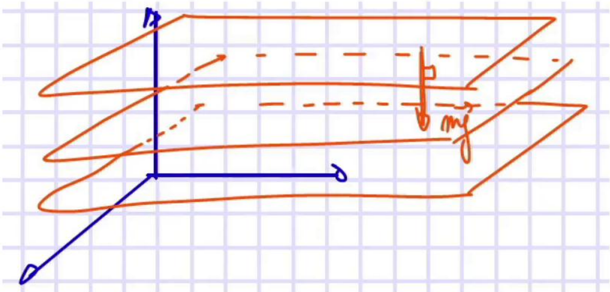
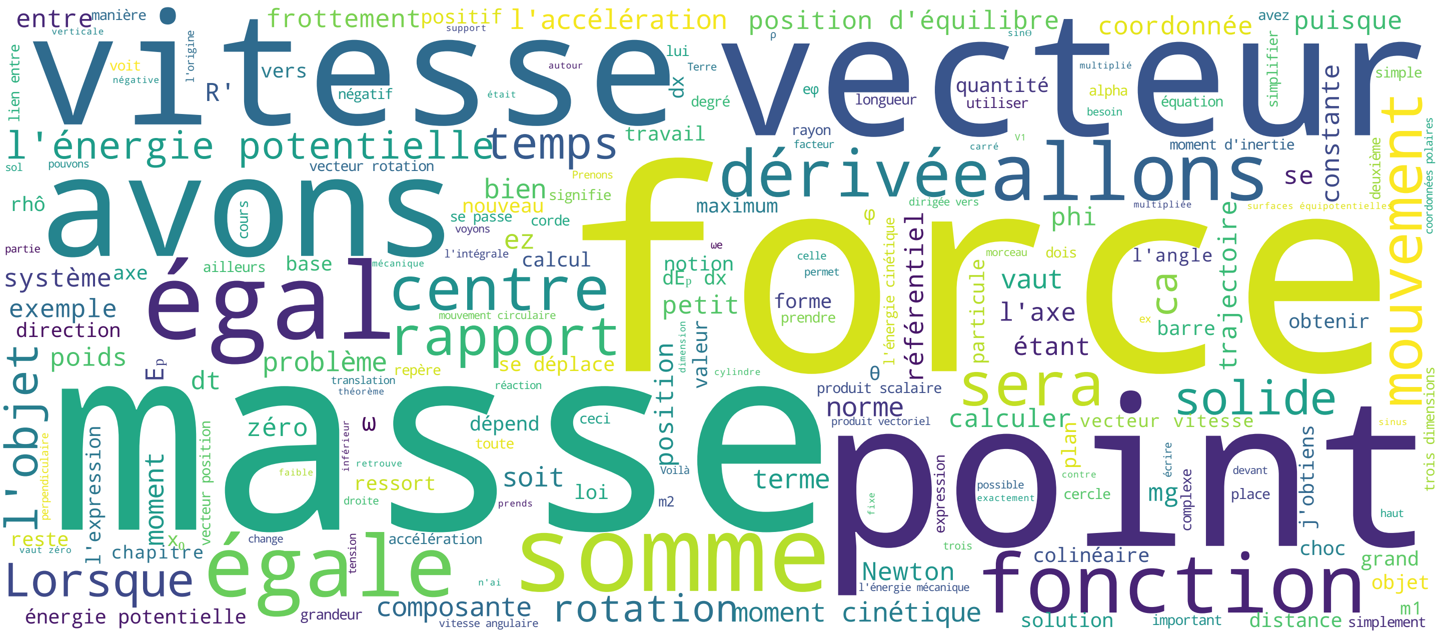
Physique générale : mécanique

Surfaces équipotentielles :



Force dérivant d'un potentiel

Prof. Cécile Hébert



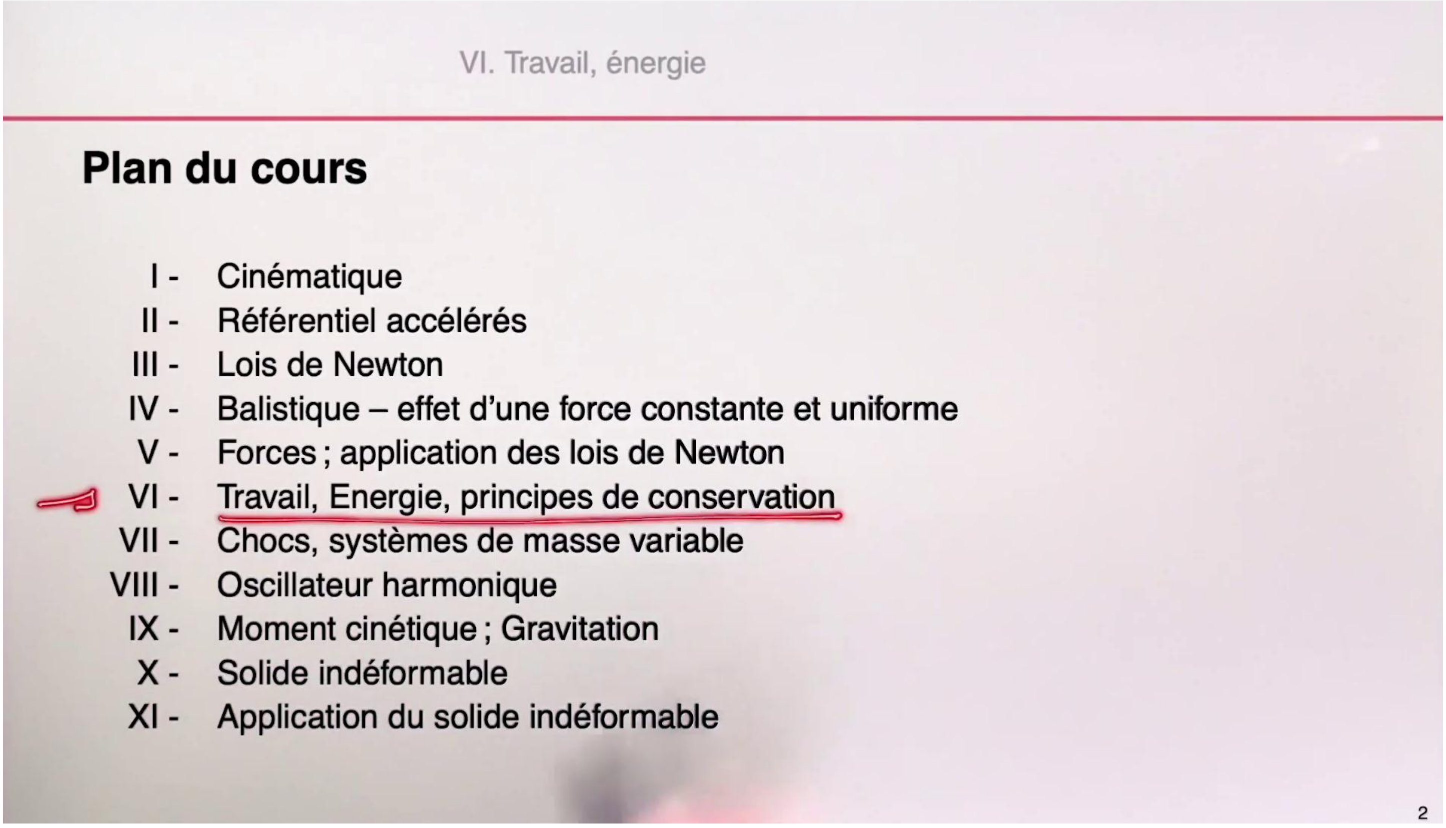
Video

Bonjour. Dans cette vidéo, nous allons approfondir un petit peu la notion d'énergie potentielle et voir le lien entre l'énergie potentielle et la force. Vous comprendrez aussi pourquoi on parle d'une force qui dérive d'un potentiel. Nous ferons une brève incursion dans un monde à trois dimensions, mais nous devrons malheureusement le laisser un peu de côté, car vous n'avez pas encore les outils mathématiques. Mais il est important de comprendre que ce que nous développons maintenant sera approfondi dans des cours d'électromagnétisme, par exemple.

Notes

Summary

0m 05s



Nous sommes dans le chapitre VI : Travail, Énergie et principe de conservation, et nous allons approfondir un peu la notion d'énergie potentielle.

Notes

Summary

0m 40s

VI. Travail, énergie

Table des matières

VI - 1 Travail d'une force, puissance

VI - 2 Energie cinétique

VI - 3 Energie potentielle et énergie mécanique

VI - 4 Lien entre force et énergie potentielle

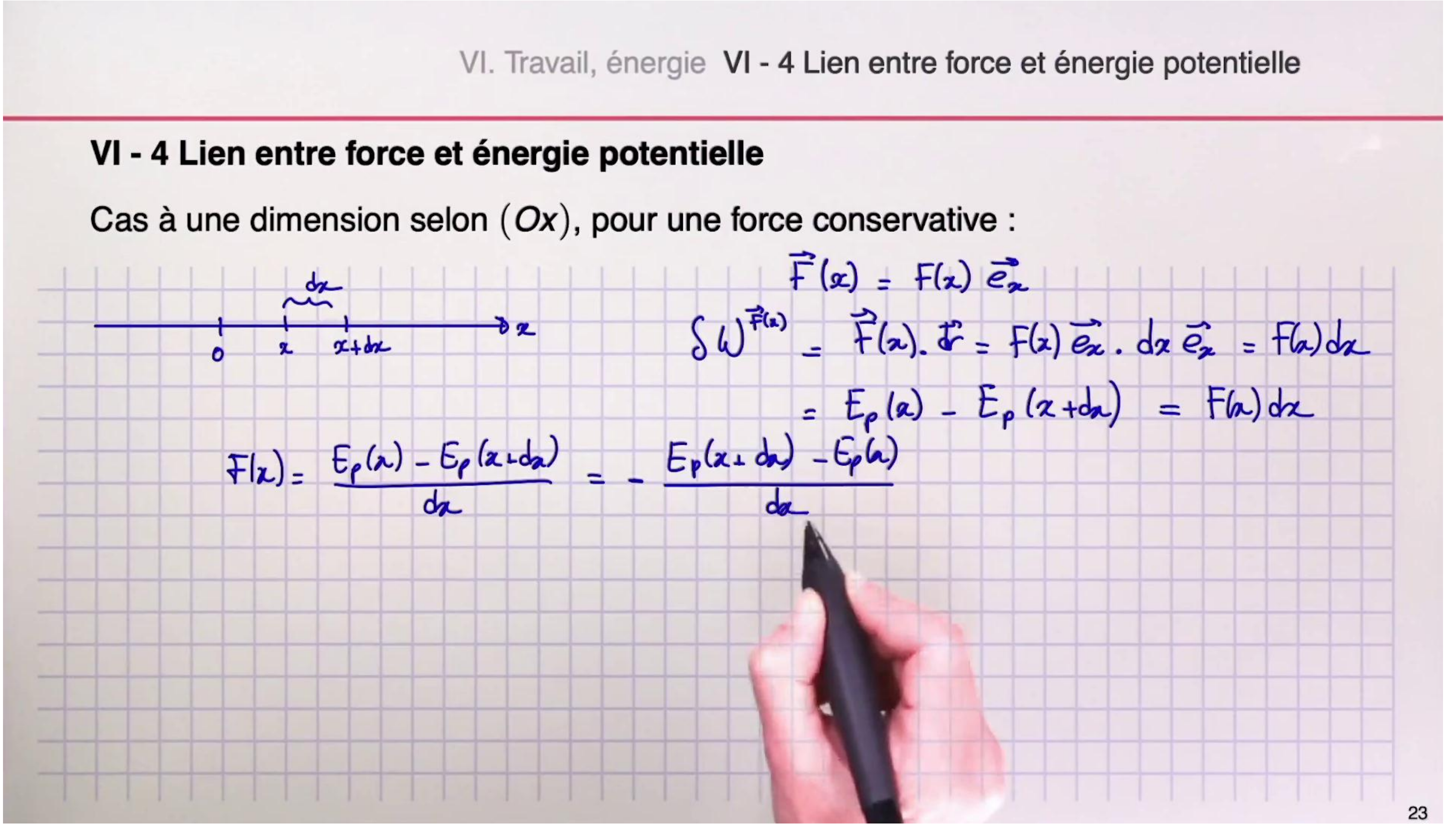
VI - 5 Energie potentielle et équilibre

3

Notes

Summary

0m 43s



Afin de simplifier le problème, nous allons considérer pour l'instant un cas à une dimension et une force conservative. Je suppose donc que mon objet ne peut se déplacer que sur un axe Ox et les forces sont bien sûr selon l'axe aux Ox. La force qui s'applique sur l'objet au point x est donc égale à F(x), la composante fois le vecteur de base e_x. Supposons que l'objet est en x, puis se déplace jusqu'à x+dx d'un déplacement infinitésimal dx. Le travail infinitésimal δW de la force pour le déplacement de x à x+dx est égal à F(x) scalaire dr. C'est donc égal à $F(x)e_x$ produit scalaire dr qui est ici dx e_x. C'est donc égal à F(x)dx Or, nous venons de dire que la force est conservative, elle est donc associée à une énergie potentielle. Ce travail infinitésimal sera égal à l'énergie potentielle de départ, donc E_p (x) moins l'énergie potentielle à l'arrivée E_p en (x+dx). J'ai donc $E_p(x)$ - $E_p(x+dx)$ = F(x)dx. Passons le dx de l'autre côté. Je vais obtenir : F(x) = ($E_p(x)$ - E_p (x+dx)) / dx Généralement, on commence par x+dx, c'est donc -($E_p(x+dx)$ - $E_p(x)$) / dx. Lorsque je fais tendre dx vers 0, j'obtiens la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à x et j'ai toujours le moins devant.

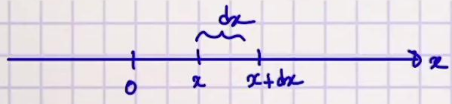
Notes

Summary

0m 48s

VI - 4 Lien entre force et énergie potentielle

Cas à une dimension selon (Ox), pour une force conservative :



$$\vec{F}(x) = F(x)\,\vec{e}_x$$

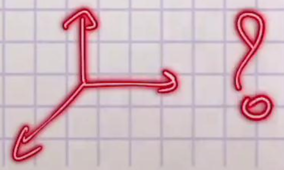
$$\delta W^{\vec{F}(x)} = \vec{F}(x).\vec{dr} = F(x)\,\vec{e}_x . dx\,\vec{e}_x = F(x)\,dx$$

$$= E_p(x) - E_p(x+dx) = F(x)\,dx$$

$$F(x) = \frac{E_p(x) - E_p(x+dx)}{dx} = -\frac{E_p(x+dx) - E_p(x)}{dx} = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Force dérive d'un potentiel $\Leftrightarrow$ force conservative



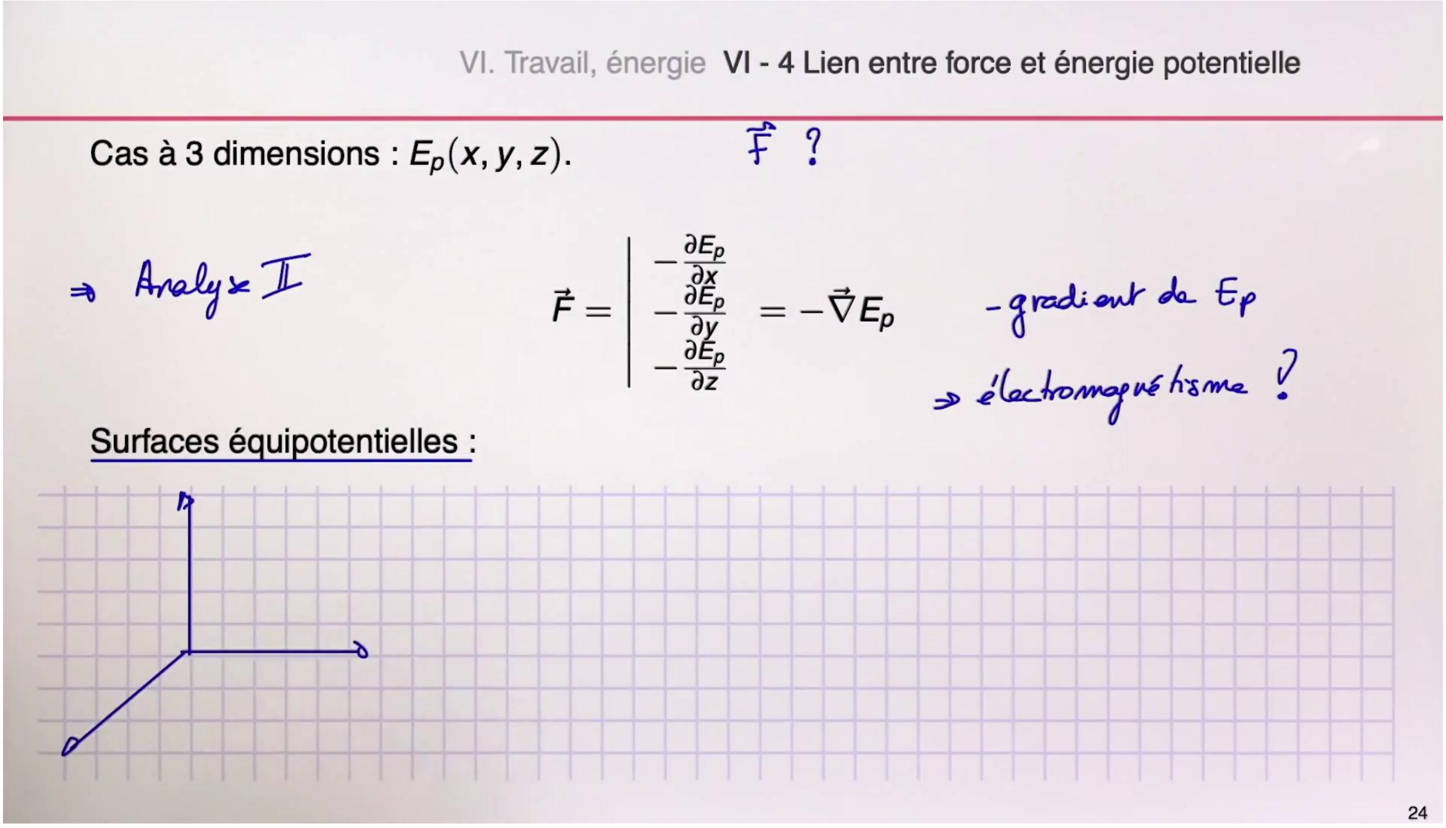
23

J'ai donc F(x) = - dE$_p$/dx. Si je connais l'énergie potentielle, la force ressentie par l'objet est - dE$_p$/dx. On dit que la force dérive d'un potentiel. C'est équivalent à dire que la force est conservative. Ça, c'était à une dimension. Que se passe-t-il à trois dimensions x, y, z ?

Notes

Summary

2m 59s



À trois dimensions, l'énergie potentielle est une fonction des trois variables x, y et z. Comment obtenir la force en un point considéré, sachant que la force est un vecteur ? Et comment dériver une fonction comme ça qui est de trois variables ? Vous verrez ce dont vous avez besoin en Analyse II, lorsque vous verrez les fonctions de plusieurs variables. Globalement, ce que vous allez faire, c'est commencer par considérer la première variable x et calculer la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à x en considérant les coordonnées y et z constantes. Cela vous donnera la composante de F sur x et c'est noté avec une dérivée où on met un D rond au lieu d'un D droit. Pareil pour y et pour z. Et vous aurez ainsi les trois composantes de la force F : F(x), F(y) et F(z). Pour simplifier la notation, on utilise cet opérateur, un delta sur la pointe avec une flèche dessus appelé « Gradient » et on dit que la force est moins le gradient de l'énergie potentielle. Cette approche est absolument indispensable en électromagnétisme. Cela nous permet aussi à trois dimensions de définir la notion de surfaces équipotentielles. Dans mon espace à trois dimensions, je peux regrouper ensemble les points qui sont à la même énergie potentielle.

Notes

Summary

3m 32s

Cas à 3 dimensions : $E_p(x, y, z)$. $\vec{F}$?

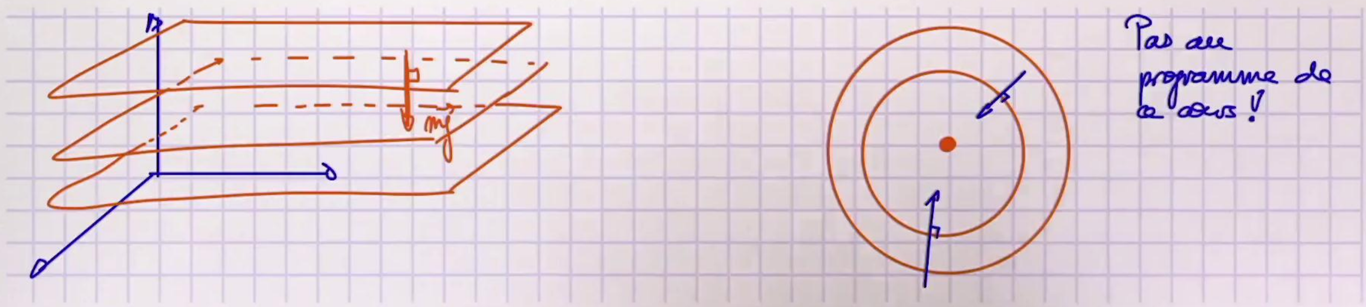
⇒ Analyse II

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{vmatrix} = -\vec{\nabla} E_p$$

- gradient de E_p

⇒ électromagnétisme ?

Surfaces équipotentielles :



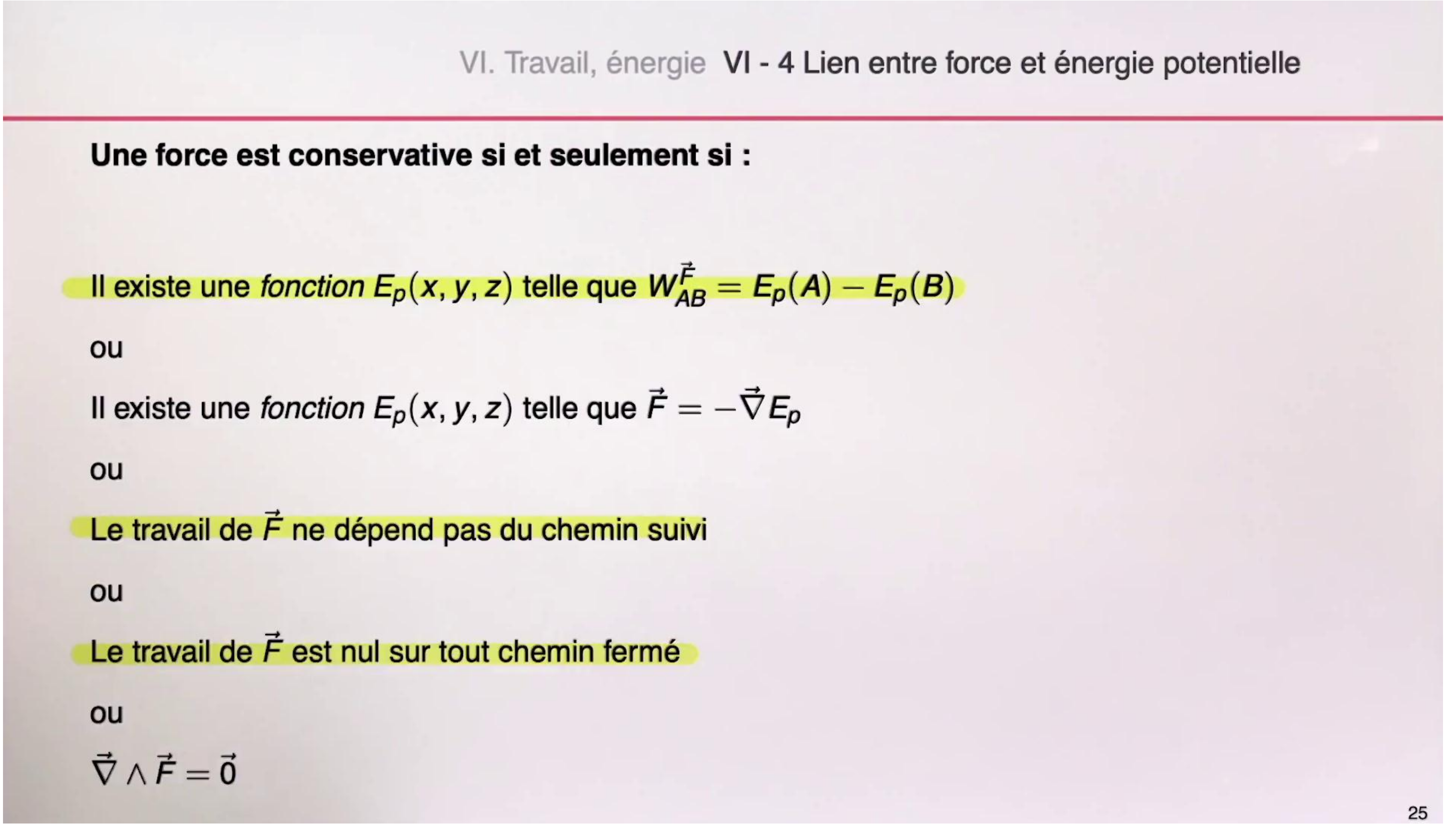
24

Prenons, par exemple, le poids dans le cas d'un champ de pesanteur. Tous les points qui sont à la même altitude, donc dans un plan horizontal, ont la même valeur de E_p. C'est une surface équipotentielle. Si je descends, j'ai une autre valeur de E_p, mais à nouveau, ils sont tous groupés entre eux. J'ai ici des surfaces équipotentielles qui sont des plans. La force, qui est le poids dans ce cas-là, est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles. Lorsque vous avez une force centrale, par exemple, une particule chargée qui attire une autre particule chargée, un problème à symétrie sphérique, les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées autour de l'objet. La force, toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, est alors toujours dirigée vers l'objet. À nouveau, c'est quelque chose que vous utiliserez en électromagnétisme. Ne vous inquiétez pas, ça n'est pas au programme de ce cours de mécanique I.

Notes

Summary

5m 12s

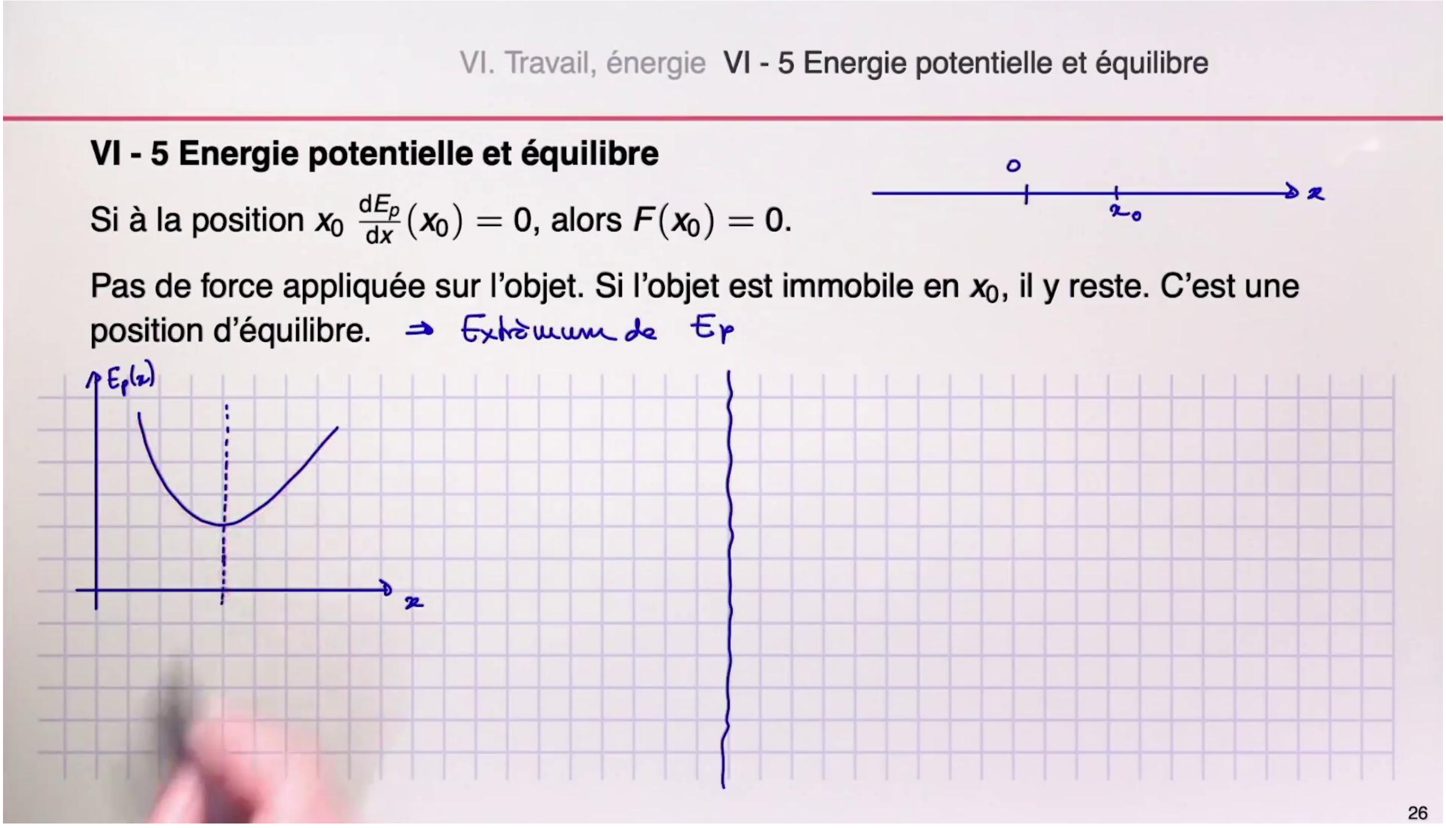


Mais revoyons un peu ce que nous avons dit sur les forces conservatives. C'est donc une force qui est associée à un potentiel. Donc, une force est conservative s'il existe une fonction énergie potentielle telle que le travail de A à B de la force soit $E_p(A) - E_p(B)$. On peut aussi dire, il existe une fonction énergie potentielle telle que F égale moins gradient de E_p, ou bien le travail de F ne dépend pas du chemin suivi, le travail de F est nul sur tout chemin fermé. Forcément, si ça ne dépend pas du chemin suivi, quand je reviens au point A le travail de A à A doit être égal à 0. Ou bien le rotationnel de F vaut 0. Dans ce cours, nous utiliserons cette approche, celle-ci et celle-là. Vous verrez les autres plus tard.

Notes

Summary

6m 30s

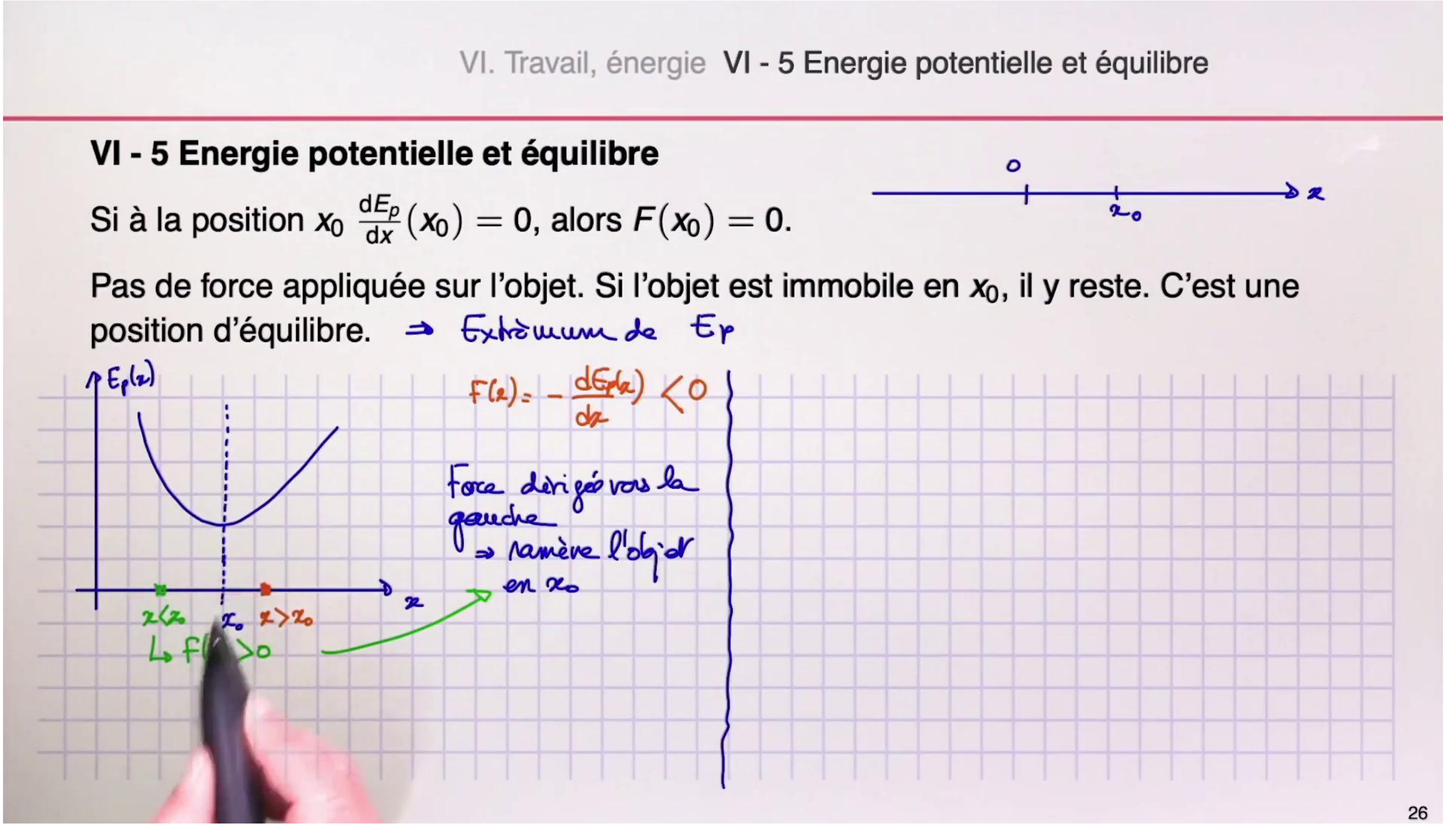


Voyons maintenant le lien entre énergie potentielle et l'équilibre d'un objet. Revenons à une dimension puisque c'est ce que nous pouvons maîtriser maintenant. Donc, considérons un objet qui se déplace sur un axe ox et plaçons-le à la position x_0. Supposons qu'à la position x_0, la dérivée de l'énergie potentielle en fonction de x vaille 0. Alors à la position x_0, lorsque je place l'objet ici, puisque la force est égale à moins la dérivée de l'énergie potentielle, la dérivée de l'énergie potentielle vaut 0, donc la force vaut 0. J'ai placé l'objet ici, il ne subit aucune force, donc il est là, il y reste. C'est une position d'équilibre. À quelles conditions a-t-on dérivée de E_p qui vaut 0 ? Si nous avons un extremum de l'énergie potentielle, donc soit un minimum, soit un maximum. Donc, un extremum de E_p correspond à une position d'équilibre. Un extremum pouvant être un minimum ou un maximum, nous allons voir les deux cas. Prenons le premier cas d'un minimum de l'énergie potentielle. Toujours sur l'axe x et en x_0, ma fonction énergie potentielle en fonction de x a un minimum. Ça ne veut pas dire que la fonction est symétrique par rapport à cet axe. Ça veut juste dire que le point x_0 correspond à un minimum.

Notes

Summary

7m 24s

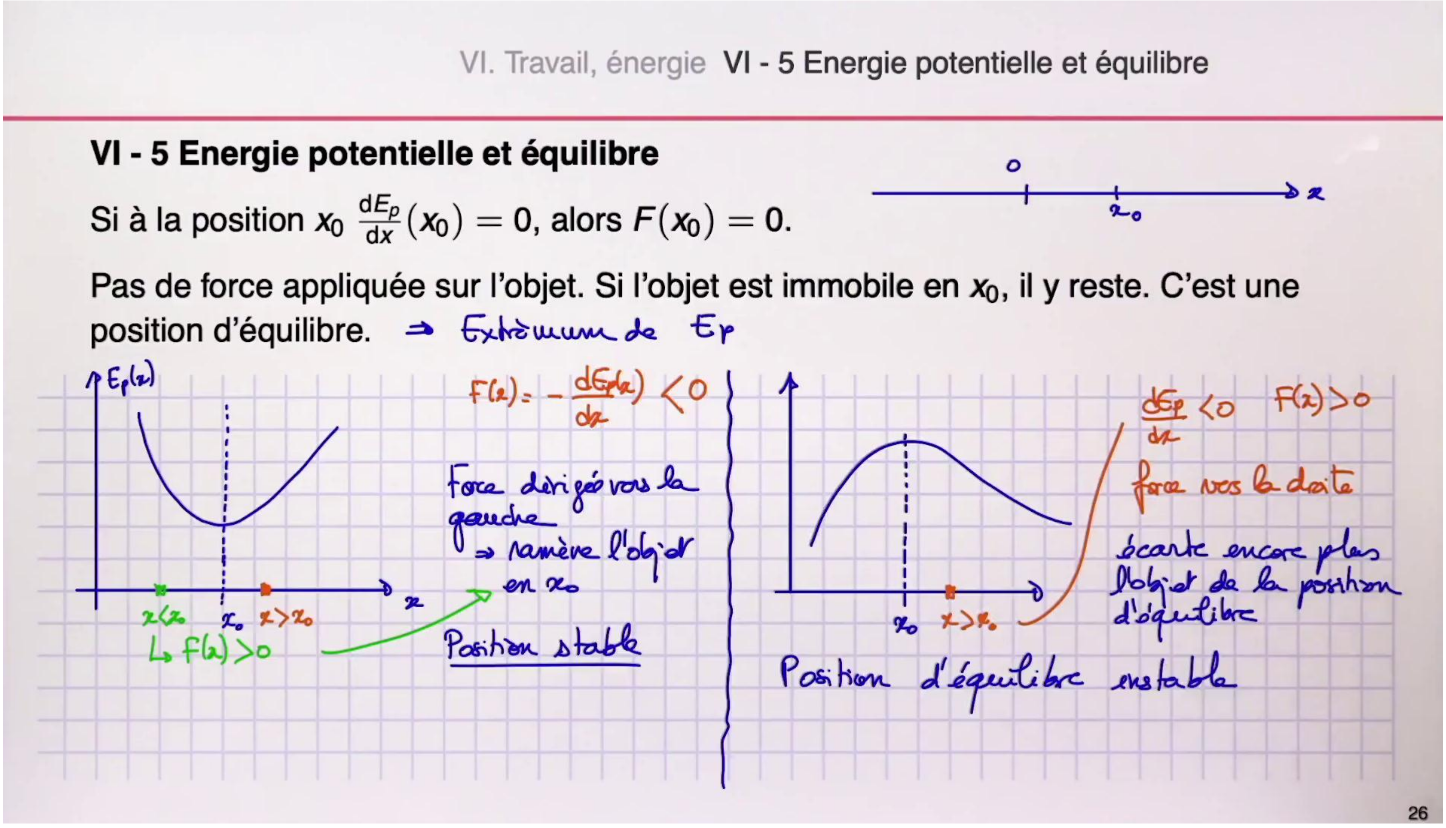


Prenons l'objet qui était en x_0 et déplaçons le en x supérieur à x_0. La force ressentie par l'objet $F(x) = - dE_p/dx$ en x. Puisque j'avais un minimum, à cet endroit là, la fonction énergie potentielle est croissante. La dérivée de E_p par rapport à x est strictement positive, donc $- dE_p/dx$ est négative. Donc F(x) est inférieure à 0. Je rappelle que je suis à une dimension. F(x) inférieure à 0 signifie que la force est dirigée vers la gauche. J'ai écarté l'objet de sa position et il ressent une force qui le ramène vers la position x_0. Maintenant, je vais déplacer l'objet de l'autre côté. Je le place donc en x inférieur à x_0. En x inférieur à x_0, j'ai toujours F(x) qui vaut $- dE_p/dx$. Mais cette fois, dE_p/dx à cet endroit-là est négatif. La pente de la fonction $E_p(x)$ est négative. Donc $- dE_p/dx$ sera strictement positive. F(x) sera donc strictement positif. Si je place l'objet en x inférieur à x_0, F(x) est positif. C'est donc une force dirigée vers la droite qui le ramène en x_0. La même conclusion s'applique, la force ramène l'objet en x_0. Bref, que je le déplace d'un côté ou l'autre, il va ressentir une force qui le ramène en x_0. C'est donc une position d'équilibre stable.

Notes

Summary

9m 11s



C'est ce que vous avez si vous prenez, par exemple, un ressort accroché à une masse. Si vous écartez légèrement la masse de la position d'équilibre, le ressort va la ramener à la position d'équilibre. Elle va peut-être dépasser la position d'équilibre, mais elle va à nouveau être ramenée vers cette position d'équilibre. Cette position d'équilibre est donc stable. Maintenant, si nous prenons le cas opposé, un maximum de l'énergie potentielle. Que nous plaçons l'objet en x supérieur à x_0, à cet endroit, la dérivée dE_p/dx est négative, donc F(x) est strictement positive, la force est vers la droite. Elle écarte encore plus l'objet de sa position d'équilibre, donc dès que je lui donne une petite pichenette vers la droite, la force l'écarte de plus en plus. C'est une position d'équilibre instable.

Notes

Summary

11m 40s

Voilà, nous avons maintenant fini l'ensemble de ce chapitre sur les notions d'énergie. Comme toujours, afin d'en faire des outils avec lesquels vous êtes à l'aise, ce qui est important, c'est de pratiquer. Faites attention parce que même si c'est un outil très puissant, il existe aussi parfois des problèmes dans lesquels ces notions ne peuvent pas s'appliquer. Comme toujours, c'est l'entraînement qui vous permettra de reconnaître les problèmes où ça marche et ceux où ça ne marche pas.

Notes

Summary

12m 48s