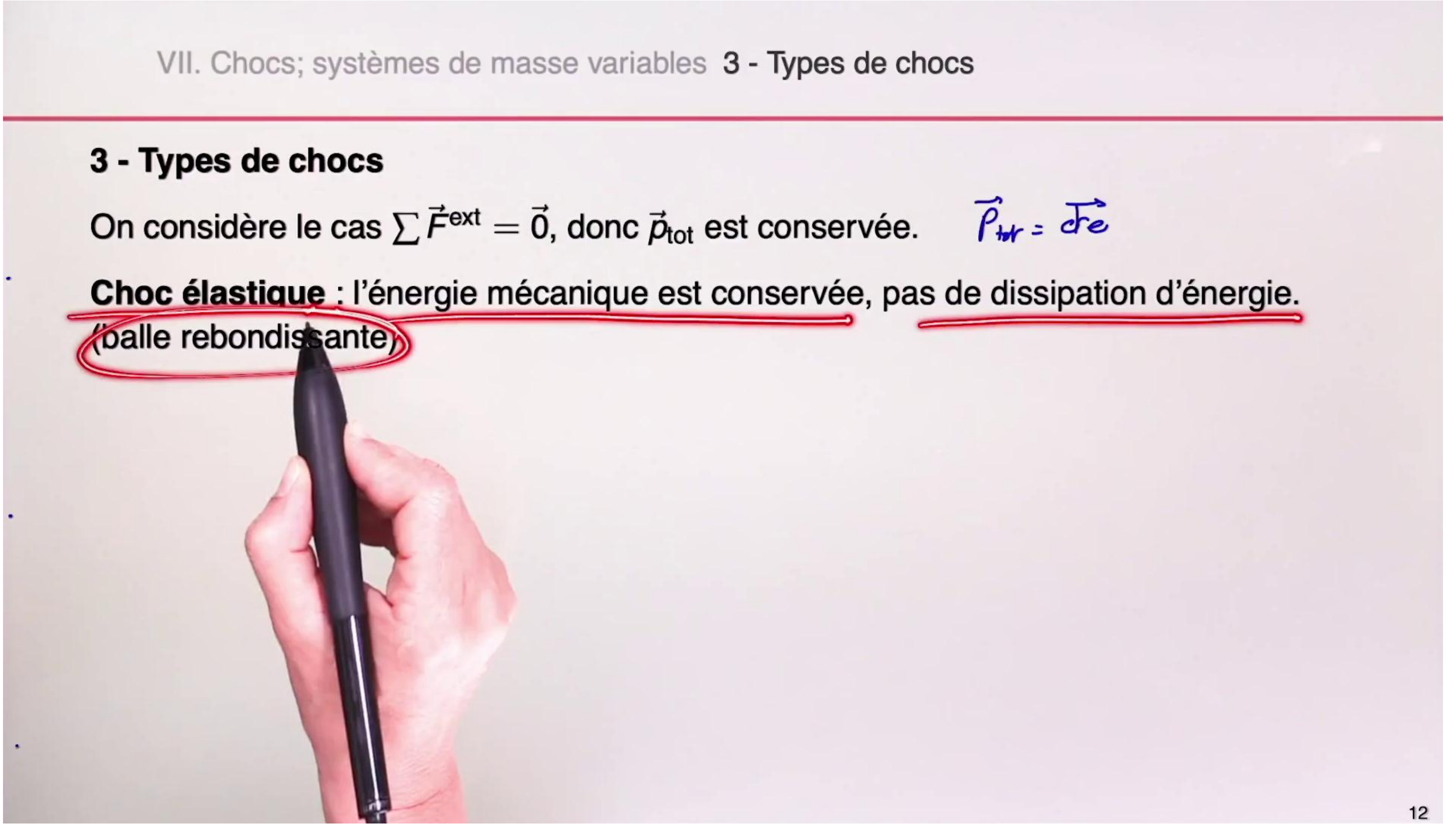
11

En résumé, pour deux particules de masse M1 et M2, de vitesse petit V1 et V2 dans grand R, ayant des vitesse grand V1 et grand V2 dans le référentiel centre-de-masse, la vitesse du centre de masse est donnée par VG égale M1 V1 plus M2 V2 sur M1 plus M2. La vitesse grand V1 s'obtient comme moins M2 sur M1 plus M2, V2 moins V1. La vitesse grand V2 dans le référentiel centre-de-masse, c'est M1 sur M1 plus M2, V2 moins V1. En utilisant la masse réduite µ qui vaut M1 M2 sur M1 plus M2, nous obtenons que la quantité de mouvement de P1 vaut moins µ petit V2 moins petit V1 et la quantité de mouvement de la particule deux dans le référentiel centre-de-masse vaut µ V2 moins V1. Grand P2 égale moins grand P1.

Notes

Summary

17m 10s




Ce référentiel centre-de-masse et les quantités de mouvement nous permettront d'analyser les chocs. Nous considérons toujours que nous avons somme des forces externes qui vaut zéro. Puisque la somme des forces externes vaut zéro, on dit que la quantité de mouvement totale est conservée. En effet, la première loi de Newton nous dit que si somme des forces vaut zéro, P égale constante. C'est ce qu'on appelle la conservation de la quantité de mouvement. Cette conservation de la quantité de mouvement est indépendante des forces internes. Elle est donc indépendante des types de forces entre les particules, donc indépendante des types de chocs que nous avons. Elle ne demande que d'avoir somme des forces externes qui vaut zéro. La nature des forces internes vont changer les types de chocs. Nous verrons deux types principaux. Un premier extrait est ce que l'on appelle le choc parfaitement élastique. Dans ce choc, l'énergie mécanique est conservée. Il n'y a pas de ce que l'on appelle dissipation d'énergie. En gros, pas de conversion d'énergie mécanique en chaleur. C'est le cas d'une balle parfaitement rebondissante. L'énergie mécanique avant le choc sera donc égale à l'énergie mécanique après le choc.

Notes

Summary

18m 15s

## 3 - Types de chocs

On considère le cas $\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0}$, donc $\vec{p}_{tot}$ est conservée. $\vec{P}_{tot} = \vec{cte}$

**Choc élastique** : l'énergie mécanique est conservée, pas de dissipation d'énergie. (balle rebondissante)

Avant — Après

$E_m^i = E_p^i + E_c^i \quad = \quad E_m^f = E_p^f + E_c^f$ conservation $E_c$ : $E_c^i = E_c^f$

$\vec{P}_{tot}^i \quad = \quad \vec{P}_{tot}^f$

**Choc parfaitement inélastique/choc mou** : pas de rebondissement, les objets restent collés après le choc

12

Nous aurons donc avant et après l'énergie mécanique qui est la somme de l'énergie potentielle plus l'énergie cinétique. Comme c'est avant, nous l'appelons initiale. Après le choc, l'énergie mécanique qui est la somme de l'énergie potentielle finale plus l'énergie cinétique finale. L'énergie mécanique étant conservée, nous avons EMi égale EMf. Par ailleurs, nous avons dit que le choc se passe à un endroit de l'espace donné. L'énergie potentielle avant sera donc égale à l'énergie potentielle après puisque les objets sont restés au même endroit. Cela implique que l'on peut supprimer l'énergie potentielle du bilan d'énergie et dire que l'énergie cinétique avant est égale à l'énergie cinétique après. C'est ce que l'on appelle la conservation de l'énergie cinétique dans un choc élastique. Par ailleurs, nous avons toujours la quantité de mouvement totale initiale qui est égale à la quantité de mouvement totale finale. Le deuxième cas extrême est le choc parfaitement inélastique ou choc mou. Dans celui-ci, il n'y a pas de rebondissement, les objets restent collés après le choc. Afin qu'ils restent collés, ils ont dû se déformer et cette déformation implique une conversion d'énergie mécanique en chaleur.

Notes

Summary

19m 40s

## 3 - Types de chocs

On considère le cas $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$, donc $\vec{p}_{\text{tot}}$ est conservée. $\vec{P}_{tot} = cte$

**Choc élastique** : l'énergie mécanique est conservée, pas de dissipation d'énergie. (balle rebondissante)

Avant $E_m^i = E_p^i + E_c^i$ = Après $E_m^f = E_p^f + E_c^f$ conservation $E_c$ : $E_c^i = E_c^f$

$\vec{P}_{tot}^i = \vec{P}_{tot}^f$

**Choc parfaitement inélastique/choc mou** : pas de rebondissement, les objets restent collés après le choc

Pas de conservation de Em !

$\vec{P}_{tot}^i = \vec{P}_{tot}^f$

après le choc $\vec{v}_2' = \vec{v}_1'$

Les cas réels sont presque toujours entre les deux.

12

De l'énergie est utilisée pour la déformation. Nous n'aurons donc pas de conservation de l'énergie mécanique. Par contre, nous avons toujours conservation de la quantité de mouvement. Nous aurons aussi une information supplémentaire sur le fait que, après le choc, les deux objets restant collés ne font plus qu'un et se déplaceront donc à la même vitesse. Bien évidemment, c'est une simplification. Les cas réels sont presque toujours entre les deux, mais nous avons besoin de cette simplification pour analyser les problèmes.

Notes

Summary

21m 17s

Voilà, nous avons vu la notion de centre de masse et référentiel centre-de-masse. L'intérêt de ces notions est que cela permet de découpler le mouvement d'ensemble du système du mouvement des particules à l'intérieur du système. La grande puissance de cette notion de centre de masse, c'est que les lois de Newton globales s'appliquent au centre de masse. Au passage, c'est ce qui nous permet de justifier a posteriori l'utilisation de la mécanique du point dans laquelle nous avons dit que la masse entière de l'objet est concentrée en un point qui est son centre de masse.

Notes

Summary

21m 59s