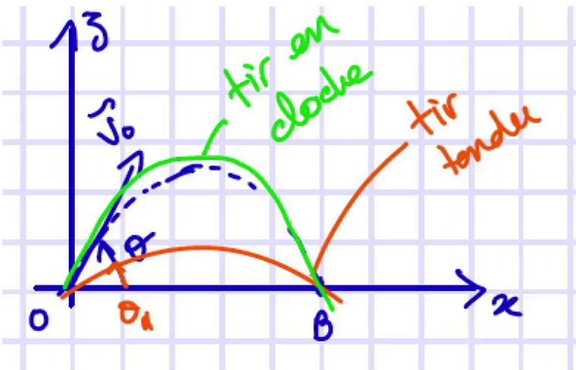
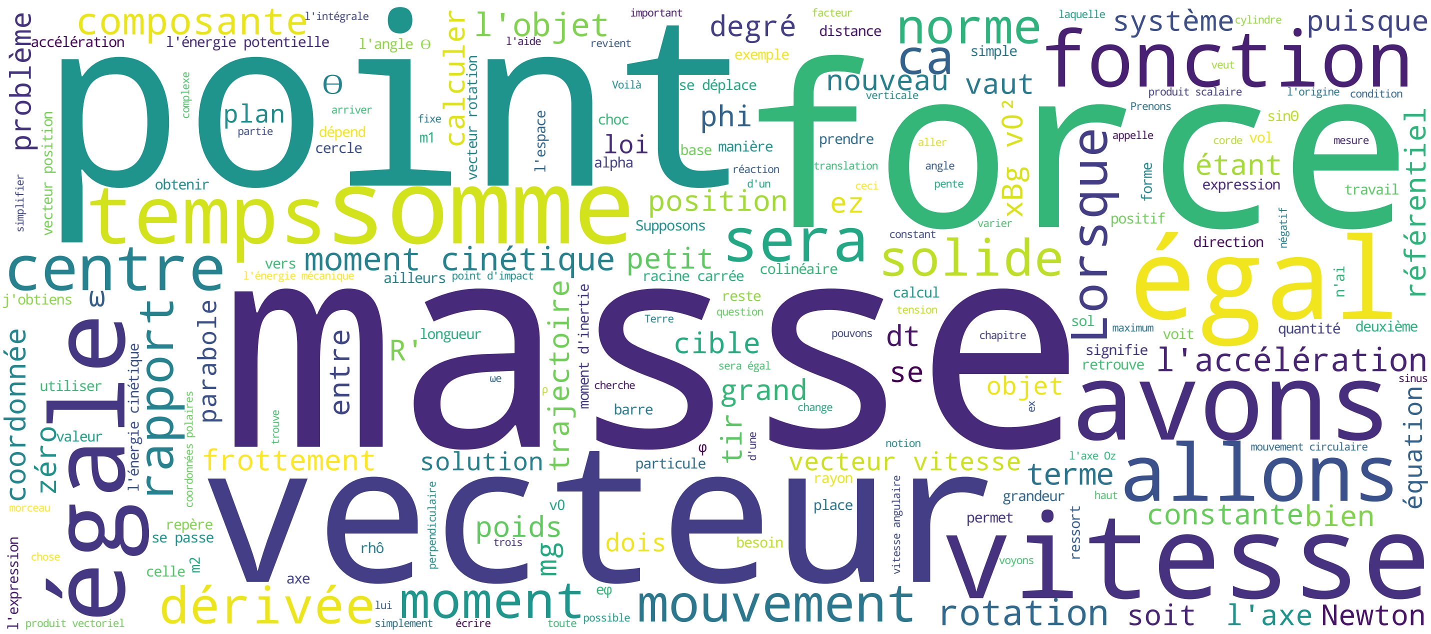
Physique générale : mécanique

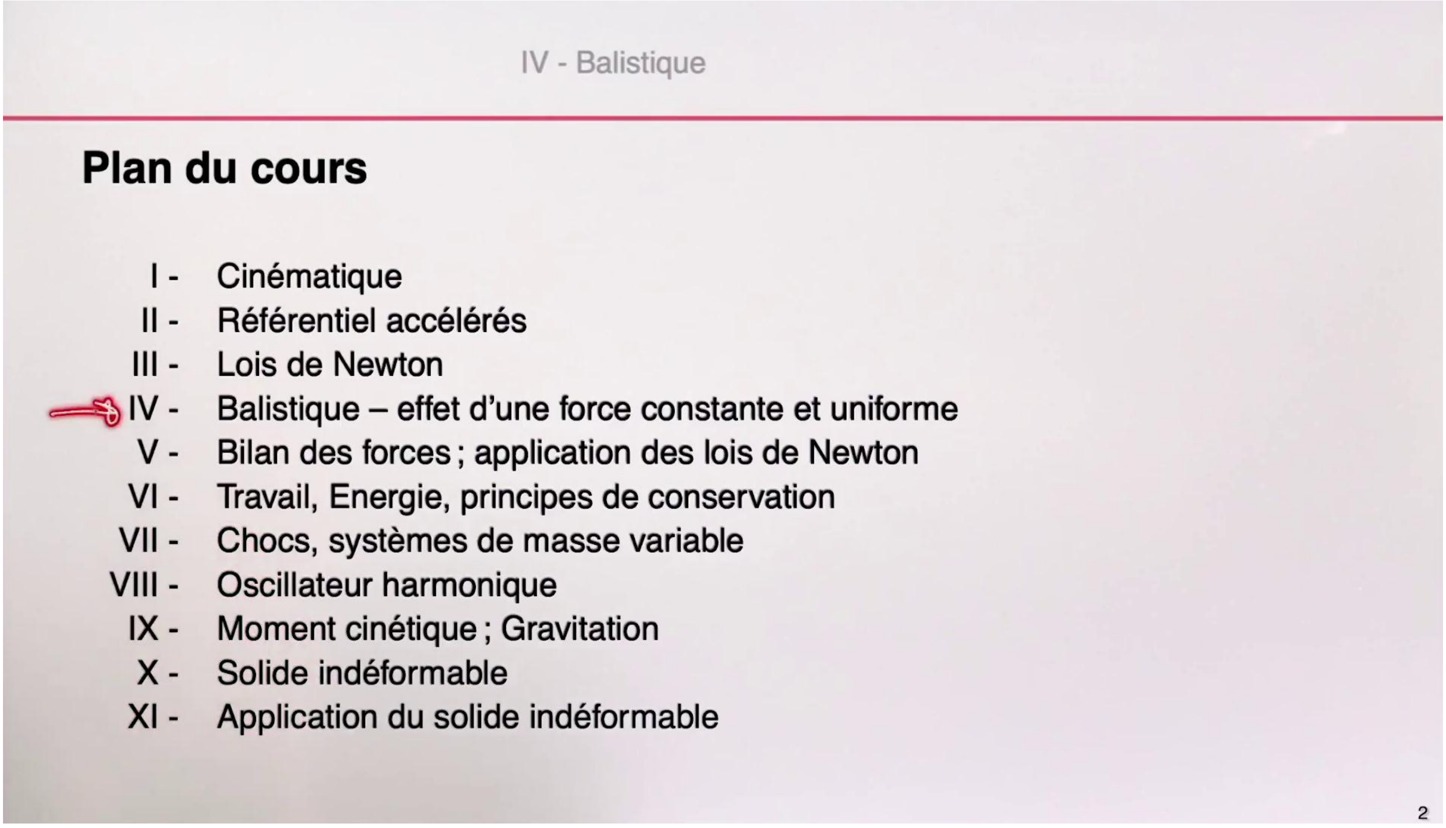


Point d'impact
Temps de vol

Prof. Cécile Hébert



Video

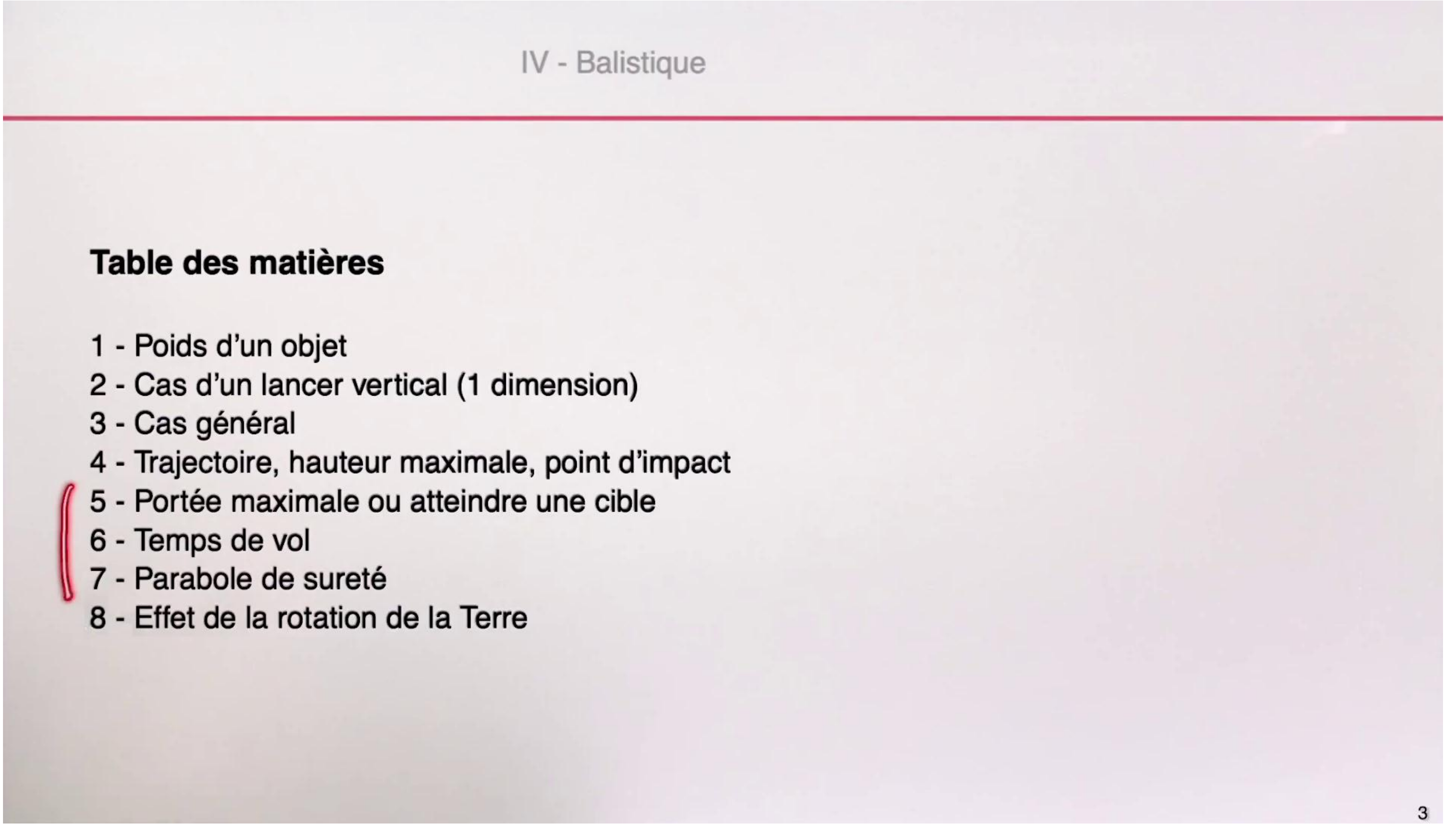


Bonjour. Dans cette vidéo, nous allons voir comment utiliser les informations obtenues précédemment de, d'une part, l'équation horaire et d'autre part, la trajectoire suivie par un objet soumis uniquement à son poids pour pouvoir prédire certains comportements. En particulier, on se demandera comment faire pour atteindre un point particulier au sol.

Notes

Summary

0m 05s

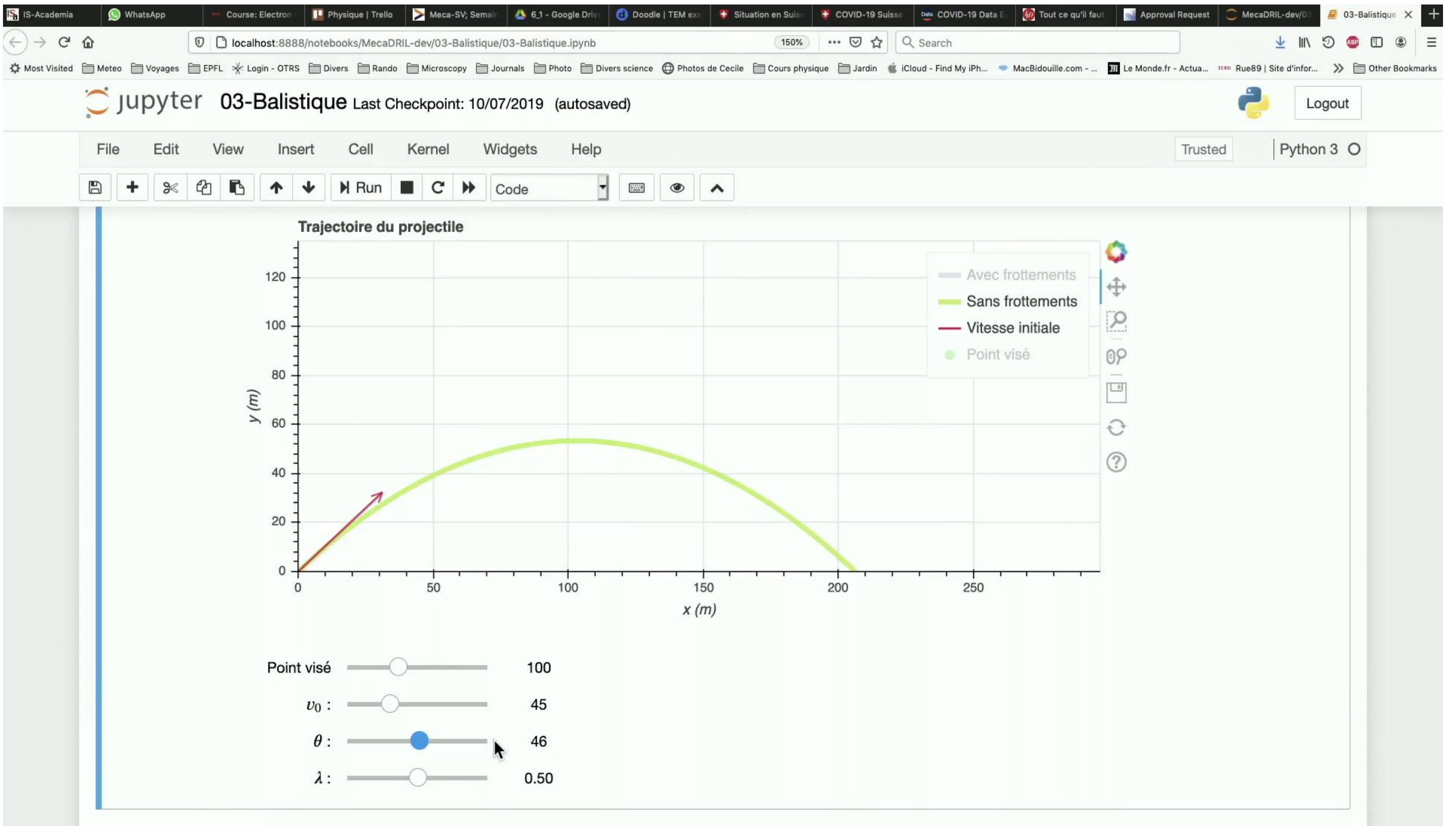


Nous sommes donc dans le chapitre IV, Balistique, et nous allons voir les parties 5, 6, 7, portée maximale, temps de vol et parabole de sûreté.

Notes

Summary

0m 28s

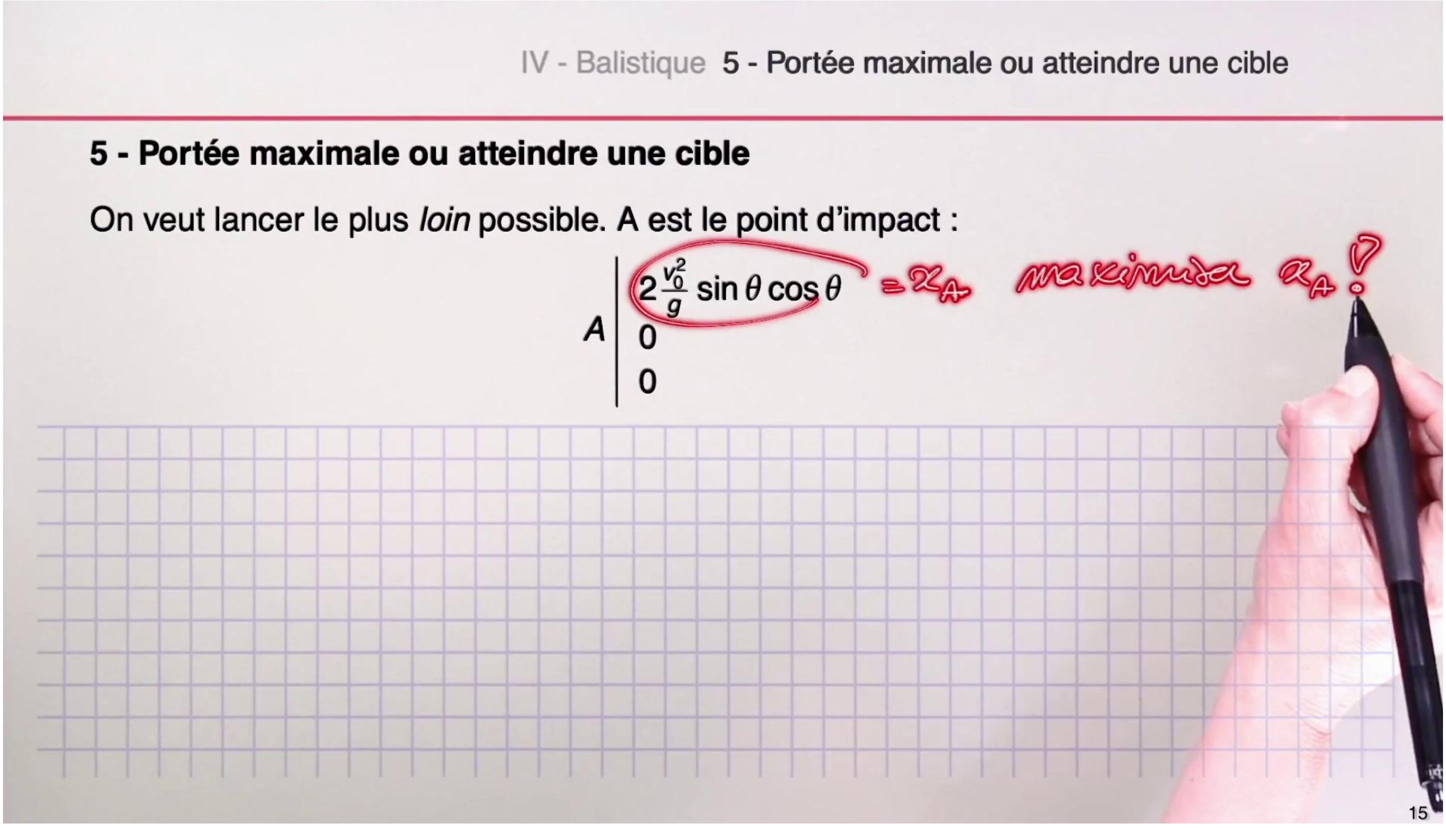


Nous avons vu qu'on appelle la portée, la distance entre le point de départ et le point d'impact. Maintenant, nous allons supposer que la vitesse de lancement est fixe, mais que je peux faire varier l'angle du lancement. La question est : « Quel angle est-ce que je dois choisir afin d'avoir une portée maximale, donc de lancer le plus loin possible ?» On voit que si je lance trop plat, je n'arrive pas très loin. Au fur et à mesure que j'augmente l'angle, la portée augmente, puis elle recommence à diminuer. Il y a eu donc une valeur maximale et on joue un petit peu, on a l'impression qu'elle se situe autour de 45 degrés.

Notes

Summary

0m 38s

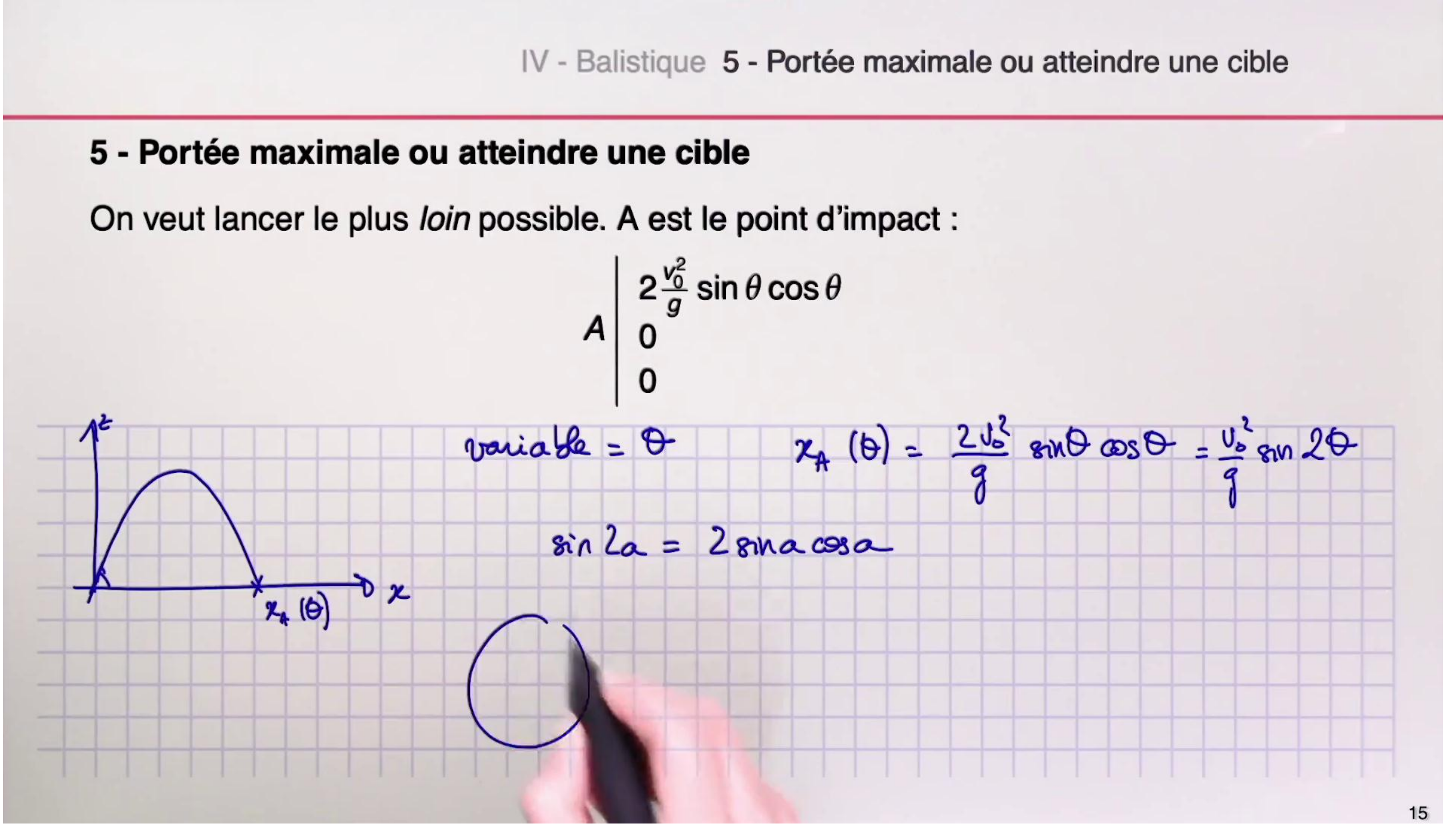


On veut donc lancer le plus loin possible. A est le point d'impact. Il a les coordonnées suivantes que nous avions trouvées précédemment avec la coordonnée xA. Le but du jeu va donc être de maximiser xA.

Notes

Summary

1m 19s

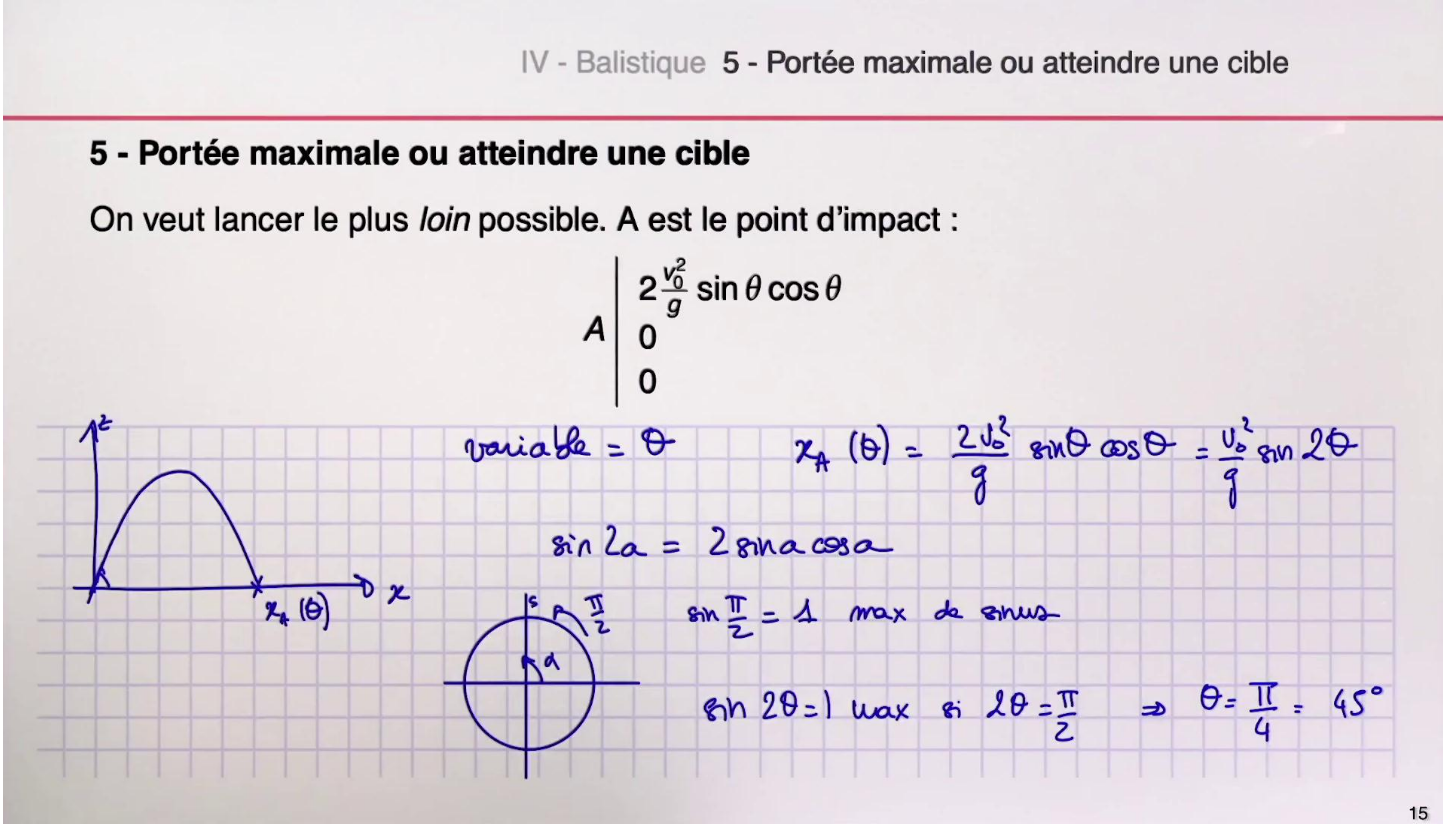


Le paramètre avec lequel nous pouvons jouer, qui va être notre variable, est maintenant l'angle Θ. Cela revient à dire que lorsque je fais mon tir qui se passe dans le plan (x, z), je peux faire varier l'angle Θ avec lequel je vais faire partir mon objet. J'observe donc en fonction de Θ, une certaine valeur de xA, qui vaut 2v0²/g, qui est constant dans mon problème, fois sinθ, cosθ. J'ai donc deux options maintenant. Je peux par exemple considérer que xA est une fonction de Θ, calculer la dérivée de xA en fonction de Θ et chercher les endroits où la dérivée vaut 0, ce qui me donnera un extremum de la fonction. Cette fonction n'est pas très sympathique avec ce produit sinΘ, cosΘ. Je peux aussi utiliser les identités trigonométriques et en particulier l'identité sin2a qui est égale à 2sinacosa. En remplaçant a par Θ, je remarque que j'ai ici 2sinΘcosΘ, ce terme-là sera donc égal à sin2Θ. Je peux donc réécrire mon xA comme étant v0²/g sin2Θ. J'ai maintenant une fonction qui est beaucoup plus facile à étudier. Je n'ai même pas besoin de calculer sa dérivée car nous connaissons bien la fonction sinus. Si je regarde l'angle α dans le cercle trigonométrique, sinα sera égal à 1 et maximum pour α valant π/2.

Notes

Summary

1m 37s

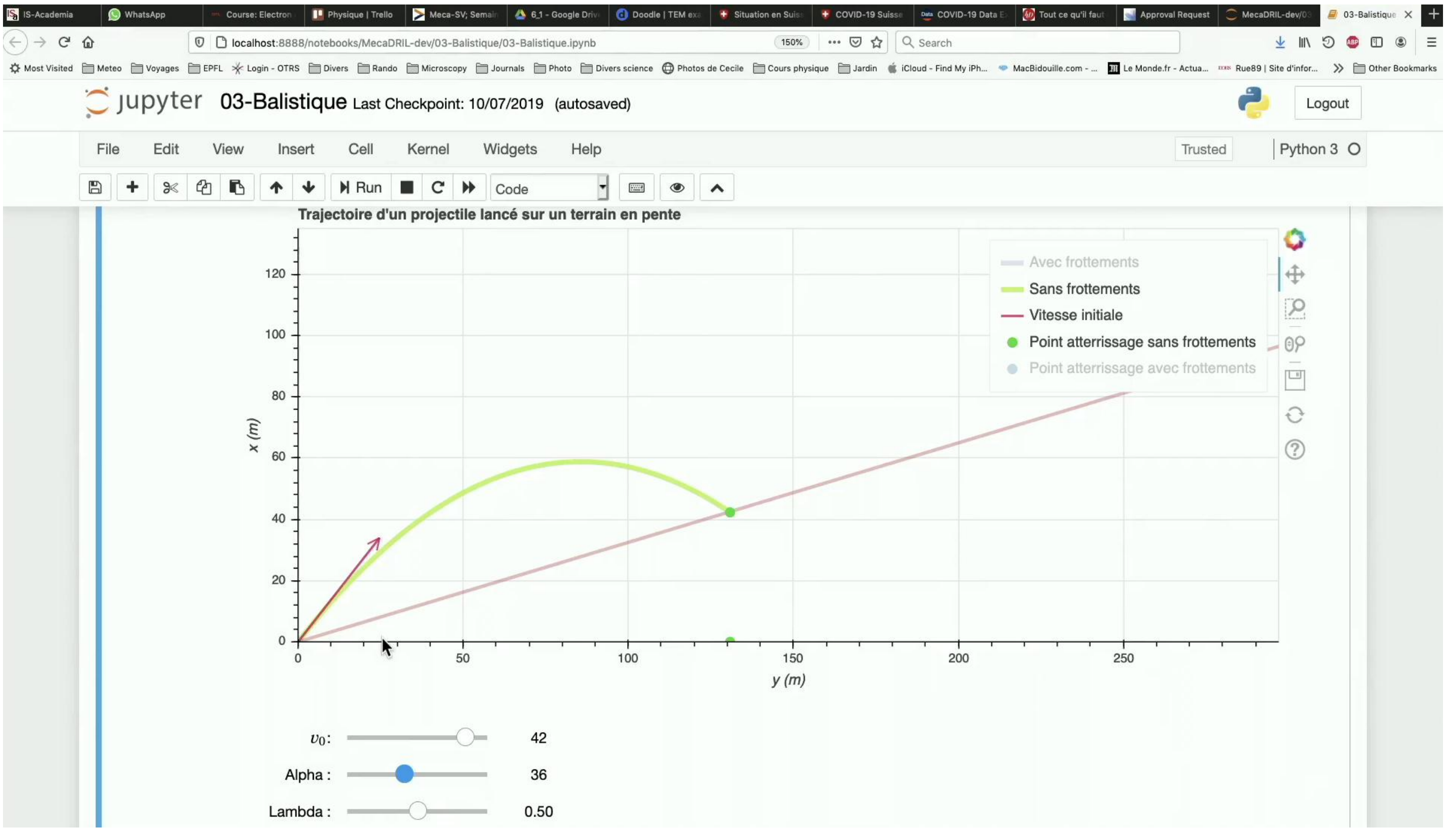


Mon xA sera donc maximum quand sin2Θ sera maximum, soit quand sin2Θ sera égal à 1, ce qui revient à dire que 2Θ devra être égal à π/2. Cela revient à dire que Θ vaut π/4. Or, π/4, c'est bien 45 degrés. Nous trouvons donc effectivement dans cette configuration la portée maximum pour un angle Θ de 45 degrés.

Notes

Summary

3m 35s

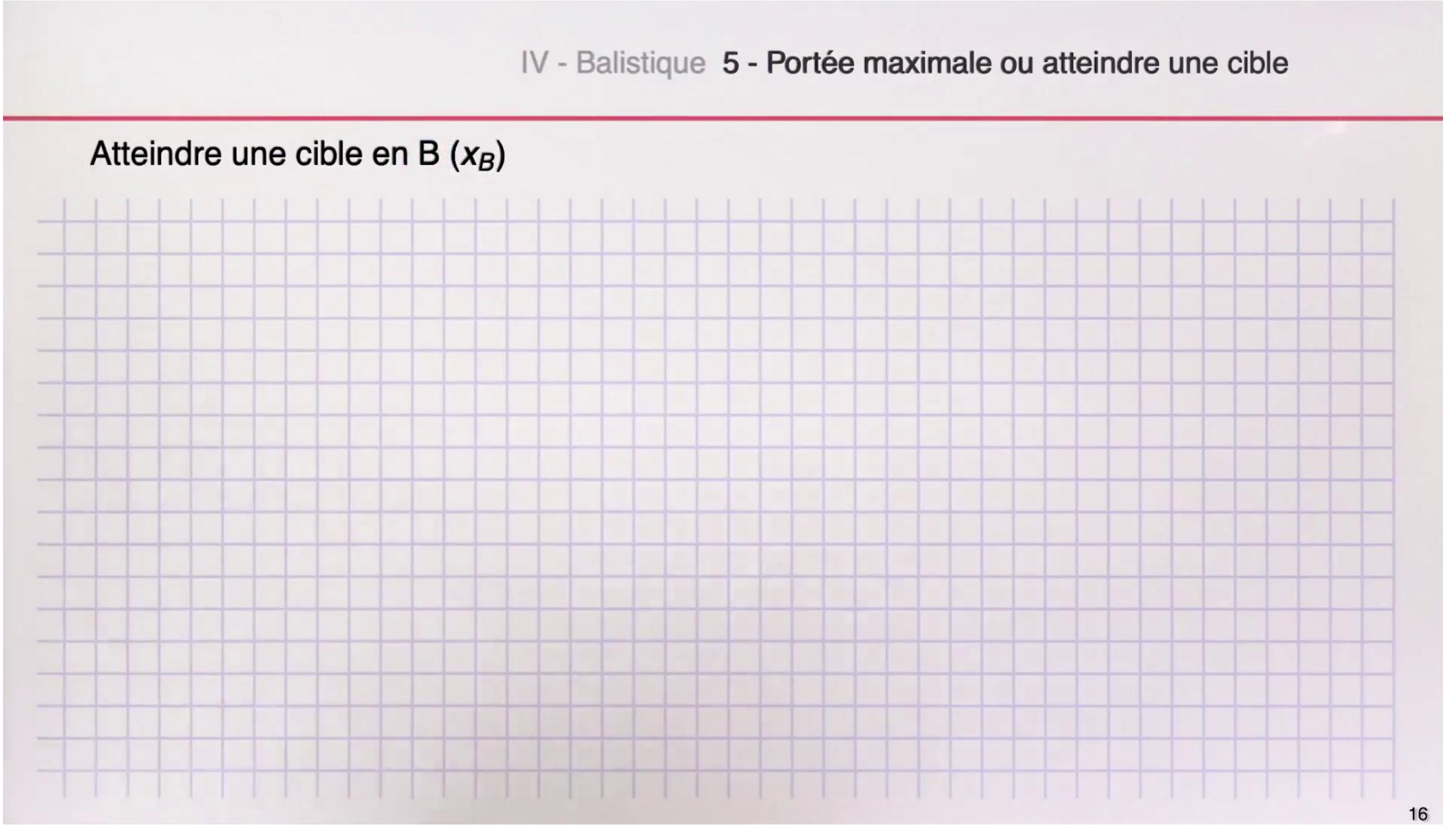


Faites attention parce que cet angle de 45 degrés n'est valable que pour un tir sur une surface horizontale. Imaginons que nous voulions tirer sur une surface en pente et aller le plus loin possible sur cette surface en pente. À ce moment-là, la parabole est coupée plutôt sur la verticale à cause de la pente de la surface d'atterrissage. Dans ce cas-là, si je fais varier l'angle entre la pente et le tir, je m'aperçois que l'angle qui me donnera une portée maximale n'est pas égal à 45 degrés. Et si vous regardez bien, il ne fait pas non plus 45 degrés avec l'horizontale.

Notes

Summary

4m 12s

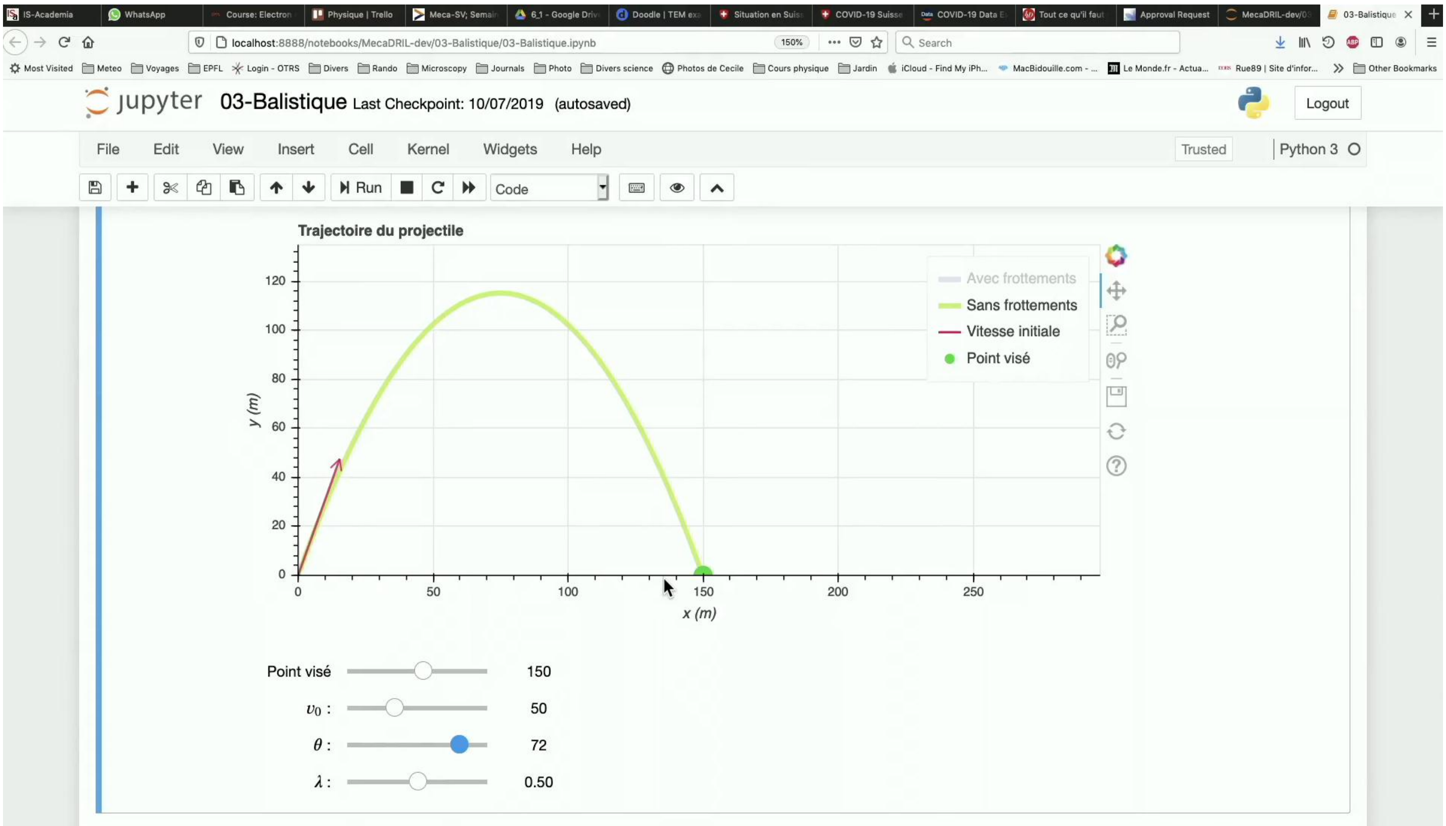


Parfois, on ne cherche pas à aller le plus loin possible, mais à atteindre une cible en un point B de coordonnée xB. La question, c'est est-ce qu'on peut y arriver et quel est l'angle qu'il faut choisir pour cela ?

Notes

Summary

4m 53s

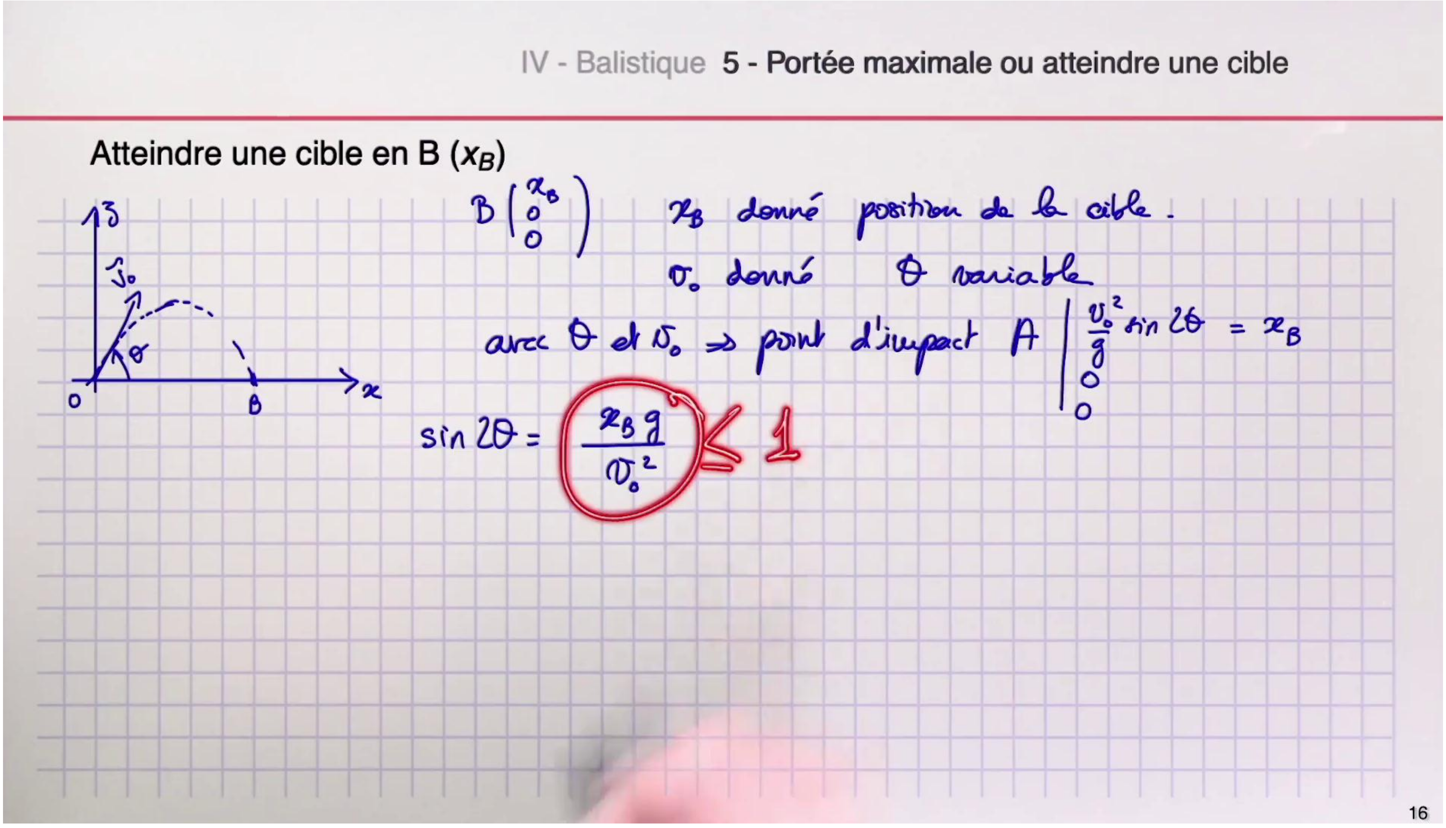


Nous supposons à nouveau que la norme de la vitesse de lancée est fixe. Je ne peux pas la faire varier. Le seul paramètre que je peux varier est l'angle de lancée Θ. Je place maintenant une cible à un endroit choisi sur l'horizontale. Je vais la mettre assez loin. Je vais essayer de faire varier Θ pour atteindre la cible avec mon lancée. On voit ici que la cible est trop loin, je n'arrive pas à l'atteindre. J'ai une distance maximale entre l'origine et la cible pour pouvoir l'atteindre. Si la cible est pile à cette distance-là, je suis obligée d'utiliser un angle de tir de 45 degrés pour l'atteindre. Maintenant, si je rapproche franchement ma cible, je vais pouvoir l'atteindre, par exemple, en augmentant ll'angle de tir, avec un angle plus grand que 45 degrés. Mais plutôt que d'augmenter l'angle de tir, j'aurais aussi pu le diminuer et également atteindre la cible, mais cette fois avec un tir plus plat. Nous avons deux valeurs possibles pour Θ qui nous permettent d'atteindre la cible. Celle avec une parabole toute plate s'appelle le tir tendu et celle avec une parabole qui monte beaucoup plus haut s'appelle le tir en cloche. Le but va maintenant être de fixer xB et de regarder dans quelle mesure je peux trouver Θ qui me permettent d'atteindre XB et quels sont la où les valeurs de Θ obtenues.

Notes

Summary

5m 07s

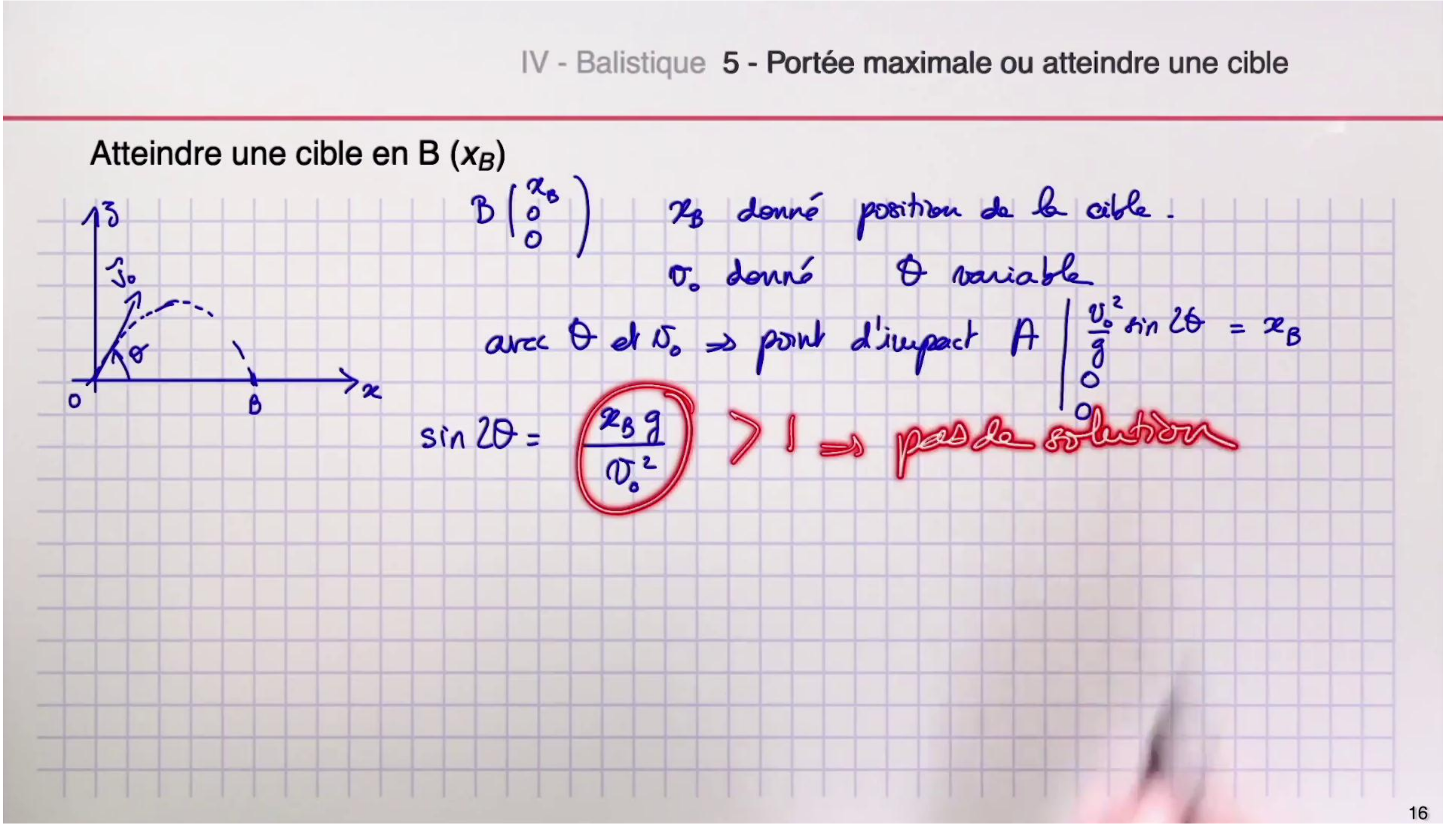


J'ai donc la situation suivante. À nouveau mon plan (o, x, z). L'origine o, d'où je vais partir avec le tir, et je place le point B. B a comme coordonnées (xB, 0, 0) xB est donnée. C'est la position de la cible. Je suppose la norme de v0 donnée et je vais faire varier Ɵ dans l'espoir d'atteindre xB. Lorsque je connais Ɵ et v0, je connais les coordonnées du point d'impact. XA valait v0²/g sinƟ 0, 0. Je souhaite que xA soit égal à xB. C'est à cette condition que l'objet arrive dans la cible. Je dois donc résoudre cette équation avec comme inconnu Ɵ et comme grandeur connue xB, v0² et g. Cela me donne donc sin2Ɵ est égale à xBg/v0². Cette équation n'a de solution que si la grandeur xBg/v0² est plus petit ou égal que 1.

Notes

Summary

6m 45s

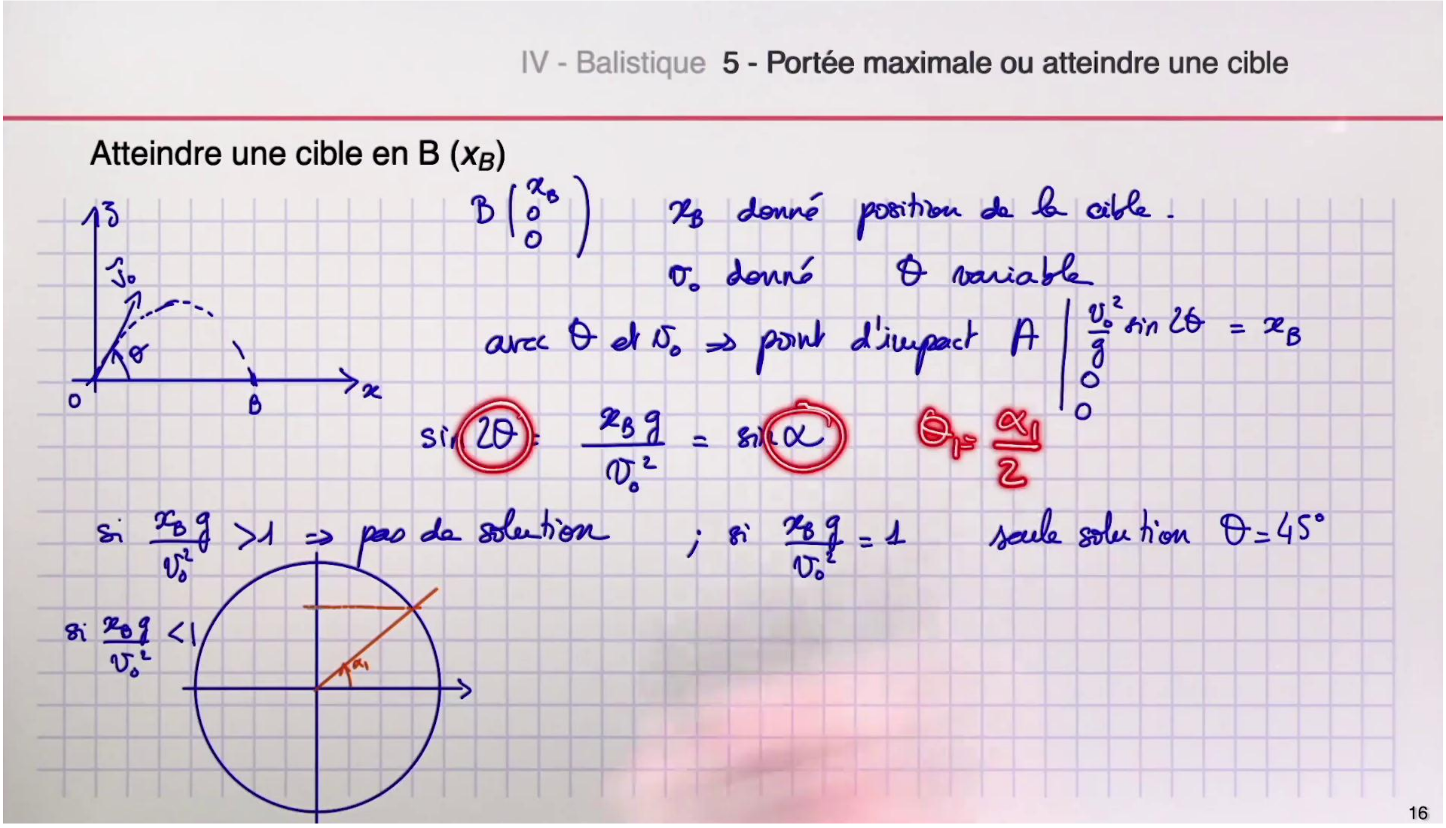


Sinon, je n'ai pas de solution. Donc, si xBg/v0² est plus grand que 1, il n'y a pas de solution.

Notes

Summary

8m 16s

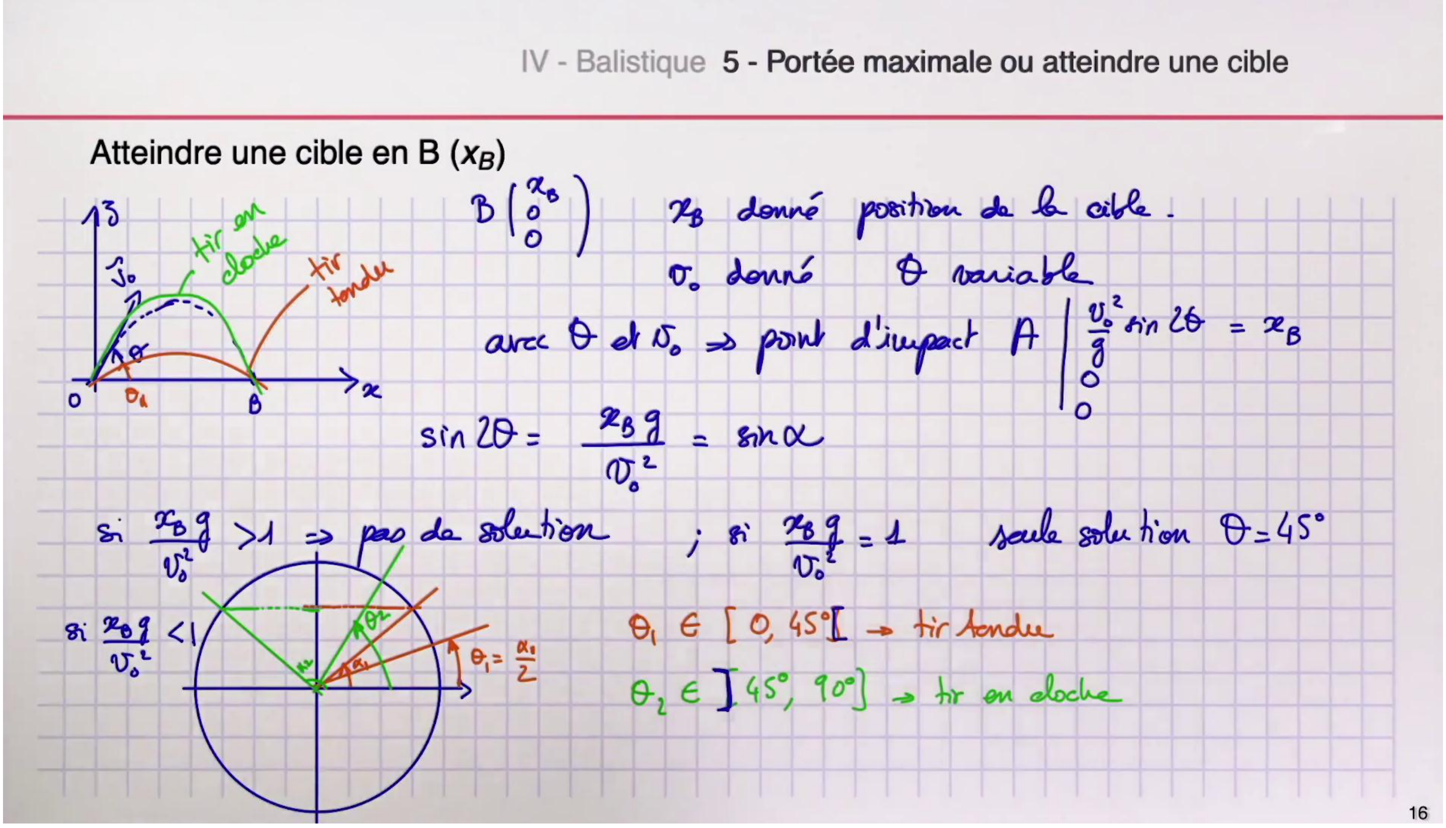


C'est ce qui m'arriv lorsque xB est trop grand, cela veut dire que j'ai placé ma cible trop loin, ou bien que v0² est trop petit, cela veut dire que la norme de ma vitesse de lancée n'est pas assez grande, ou bien que g est trop grand, ce qui revient à dire que je suis sur une planète avec l'accélération de la pesanteur trop grande, ce qui va aussi raccourcir la taille de la parabole. Si xBg/v0² est égal à 1, à ce moment-là, j'ai sin2Θ qui est égal à 1, ce qui n'a qu'une solution, Θ égal 45°. Maintenant, il nous reste le cas si xBg/v0² est plus petit que 1. Je vais appeler α l'angle 2Θ. Je dois donc résoudre sinα=xBg/v0² qui est plus petit que 1. Pour y arriver, je vais m'aider d'un cercle trigonométrique. Plaçons sur l'axe des sinus la valeur xBg/v0². Comme elle est plus petite que 1, elle est entre le cercle et 0. Supposons qu'elle se trouve là. J'ai donc xBg/v0². Je cherche un angle α tel que sinα soit égal à xBg/v0². À l'aide du cercle, je trouve deux valeurs possibles pour l'angle α, un angle $\alpha 1$ et un angle $\alpha 2$. Commençons par l'angle $\alpha 1$. Comme 2Θ vaut $\alpha 1$, mon $\alpha 1$ correspondra à un angle Θ qui sera Θ1 égal $\alpha 1/2$. Je dois donc diviser l'angle $\alpha 1$ par 2 pour obtenir l'angle Θ.

Notes

Summary

8m 27s

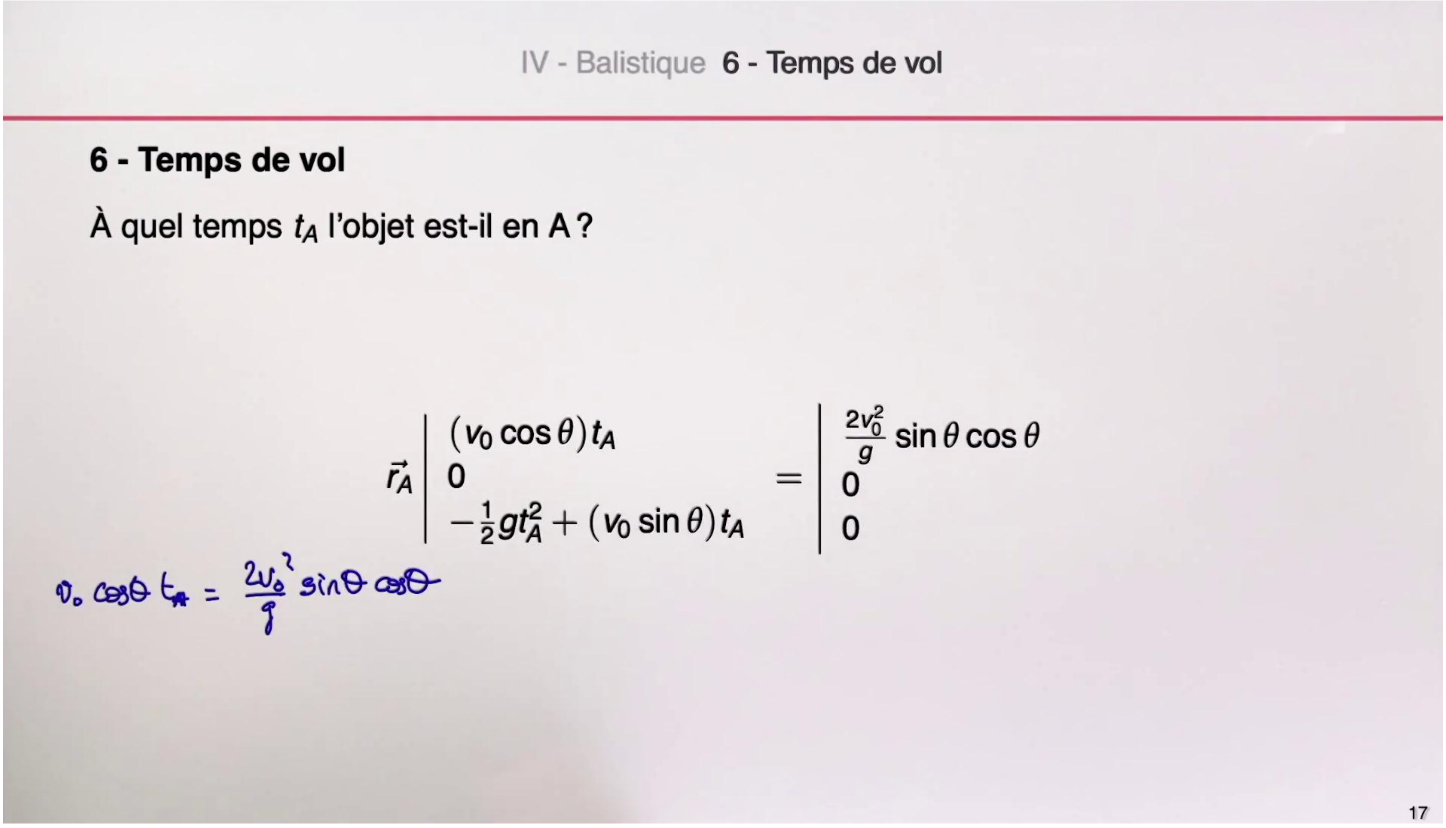


Puisque $\alpha 1$ est entre 0 et 90 degrés, Θ1 est, lui, entre 0 et 45 degrés. Donc Θ1 est inférieur à 45 degrés. Et cet angle me permettra d'atteindre la cible en B. L'angle inférieur à 45 degrés me donne le tir tendu. Ensuite, j'ai une deuxième solution qui, elle, est entre 90 et 180 degrés, pour laquelle j'ai un angle $\alpha 2$ tel que sin$\alpha 2$ sera aussi égal à xBg/v0². Comme Θ2 sera égal à la moitié de $\alpha 2$, je vais retrouver Θ2 entre 45 et 90 degrés. Cet angle supérieur à 45 degrés correspond à ce que l'on appelle le tir en cloche. Si on veut être exact, puisque xBg/v0² est strictement inférieur à 1, je ne peux pas atteindre l'angle de 90 degrés, donc cette intervalle ici est ouvert. J'ai donc bien retrouvé ce que j'avais vu sur mon animation, les deux valeurs possibles pour Θ, une qui donne le tir tendu, une qui donne le tir en cloche, toutes deux me permettant d'atteindre la cible en B.

Notes

Summary

10m 40s



Une grandeur qui est aussi intéressante, c'est ce qu'on appelle le temps de vol. Le temps de vol, c'est le temps pendant lequel l'objet est en vol. En fait, le temps entre le moment où il quitte la catapulte en haut et le moment où il va arriver au point d'impact en A. La question que je me pose, c'est donc à quel temps tA l'objet va-t-il se retrouver en A ? Afin d'obtenir tA, nous allons utiliser deux expressions de rA qui me donnent la position de l'objet quand il est en A. D'une part, l'équation horaire, puisque j'ai besoin du temps, et d'autre part, les coordonnées du point d'impact qui me permettent de connaître xA. Ce que j'écris là, c'est qu'en tA, l'objet a le vecteur position rA qui correspond au vecteur oA, dont les composantes sont les coordonnées du point A. J'ai là deux équations, une sur x et une sur y. Celle sur y est plus complexe puisque j'ai un tA². Je vais donc utiliser l'équation sur x qui sera plus simple à manipuler. Elle me permet donc d'obtenir v0cosΘtA est égal à (2v0²/g)sinΘcosΘ. J'ai repris l'expression originelle de xA, car elle va me permettre une simplification. En effet, je retrouve à gauche et à droite cosΘ, que je peux simplifier et un v0, un v0² qui me permet aussi une simplification.

Notes

Summary

12m 19s

6 - Temps de vol

À quel temps t_A l'objet est-il en A ?

$$\vec{r}_A \left| \begin{array}{l} (v_0 \cos\theta) t_A \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t_A^2 + (v_0 \sin\theta) t_A \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\cancel{v_0} \cancel{\cos\theta}\, t_A = \frac{2v_0^{\cancel{2}}}{g} \sin\theta \cancel{\cos\theta}$$

$$t_A = 2\left(\frac{v_0}{g}\right) \sin\theta. \quad = 2 t_s$$

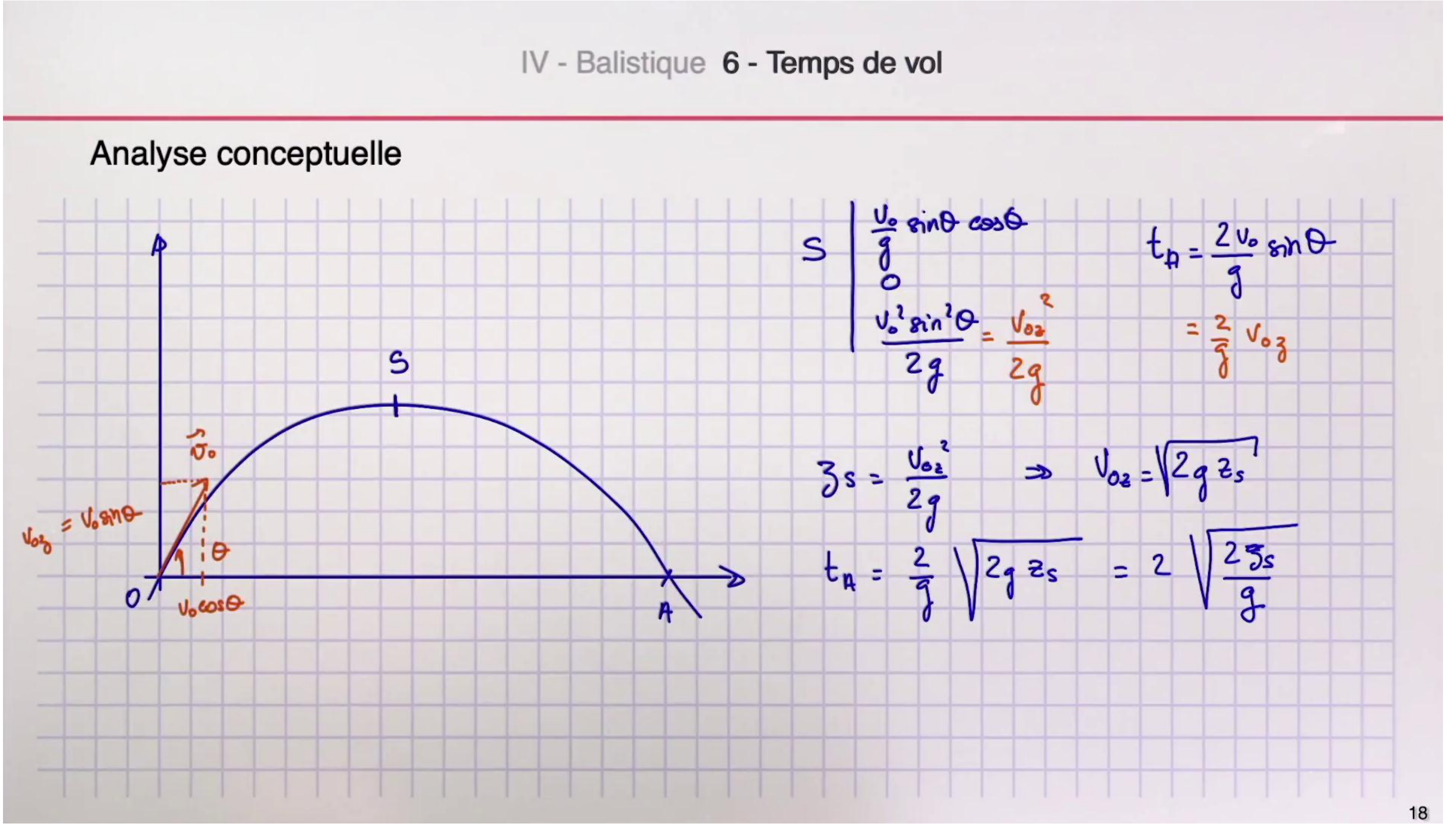
17

J'ai donc directement l'expression de tA qui vaut (2v0/g)sinΘ. tA = 2(v0/g) sinΘ. Comme nous sommes dans un cas symétrique, tA sera égal à 2 fois ts, ce qui signifie qu'il faut le même temps à l'objet pour aller de l'origine jusqu'en s que pour aller de s jusqu'en A.

Notes

Summary

14m 05s

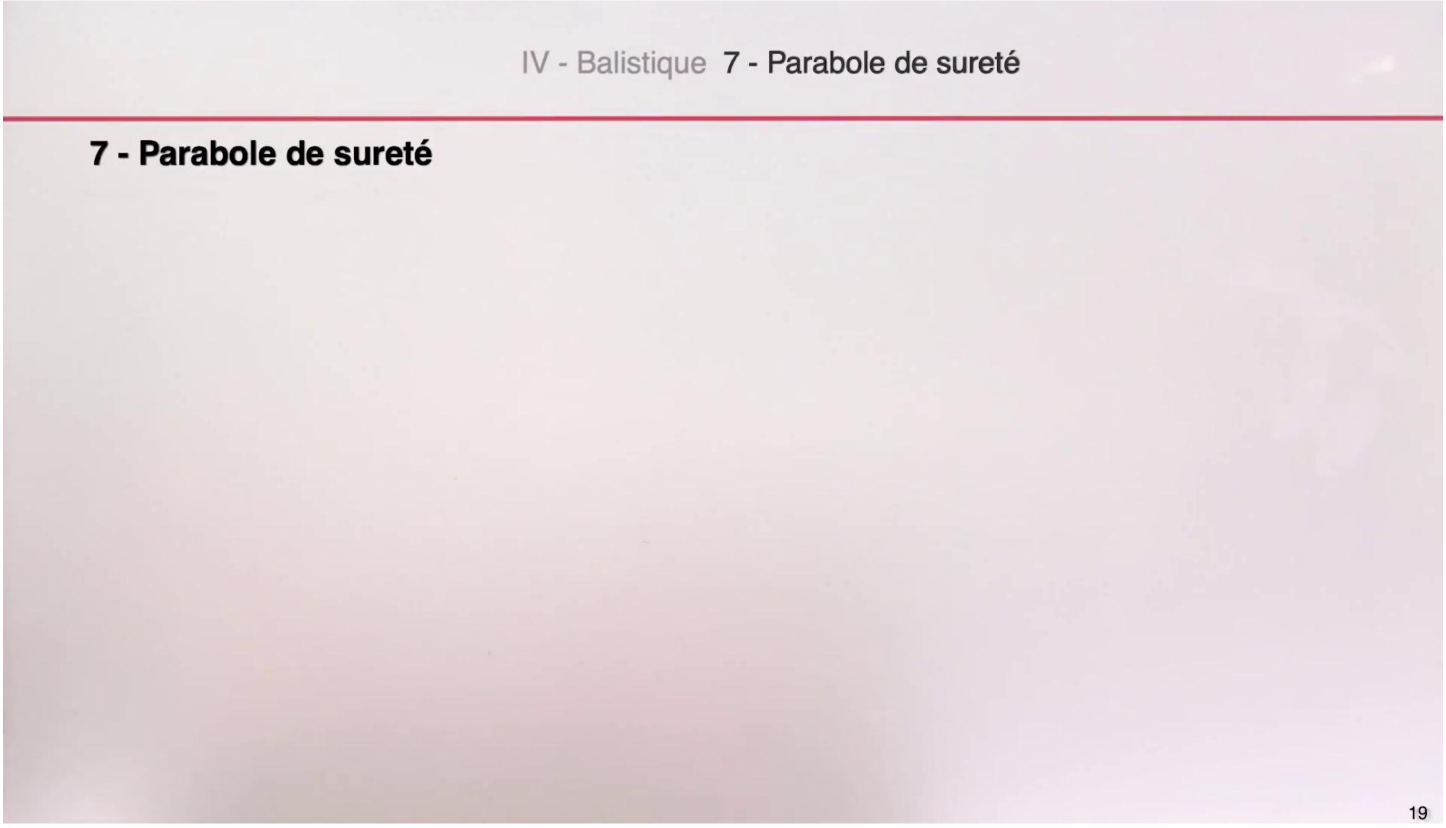


Cela nous amène à une analyse conceptuelle intéressante de ce temps de vol. Reprenons la parabole. L'objet part de o avec le vecteur vitesse v0. Ce vecteur vitesse v0 a une composante sur x qui vaut v0xqui est égale à v0cosΘ. Θ étant l'angle de tir. La composante du vecteur vitesse initial sur l'axe oy est v0sinΘ. Nous avons vu les coordonnées du sommet s qui sont (v0/g)sinΘcosΘ, 0 et v0²sin²Θ/2g. Par ailleurs, nous avons vu que le temps pour arriver en A, tA valait (2v0/g)sinΘ. Je retrouve ici v0/sinΘ et v0/sinΘ². Or, v0sinΘ n'est autre que la composante de la vitesse sur l'axe oz. On l'appelle aussi v0z. Ce tA est donc égal à (2/g)v0z et zS va être égal à v0z²/2g. Je trouve donc un lien direct entre le temps de vol et zS. En effet, zS valant v0z²/2g, je peux écrire que v0z est égal à 2gzS racine carrée. Le temps de vol tA est donc égal à 2/g v0z racine carrée de 2gzS, ou bien 2 racine carrée de de zS/g. La fonction racine carrée est une fonction croissante monotone, donc plus zS est grand, plus tA est grand. Le temps de vol, donc le temps entre le moment où l'objet est lancé et le moment où il retombe en A, dépend de l'altitude à laquelle il arrive au maximum, donc de zS, et plus il arrive haut, plus il a passé longtemps en vol.

Notes

Summary

14m 33s

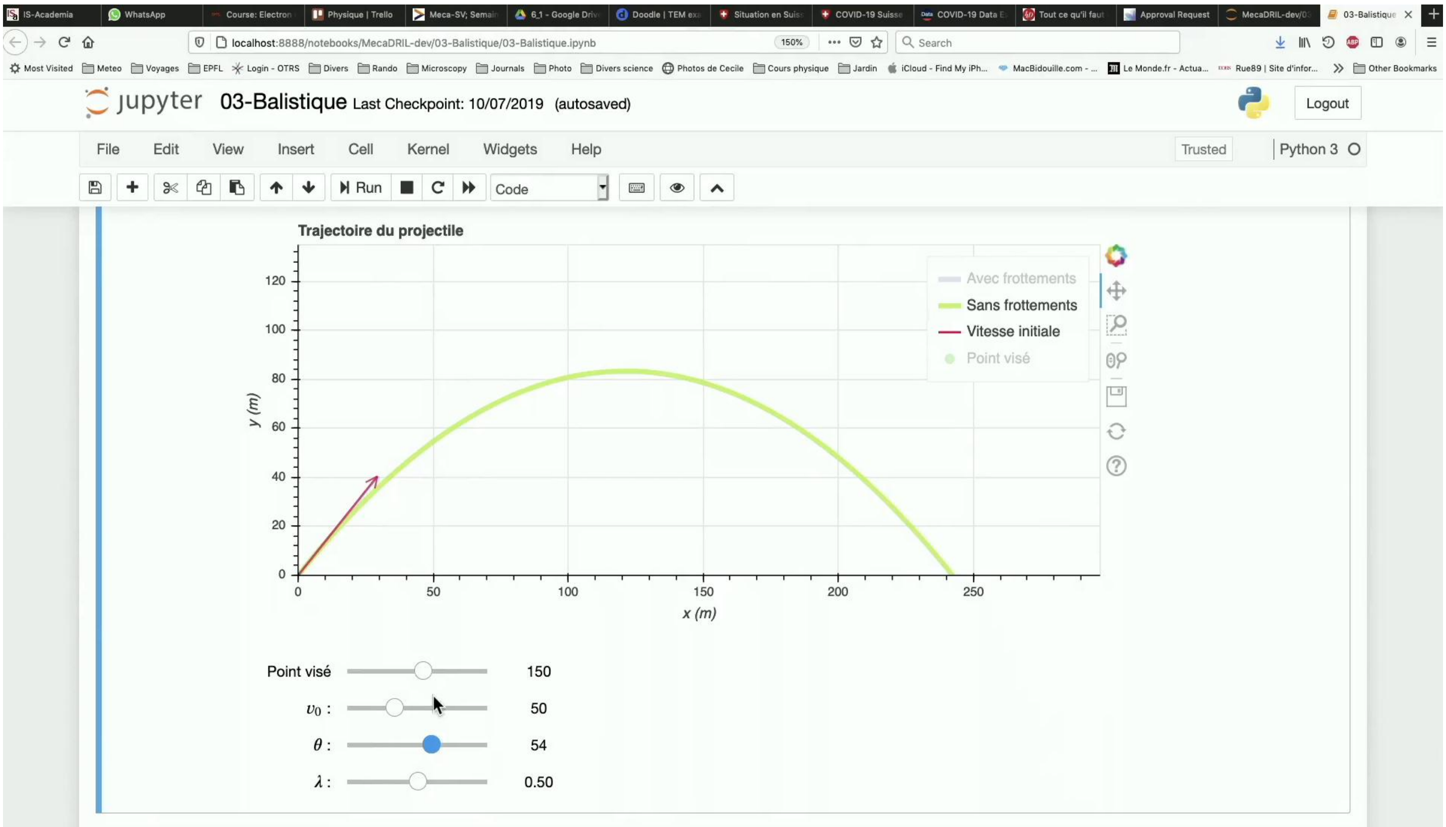


La prochaine notion est celle de parabole de sûreté.

Notes

Summary

17m 17s

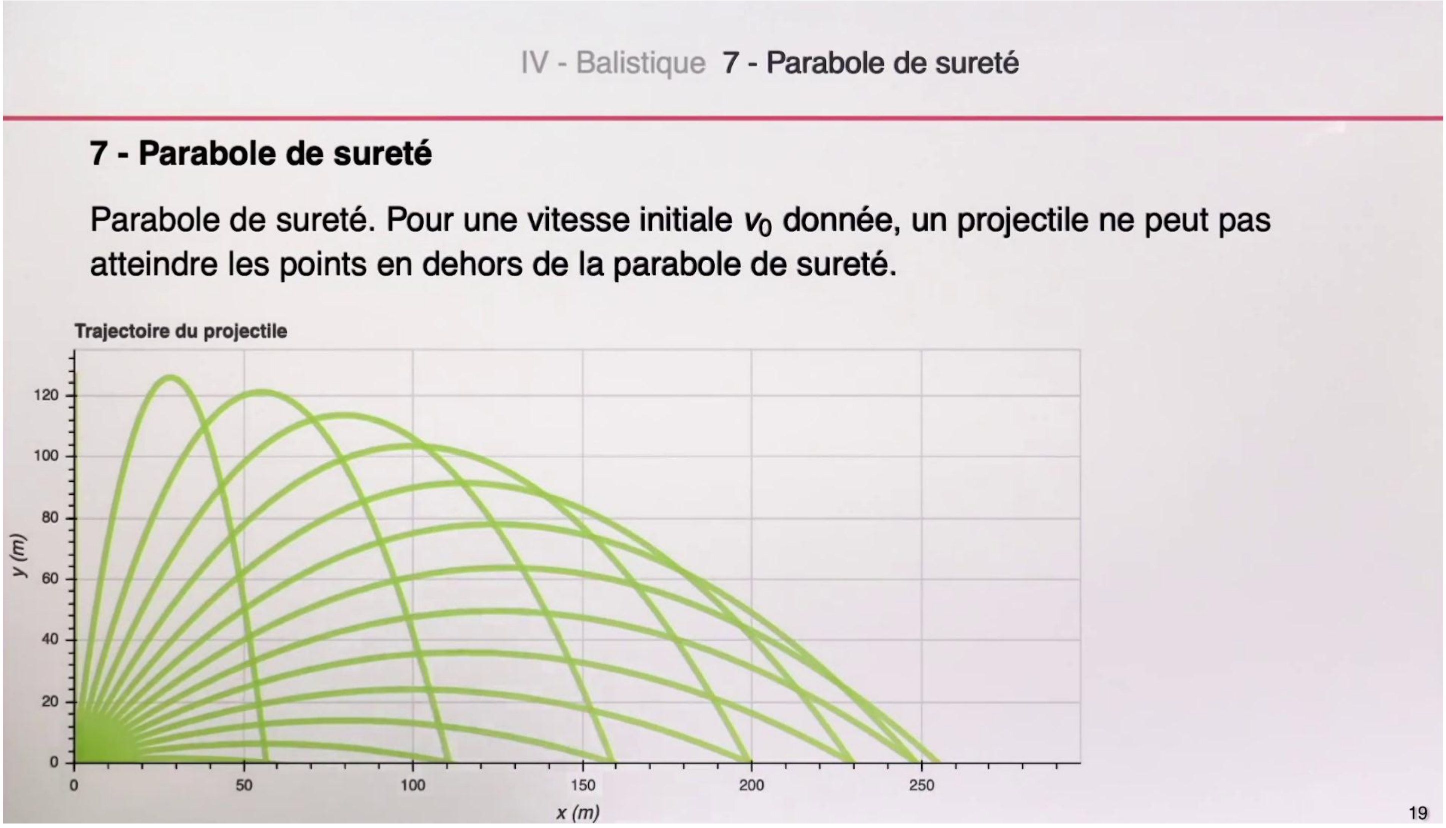


Maintenant, supposons à nouveau que je lance mon objet avec une vitesse initiale dont la norme est fixée. Je peux faire varier l'angle de tir Θ. Lorsqu'on balaye les valeurs possibles de Θ, on voit que dans une certaine portion de l'espace, je peux atteindre n'importe quel point à condition de choisir un Θ qui convient. Mais il y a une portion de l'espace qui est inaccessible.

Notes

Summary

17m 22s



Si je trace toutes les paraboles possibles avec différentes valeurs de l'angle ϴ, mais toujours la même valeur pour la norme de v0, les points de l'espace que je peux atteindre sont englobés dans une parabole. À l'extérieur, c'est l'espace inaccessible. Cette parabole s'appelle la parabole de sûreté.

Notes

Summary

18m 01s

Voilà, nous avons vu la démarche à appliquer lorsqu'on a les informations sur l'équation horaire et la trajectoire et qu'on veut obtenir un effet particulier, par exemple atteindre un point au sol. J'insiste bien à nouveau, ce qui est important ici, c'est la démarche que nous avons utilisée, ce n'est pas les formules. Ces formules dépendent du repère que vous avez choisi, mais aussi des conditions du problème. Vous n'obtiendrez pas la même chose si vous travaillez avec un sol en pente.

Notes

Summary

18m 30s