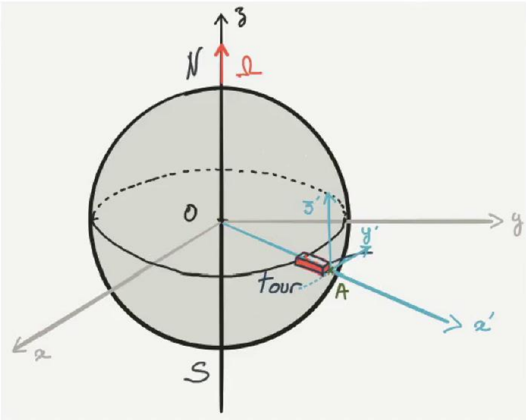
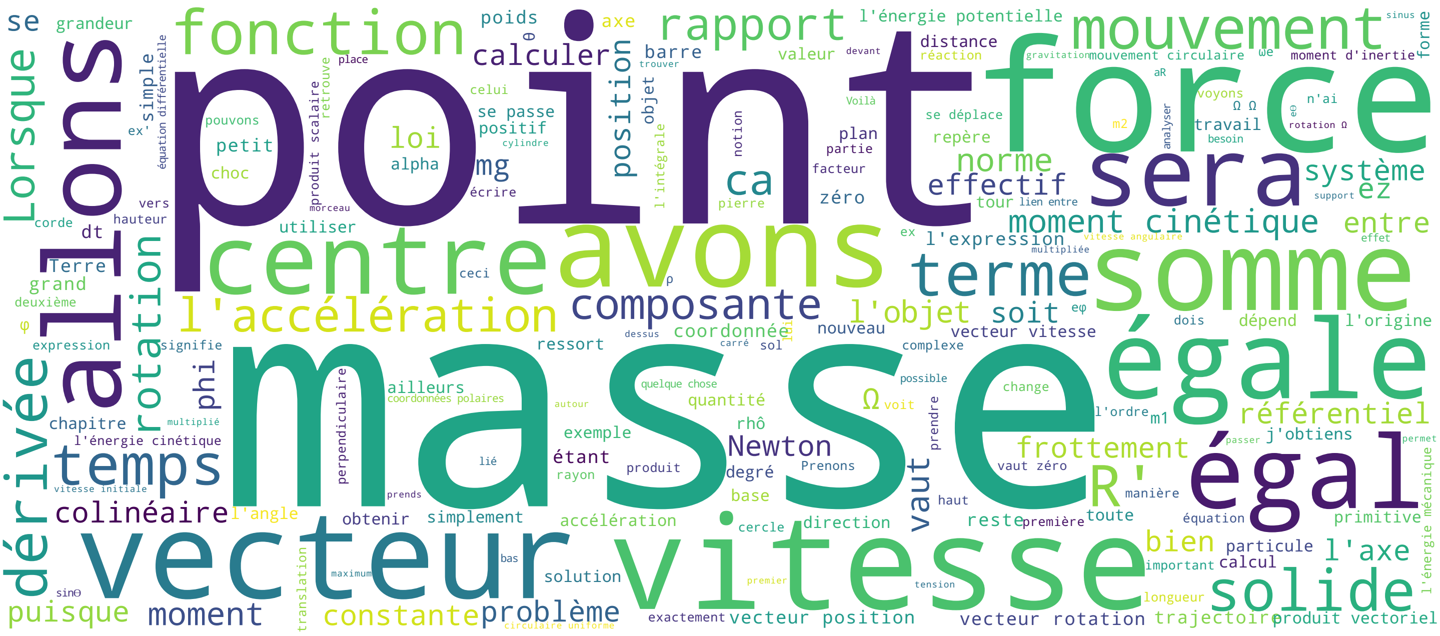
Physique générale : mécanique



Effet de la rotation de la Terre

Partie 2

Prof. Cécile Hébert



Video

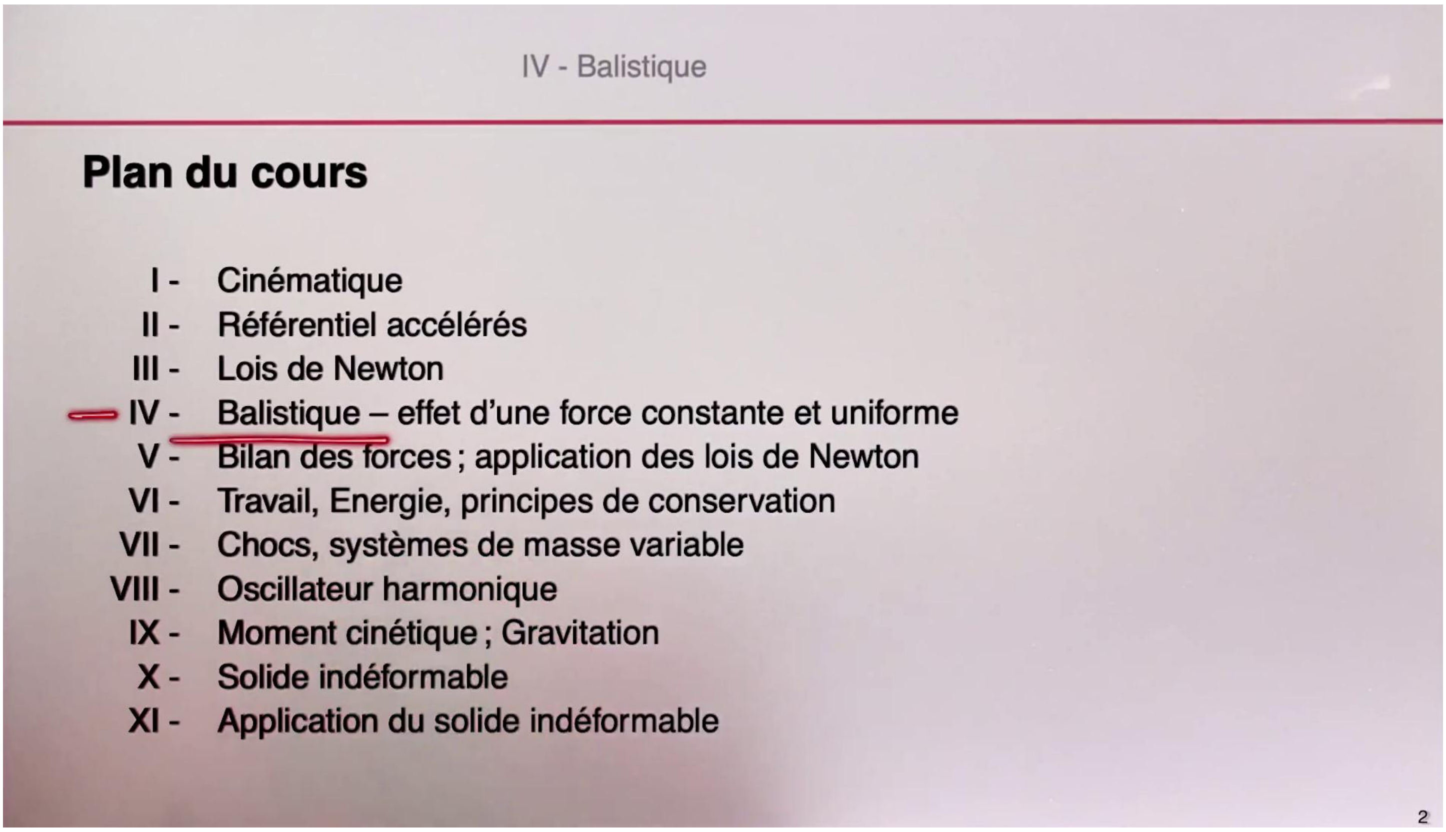
EPFL

Bonjour. Dans cette vidéo, nous continuons à nous intéresser à la chute d'un objet lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur h, mais en tenant compte, cette fois, de la rotation de la Terre. Nous allons faire le calcul complet en partant de l'accélération dans un référentiel non galiléen et nous allons pouvoir faire quelques approximations de termes négligeables. Ensuite, nous verrons ce que nous obtenons. C'est une approche extrêmement analytique qui est parfaitement rigoureuse, mais faites attention, elle n'est pas simple.

Notes

Summary

0m 05s

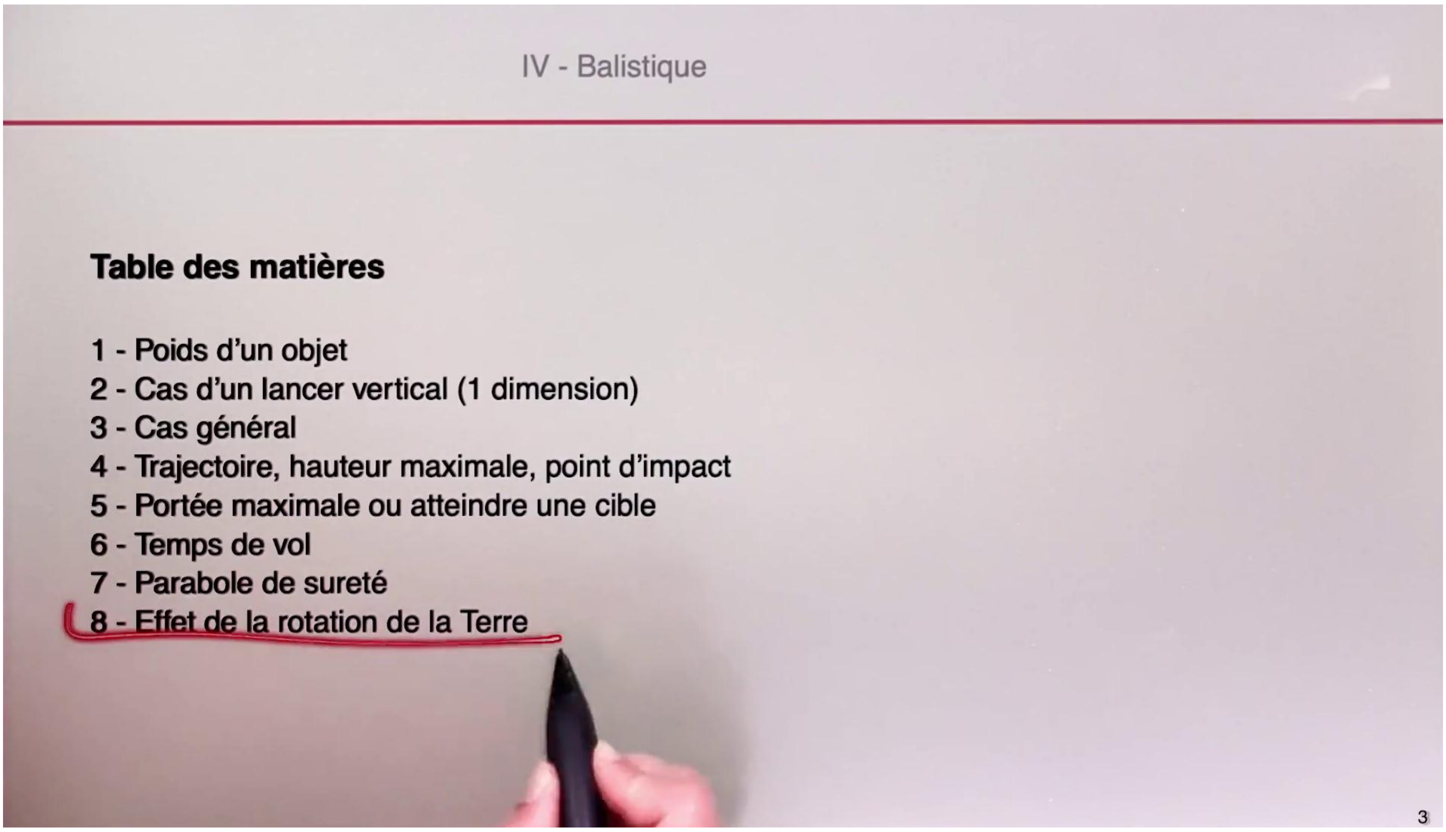


Nous sommes dans le chapitre 4 sur la balistique et nous allons voir l'effet de la rotation de la Terre.

Notes

Summary

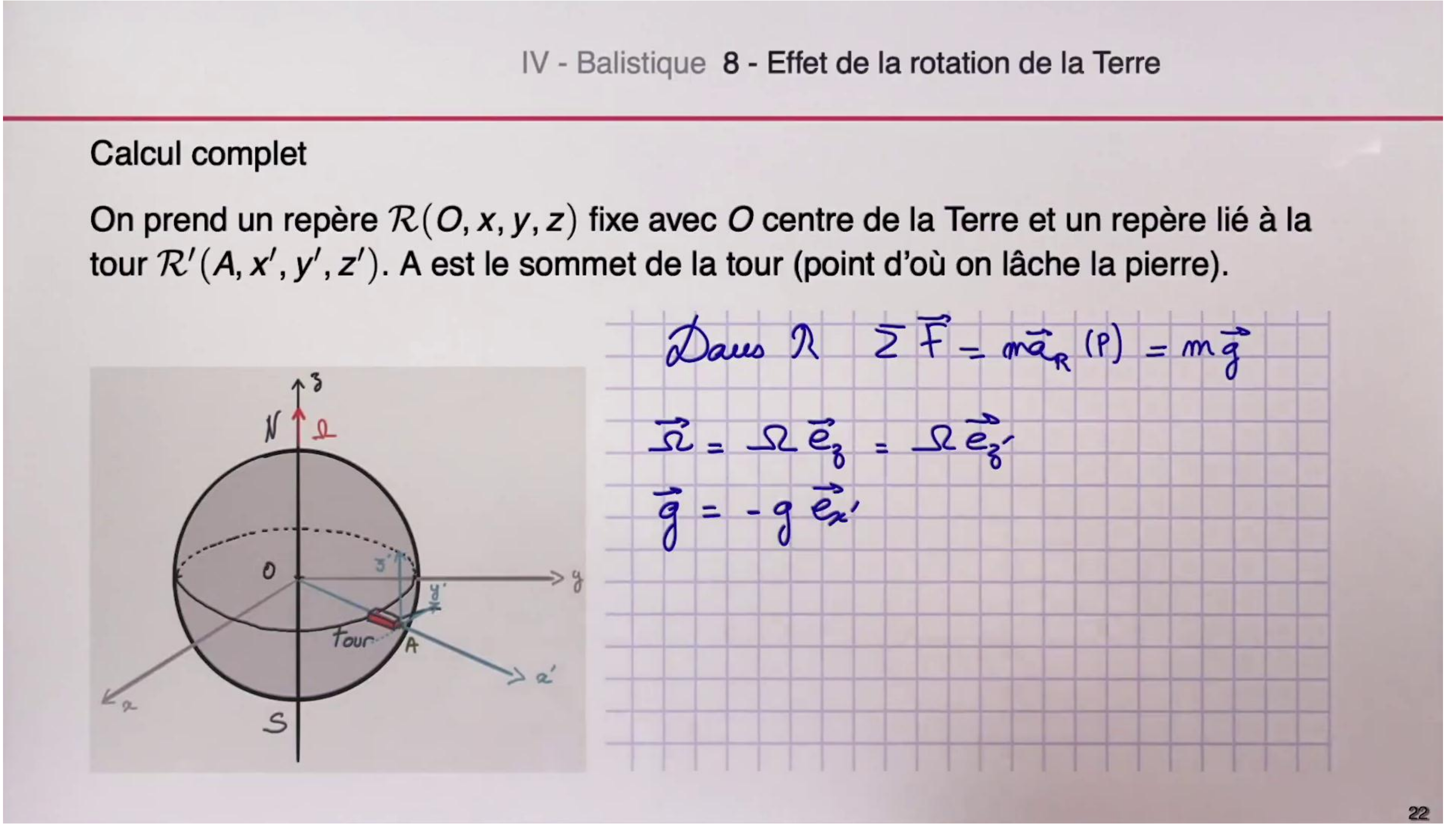
0m 43s



Notes

Summary

0m 46s

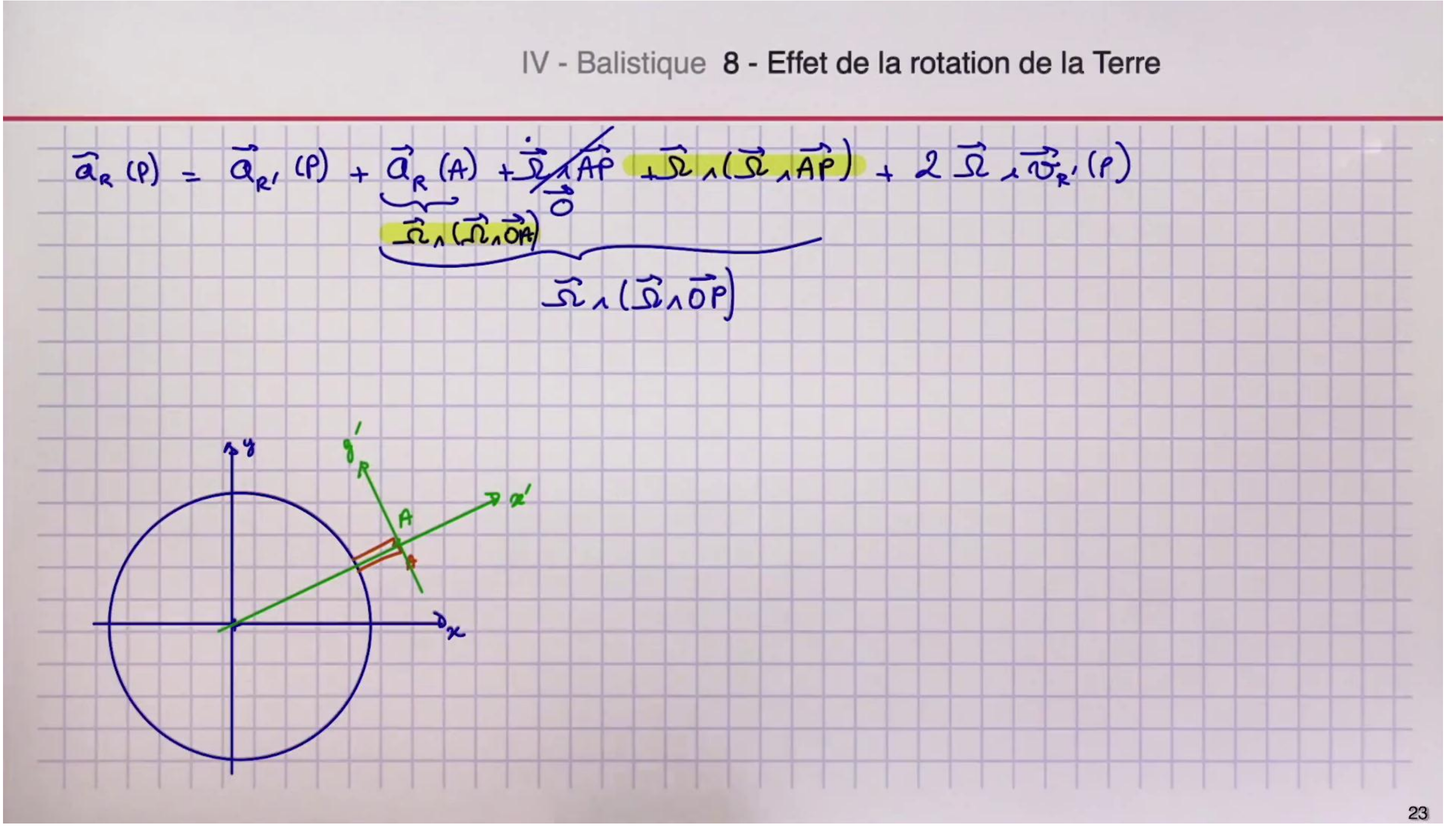


Ce que nous allons faire maintenant, c'est le calcul complet. Je reprends mon repère Oxy fixe avec O le centre de la Terre et R'(A, x', y', z'), A étant le sommet de la tour, le point dont on lâche la pierre. Nous allons avoir besoin d'exprimer les différents termes comme Ω ou les vitesses dans R' et dans R. Nous allons utiliser le lien entre l'accélération dans R et l'accélération dans R' afin de calculer le mouvement de la pierre dans R'. En effet, les lois de Newton ne pourront s'exprimer que dans R. Dans R, somme des forces extérieures égale ma, c'est l'accélération dans R du point P qui est la pierre, et comme la seule force qui s'exerce sur la pierre est la gravitation, ce sera égale à mg. Sur la hauteur de la tour, nous pourrons considérer g de norme constante. Maintenant, il faut faire bien attention à ces vecteurs. Le fait que R' ait accéléré dans R vient du vecteur rotation Ω. Avec ce que j'ai choisi, le vecteur rotation Ω s'exprime comme norme de Ω vecteur ez. Accessoirement, c'est aussi égale à norme de Ω vecteur ez', puisque mes deux axes sont colinéaires. C'est la grande simplification que j'ai en ayant la tour à l'équateur. Par ailleurs, g va toujours pointer vers le centre de la Terre, il sera donc toujours colinéaire à ex', g sera égale à -g ex'. Il pointe vers les ex' négatifs.

Notes

Summary

0m 53s

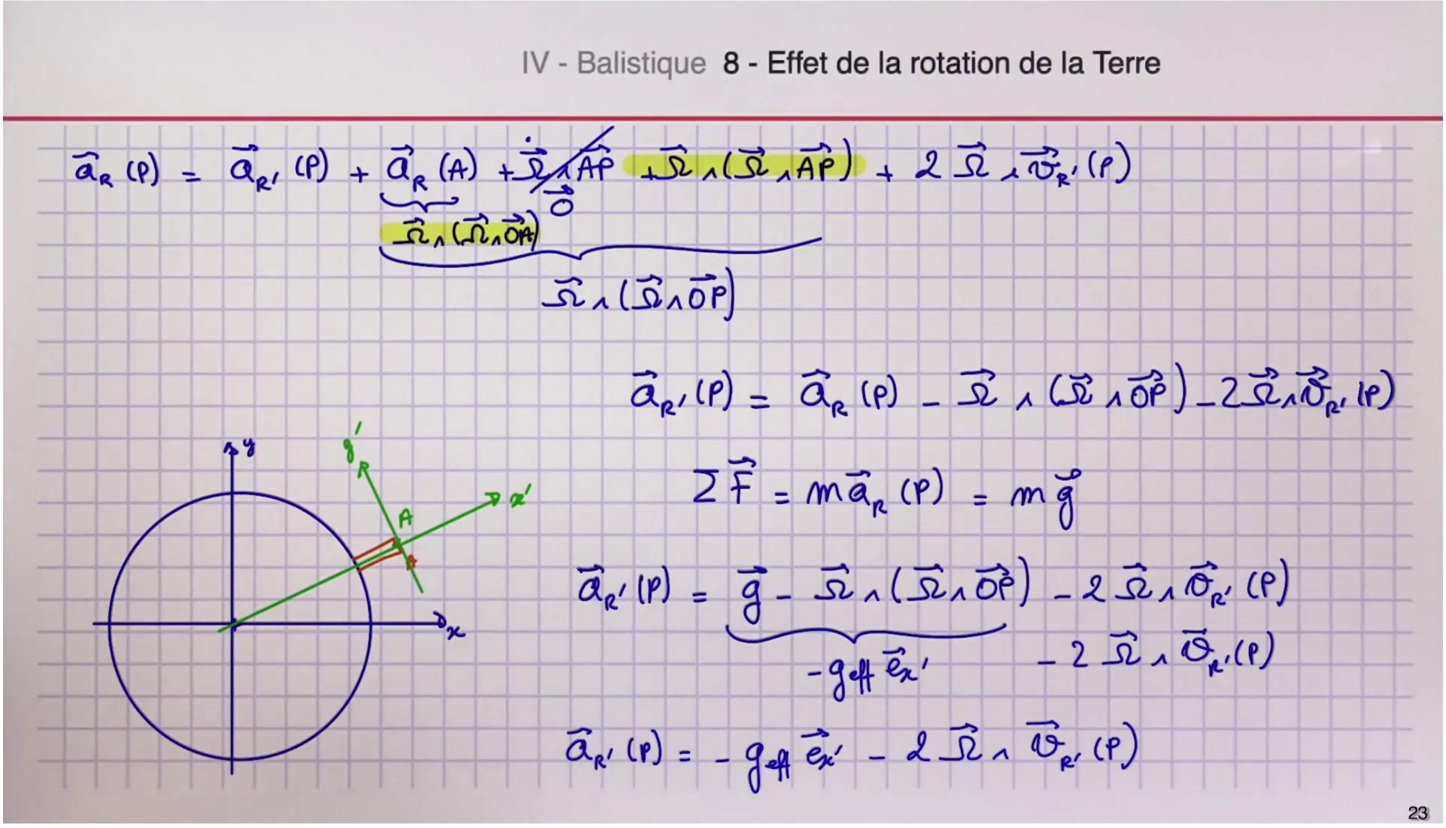


Reprenons donc la formule complète. aR(P) = aR'(P) + aR(A) + Ω point ∧ AP + Ω ∧ (Ω ∧ AP) + 2Ω ∧ vR'(P). Ce terme-là est l'accélération dans le référentiel galiléen. Je peux l'obtenir avec Newton. L'accélération dans R'(P) est le terme recherché. Tous ces termes-là sont liés au fait que je suis dans un référentiel non galiléen. Je devrais les analyser et les passer de l'autre côté. Commençons donc par ces termes-là. Le premier, le plus simple, c'est celui avec Ω point, Ω étant constant, il vaut 0. Quelle est l'accélération dans R(A) ? Refaisons le schéma de dessus. Le point A a un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel R. Le vecteur rotation est Ω. Puisqu'il a un mouvement circulaire uniforme, il a une accélération qui est purement centripète. Cette accélération centripète peut être écrite comme : Ω, le vecteur rotation, ∧ Ω ∧. Le centre du référentiel fixe jusqu'au point A, donc ∧ OA. L'accélération dans R(A) ou Ω ∧ (Ω ∧ OA). Je peux regrouper ce terme avec le terme en Ω ∧ (Ω ∧ AP). La somme des deux va me donner un Ω ∧ (Ω ∧...) OA+ AP, OP. Je vais maintenant isoler ce terme et passer le reste de l'autre côté. aR'(P) est égale à aR(P) moins Ω ∧ (Ω ∧ OP) moins 2 Ω ∧ vR'(P).

Notes

Summary

2m 41s

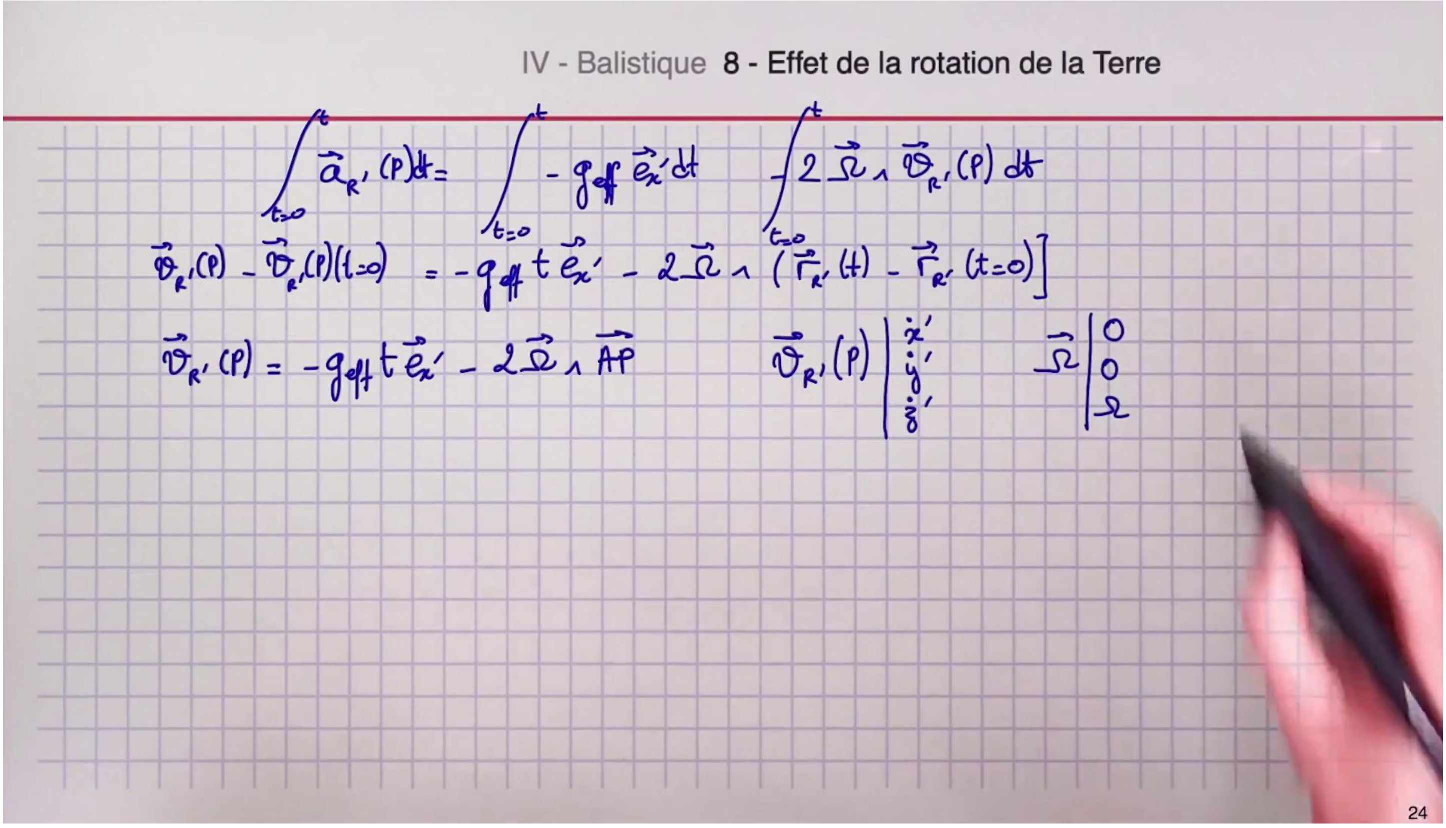


Nous avons vu somme des forces égale maR(P) est égale à le poids mg, donc aR(P) vaut g. Je retrouve donc aR'(P) égale g moins Ω ∧ (Ω ∧ OP) moins 2 Ω ∧ vR'(P). G, la partie gravitationnelle, est selon ex'. Cherchons la direction de ce terme. OP est selon ex'. Ω est selon ez'. Le produit vectoriel des deux est colinéaire à ey'. Lorsque je refais le produit vectoriel avec Ω colinéaire à ez', j'obtiens un vecteur colinéaire à ex'. Ces deux entités sont donc toutes les deux colinéaires à ex'. Ce terme-là est la correction de g lié au terme centrifuge dû à la rotation de la Terre. L'ensemble des deux représente le g effectif qui est le g que vous ressentez sur Terre qui est exclusivement colinéaire à ex'. Par ailleurs, il est effectivement dirigé vers les ex' négatifs, puisque ce deuxième terme est très faible devant le premier. J'ai donc obtenu comme équation aR'(P) égale −gfex' moins 2Ω ∧ vR'(P). C'est une équation différentielle qui lie l'accélération dans R'(P) à la vitesse dans R'(P), l'accélération étant la dérivée de la vitesse. Le reste sont des termes qui sont constants dans R'.

Notes

Summary

4m 59s



Je cherche le vecteur position, c'est la primitive du vecteur vitesse. Je vais donc faire une première intégrale. Je vais intégrer entre t = 0 et un temps donné t de chacun des termes individuellement. La primitive de l'accélération est la vitesse. Je dois prendre la vitesse entre t = 0 et t. Ici, g effectif est une constante, ex' est une constante, la primitive d'une constante est tout simplement le temps. Pris entre 0 et t, je vais avoir -gft ex' moins, Ω étant un vecteur constant, je peux le sortir de l'intégrale. Je dois prendre la primitive de la vitesse, c'est le vecteur position dans R'a(t) moins le vecteur position dans R'a(t=0). À t=0, nous lâchons l'objet sans vitesse initiale. Ce terme vaut donc 0. Depuis l'origine du repère, ce terme vaut donc 0. Ceci est le vecteur position dans R', c'est tout simplement le vecteur AP. Afin de poursuivre, nous devons maintenant exprimer les composantes de ces trois vecteurs dans R'. Les composantes de la vitesse dans R'(P) sont les dérivées des composantes du vecteur position. Dans R', c'est x', y', z', dérivées, j'ai les points. Le vecteur Ω étant colinéaire à ez', a comme composantes 0, 0, Ω. Le vecteur AP a comme composantes x', y', z'.

Notes

Summary

7m 11s

$$\int_{t=0}^{t} \vec{a}_{R'}(P)\,dt = \int_{t=0}^{t} -g_{eff}\,\vec{e}_{x'}\,dt - \int_{t=0}^{t} 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)\,dt$$

$$\vec{v}_{R'}(P) - \vec{v}_{R'}(P)(t=0) = -g_{eff}\,t\,\vec{e}_{x'} - 2\vec{\Omega} \wedge \left[\vec{r}_{R'}(t) - \vec{r}_{R'}(t=0)\right]$$

$$\vec{v}_{R'}(P) = -g_{eff}\,t\,\vec{e}_{x'} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{AP} \qquad \vec{v}_{R'}(P) \left| \begin{matrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{matrix} \right. \qquad \vec{\Omega} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{matrix} \right. \qquad \vec{AP} \left| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right.$$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{AP} \qquad \vec{\Omega} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{matrix} \right. \wedge \vec{AP} \left| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} -\Omega y' \\ +\Omega x' \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad -2\vec{\Omega} \wedge \vec{AP} \left| \begin{matrix} 2\Omega y' \\ -2\Omega x' \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$\vec{v}_{R'}(P) \left| \begin{matrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{matrix} \right. = -g_{eff}\,t\,\vec{e}_{x'} \left| \begin{matrix} -g_{eff}\,t \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. + \left(-2\vec{\Omega} \wedge \vec{AP}\right) \left| \begin{matrix} 2\Omega y' \\ -2\Omega x' \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} \dot{x}' = -g_{eff}\,t + 2\Omega y' \\ \dot{y}' = -2\Omega x' \\ \dot{z}' = 0 \end{cases}$$

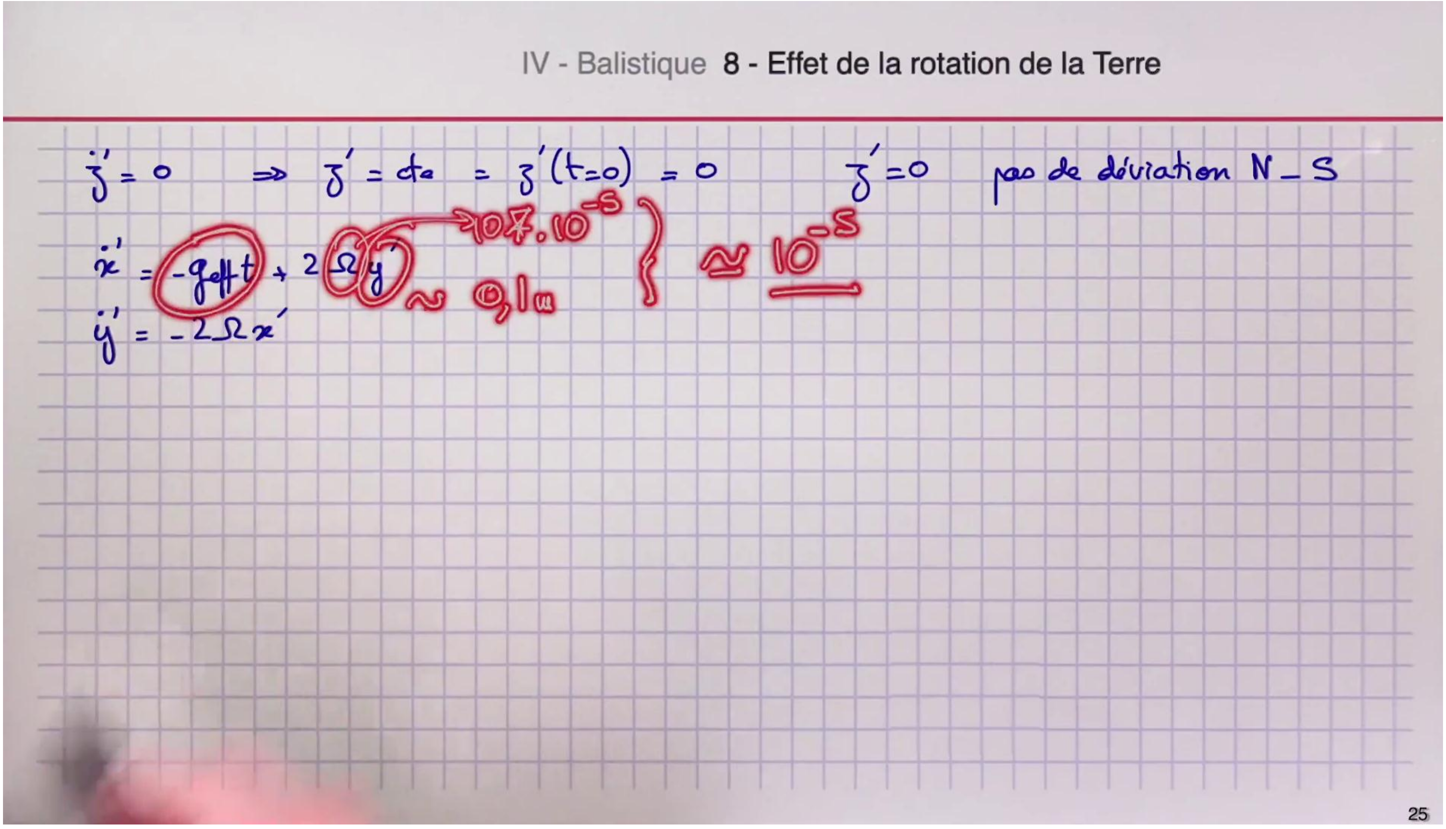
24

Calculons le produit vectoriel Ω ∧ AP. Je réécris verticalement le vecteur Ω, le vecteur AP et je fais le produit en croix. Je barre la première ligne 0 fois z' moins Ωy'. Je barre la deuxième ligne -0 fois z' plus Ωx'. Troisième ligne barrée : 0 fois y' moins 0 fois x', 0. Ceci me permet d'exprimer les composantes du vecteur -2Ω ∧ AP, que je dois multiplier par -2. J'obtiens donc 2Ωy', -2Ωx', 0. VR'(P), x' point, y' point, z'point est égale à -g effectif tex', de composantes -g effectif t, 0, 0, plus le terme -2Ω ∧ AP qui a comme composantes 2Ωy', -2Ωx' et 0. Cela va donc nous donner trois égalités ligne par ligne, soit un système de trois équations. Ce sont des équations différentielles sur les composantes x', y' et z'. La troisième est la plus simple. Les deux premières sont légèrem ent couplées. En effet, nous avons x' dérivée qui est liée à y', mais y' se trouve avec sa dérivée liée à x'. Commençons par la troisième.

Notes

Summary

9m 25s

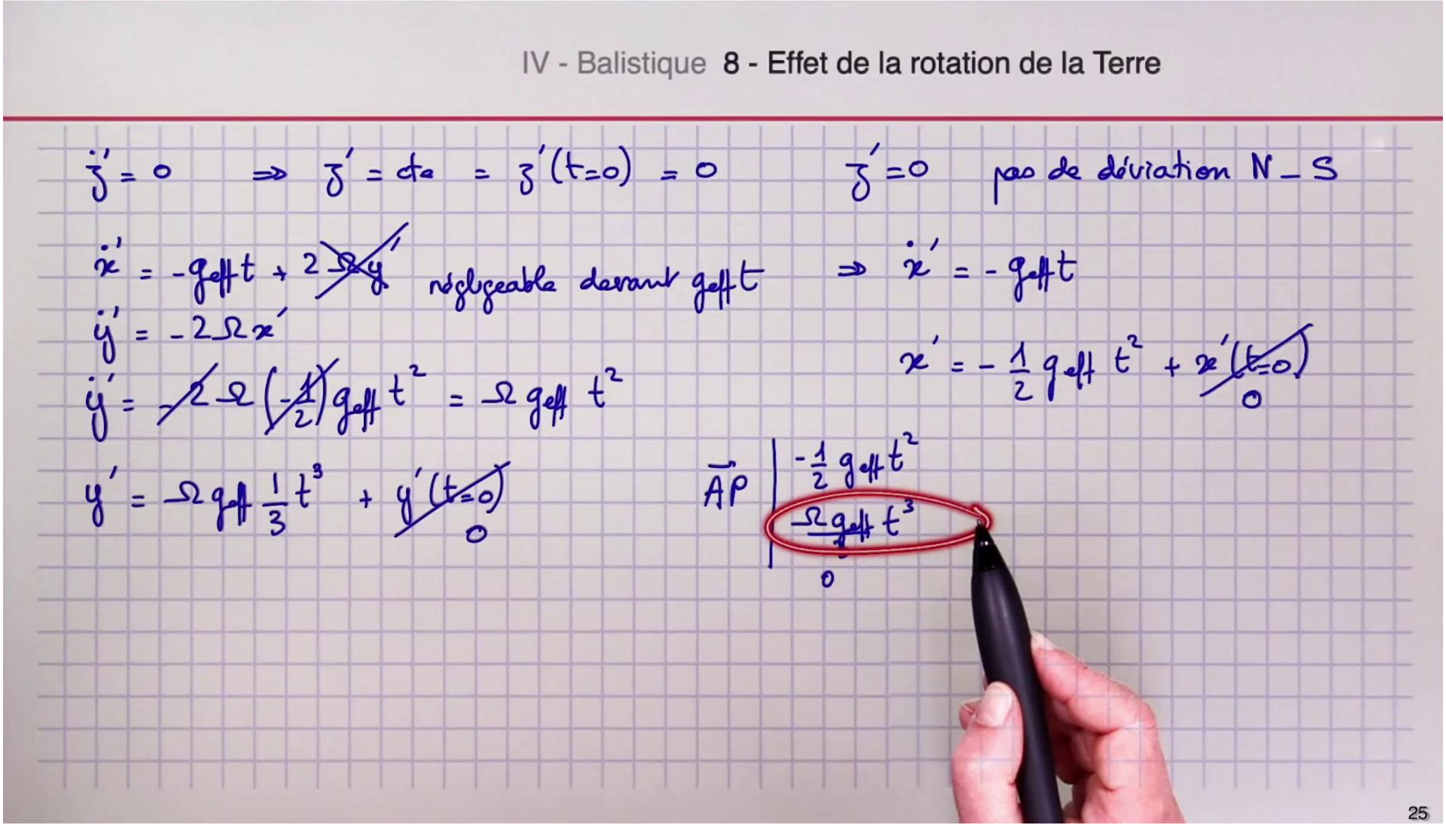


z' point = 0. Cela nous donne z' égale constante. C'est donc z'(t=0). Comme je lâche l'objet depuis la position 1 qui est en 0, 0, 0, c'est égale à 0. Donc z' égale 0. Je n'ai pas de déviation nord-sud. Maintenant, mes deux dernières équations. Ce terme-là est ennuyeux car j'ai deux morceaux. Mais regardons ici ce qui se passe. Nous avons g effectif, g effectif valant à peu près 10 m.s−2. Le temps, lorsque l'on considère la chute entière, nous allons avoir quelque chose de l'ordre de quelques secondes. Nous aurons ici un terme qui sera de l'ordre de 10 m.s−1. Ω, nous avons vu qu'il était en 7(10 puissance -5) radiant seconde moins 1. y' est la déviation, c'était de l'ordre de 0,1 mètre. Nous allons avoir quelque chose, mettons ceci égale à 10, qui sera de l'ordre de grandeur de 10 puissance -5. 10 puissance -5 contre 10, il est bien évident que ce terme est négligeable.

Notes

Summary

11m 40s

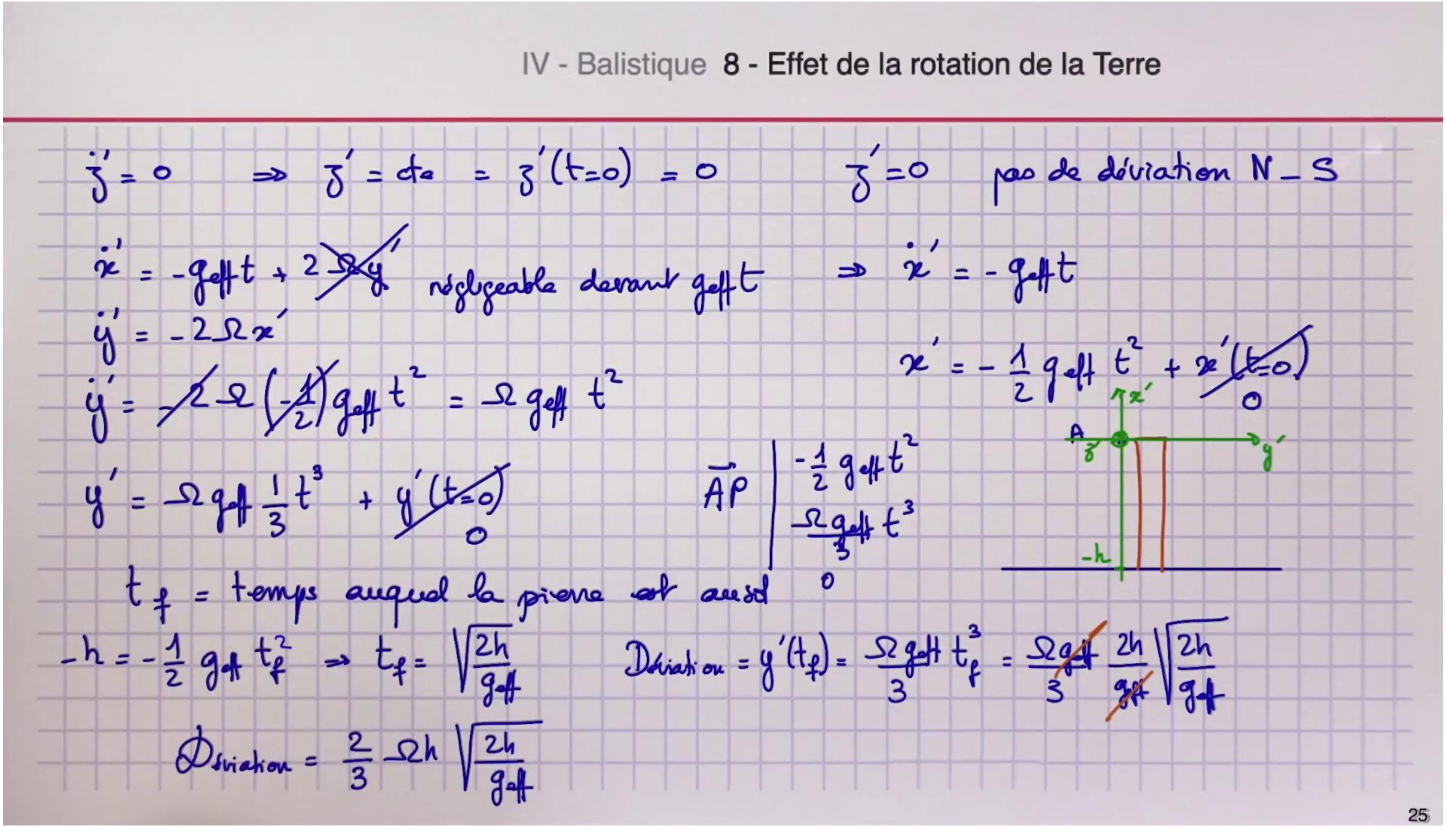


Négligeable, c'est toujours devant quelque chose, ici, devant g effectif fois t. Une fois cette approximation faite, cela simplifie la première équation qui n'est plus couplée. J'obtiens donc x' point égale -g effectif fois t que je peux intégrer. x' va être égale à -1/2 g effectif t² plus x'(t=0). À nouveau, ce terme vaut zéro puisque je lâche l'objet de l'origine de R'. J'ai donc obtenu x' en fonction du temps que je peux maintenant introduire dans la deuxième équation. Cela me donne un y point ' est égale à -2Ω fois -1/2 de g effectif t². Petite simplification. C'est donc Ω g effectif t². Lorsque je vais chercher la primitive de y' point, je vais devoir intégrer ce terme. y' est donc égale à Ω g effectif, qui est une constante. La primitive de t², c'est un tiers de t³ et à nouveau y'(t= 0). Celui-ci aussi vaut 0. J'ai donc le vecteur AP en fonction du temps avec ces trois composantes, x' - 1/2 g effectif t², y' qui vaut Ω g effectif sur 3 t³ et z' qui vaut 0. Nous cherchons la déviation. La déviation sera la valeur obtenue sur y' lorsque la chute est finie. La chute est finie quand la pierre est en bas de la tour, donc lorsque la composante sur x' est égale à -h, hauteur de la tour.

Notes

Summary

13m 04s

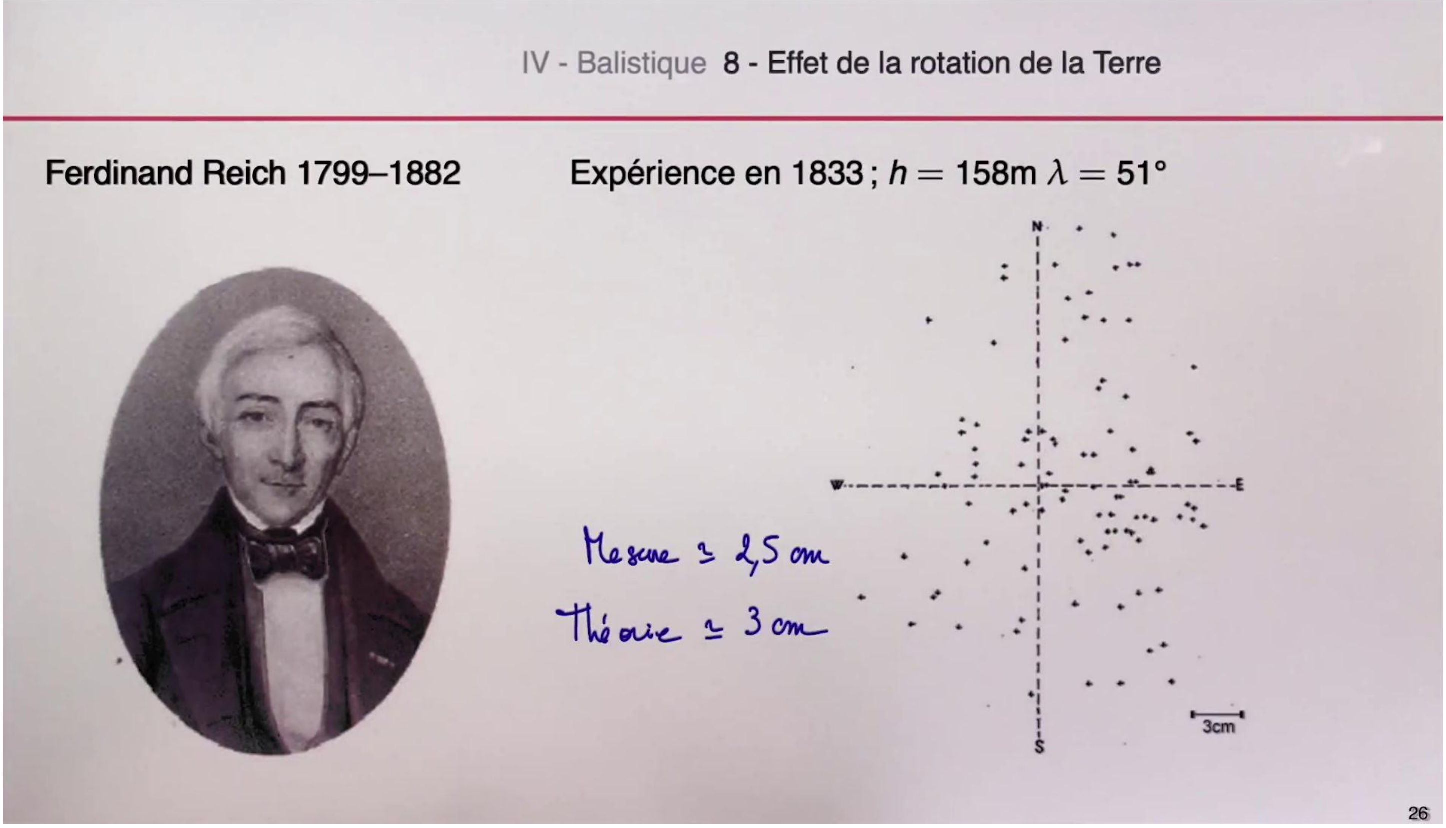


Appelons tf, le temps lorsque la pierre est arrivée au sol. -h est donc égale à -1/2 de g effectif tf². Cela me donne tf égale racine de 2h sur g effectif. La déviation est la valeur de y' pour tf. C'est (Ω g effectif sur 3) tf³. C'est donc (Ω g effectif sur 3) tf³, c'est tf², 2h sur gf, multiplié par tf, encore une fois, 2h sur gf en racine. G effectif se simplifie. Il me reste donc 2/3 de Ωh racine de 2h sur gf. C'est 2/3 de la valeur que j'avais obtenue tout à l'heure. Le calcul intuitif nous a donné le bon ordre de grandeur, mais il a raté un facteur 2/3. Le message ici, c'est qu'il faut se méfier parfois de ces calculs intuitifs. Lorsque l'on fait le calcul complet avec des approximations, on sait très exactement ce qu'on a fait.

Notes

Summary

15m 30s



Maintenant, je vous ai dit que c'était mesurable. Non seulement c'était mesurable, mais ça a été mesuré par Ferdinand Reich en 1833. Il n'a pas fait l'expérience depuis une tour, mais il l'a faite dans un puits pour éviter les perturbations du haut vent. La hauteur du puits n'était pas de 300 mètres, mais de 158 mètres, la moitié à peu près. Il l'a fait là où il était, donc à une latitude λ par rapport au nord de 51 degrés. Cela introduit un terme en cosinus λ qui diminue l'effet. Nous avons donc un facteur 2 lié à la hauteur de la tour, un facteur presque 2 lié au lambda et le résultat, c'est qu'avec sa série de mesures fort dispersées, mais en prenant la moyenne de tous ces points, il a été capable de trouver une déviation de l'ordre de 2,5 centimètres alors que la valeur théorique aurait été de 3 centimètres.

Notes

Summary

17m 03s

Nous avons vu ce qu'il se passe lorsqu'on prend en compte la rotation de la Terre pour la chute d'un objet. On a pris le cas le plus simple, on s'est placé à l'équateur. Ce qui est important ici, c'est la démarche. Nous avons vraiment pris le cas le plus général et nous avons pu choisir les termes négligeables en fonction des données du problème. Donc, nous savons pourquoi nous les avons négligés et nous avions une raison de le faire. Cette approche est beaucoup plus rigoureuse que celle intuitive de la vidéo précédente, nous voyons que le résultat obtenu n'est pas non plus exactement le même. L'ordre de grandeur précédemment était correct, la direction était correcte, mais finalement, le résultat n'était pas le bon. Cette approche analytique complète et rigoureuse est la plus sûre, mais évidemment, elle demande une rigueur mathématique.

Notes

Summary

18m 16s