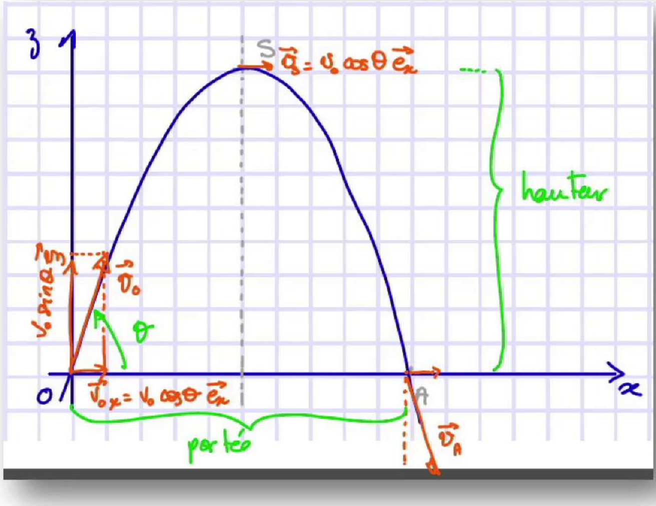
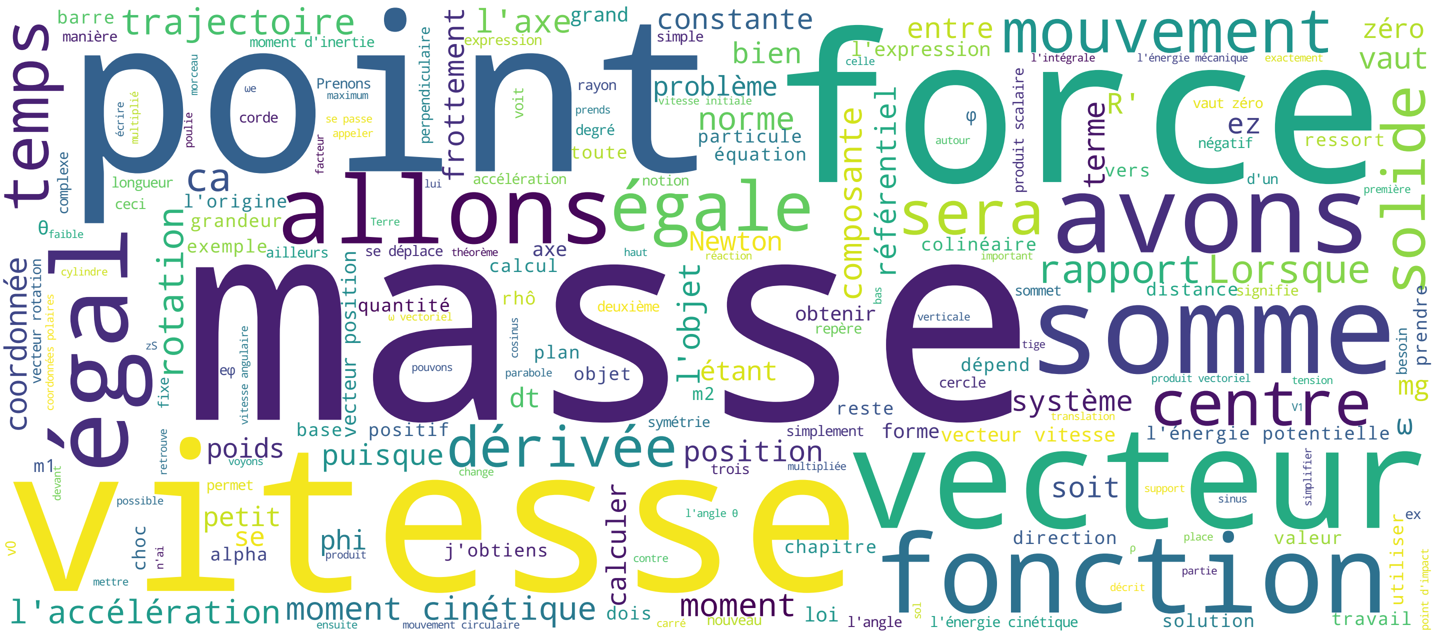
Physique générale : mécanique

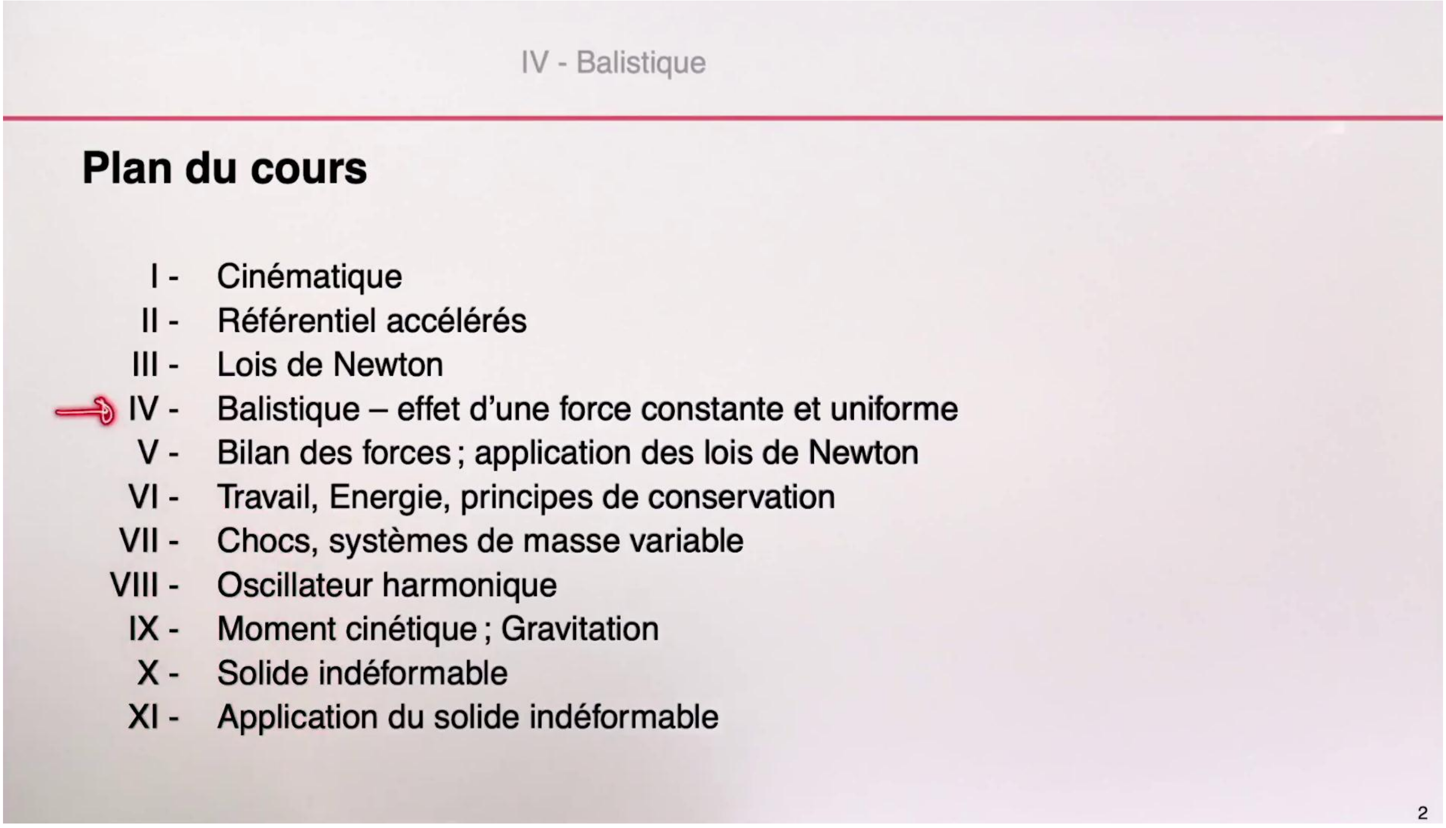


Trajectoire

Prof. Cécile Hébert



Video

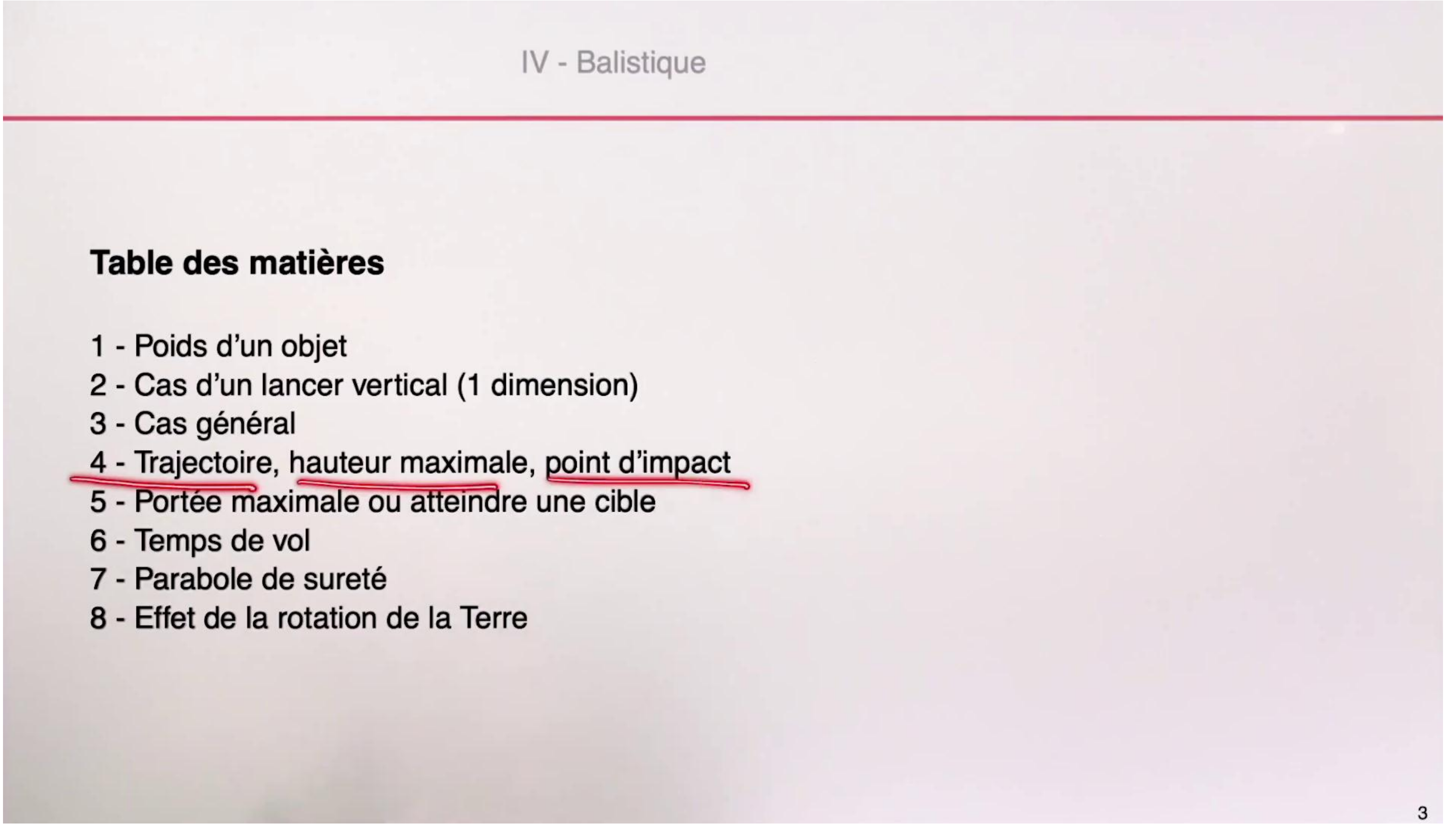


Bonjour. Nous sommes toujours dans la balistique. Nous avons précédemment trouvé le vecteur position en fonction du temps. Maintenant ce que nous allons chercher à faire, c'est retrouver la trajectoire, donc vraiment l'information spatiale du trajet suivi par l'objet. Nous allons aussi caractériser certains points principaux de cette trajectoire. Nous sommes dans le chapitre 4 sur la balistique.

Notes

Summary

0m 05s



Et nous allons voir la notion de trajectoire et ensuite la hauteur maximale et le point d'impact.

Notes

Summary

0m 30s

4 - Trajectoire, hauteur maximale, point d'impact

Chercher la trajectoire, c'est chercher z en fonction de x

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}0\\0\\-g\end{array}\right.\qquad \vec{v}\left|\begin{array}{l}v_0\cos\theta\\0\\-gt+v_0\sin\theta\end{array}\right.\qquad \vec{r}\left|\begin{array}{l}(v_0\cos\theta)t = x(t)\\0\\-\frac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\theta)t = z\end{array}\right.$$

équation paramétrique de la trajectoire
paramètre = temps
équation horaire

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + (\cancel{v_0}\sin\theta)\frac{x}{\cancel{v_0}\cos\theta}$$

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x}$$

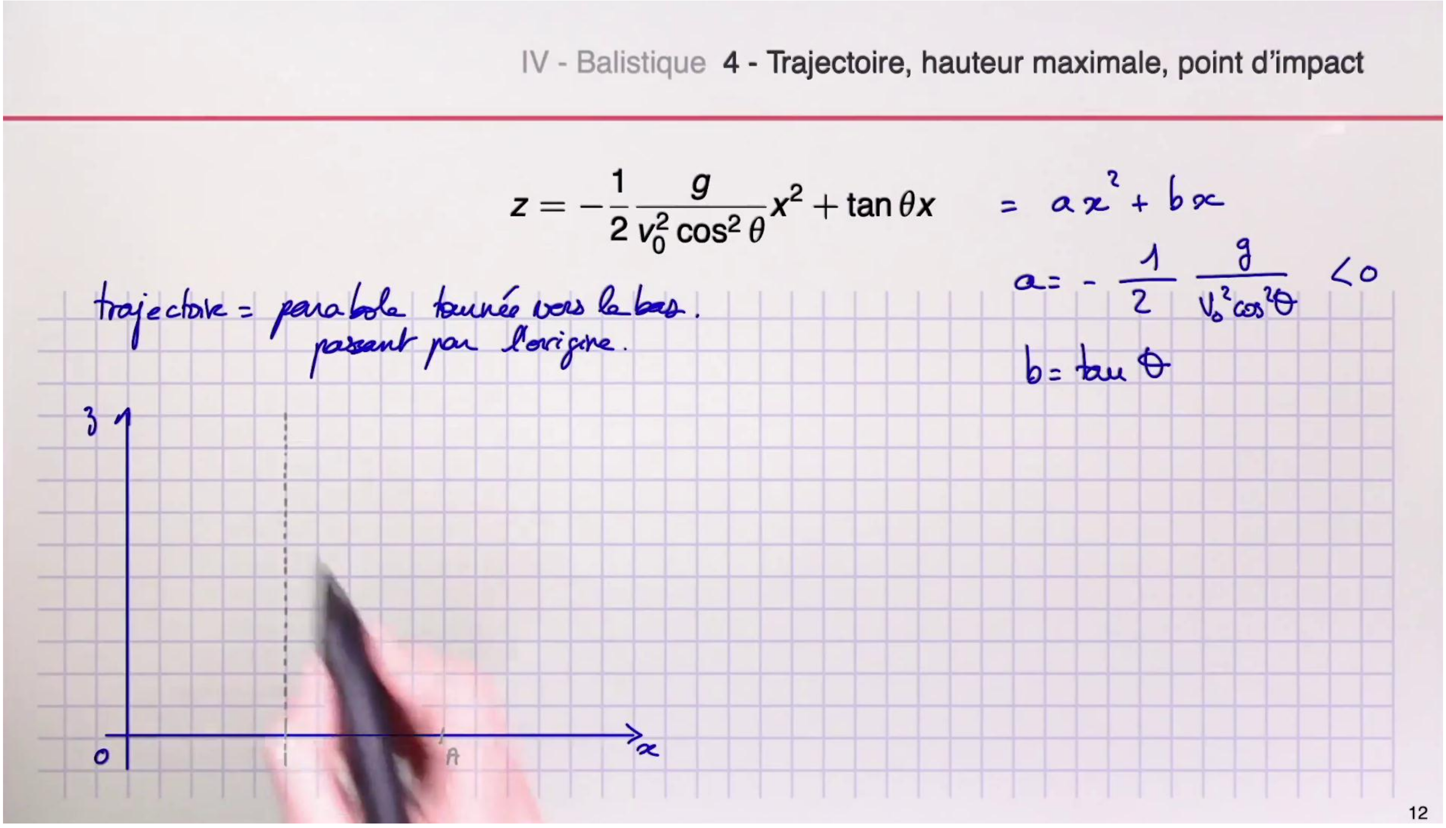
11

Chercher la trajectoire, dans le cas de notre mouvement qui est dans le plan X, Z, c'est chercher la coordonnée z en fonction de la coordonnée x. Or, nous avons trouvé précédemment l'accélération, la vitesse et la position, tous trois en fonction de la variable temps. Ce que nous avons obtenu avec r(t), c'est une équation paramétrique de la trajectoire. Le paramètre est le temps. C'est aussi appelé l'équation horaire. Pour obtenir z en fonction de x, nous allons devoir éliminer t. Nous allons donc dire que nous avons ici x(t) et dans la dernière ligne z(t). Nous allons chercher t en fonction de x, puis le mettre dans l'équation contenant z. En utilisant la première ligne, j'obtiens donc t = x/v0cosθ. Lorsque j'introduis ce t dans l'équation donnée par la deuxième ligne, cela va me donner. z(x) = égale -1/2g(x/v0cosθ)² + (v0sinθ)x/v0cosθ Je peux simplifier un v0 ici. Par ailleurs, sinθ/cosθ, c'est tangθ et au final j'obtiens z(x) = -g/(2v0²cos²θ)*x² +tanθx. C'est donc l'équation de la trajectoire que je cherchais. Maintenant, nous allons analyser cette équation pour comprendre la forme de la trajectoire.

Notes

Summary

0m 37s

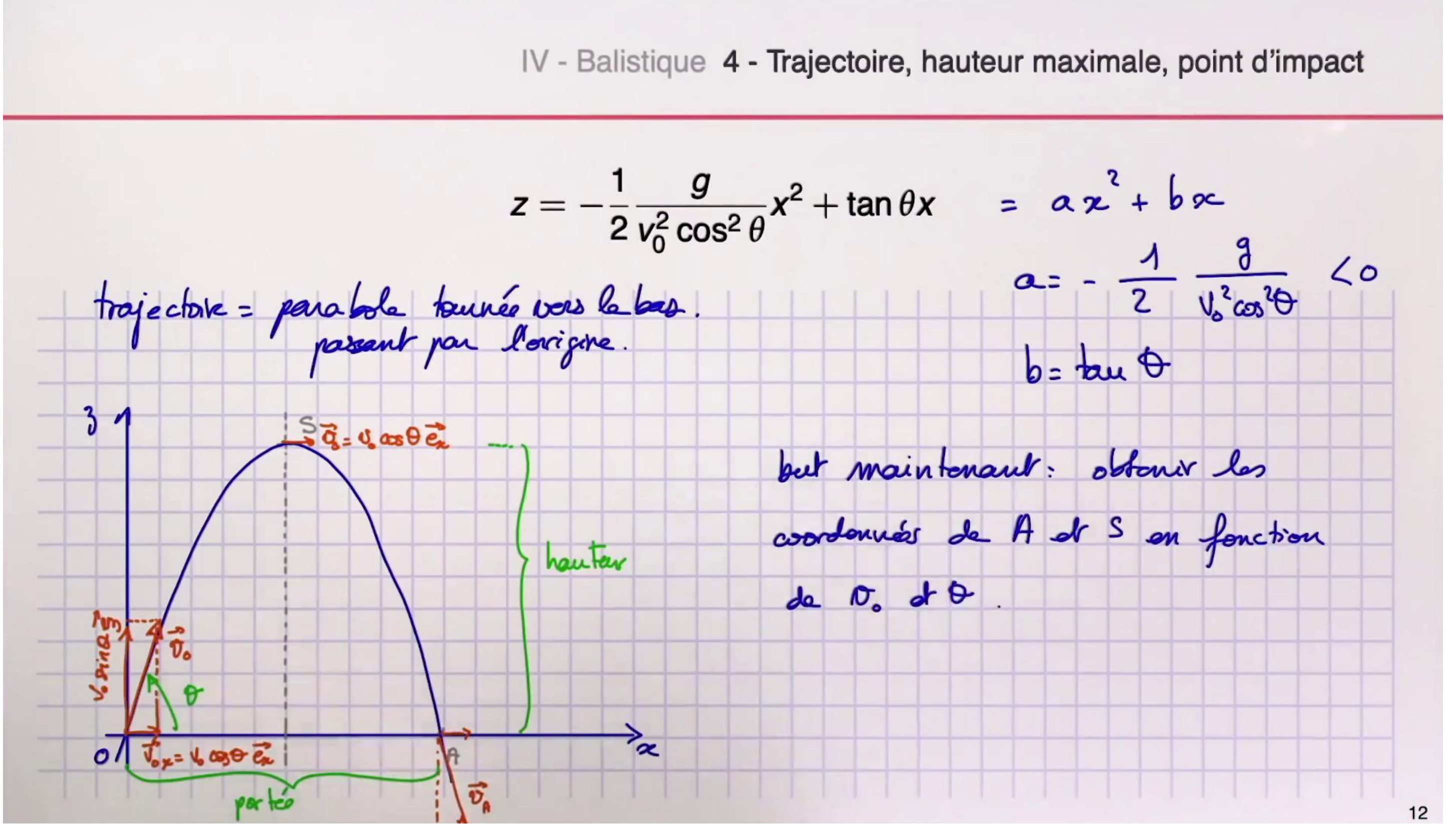


Puisque j'ai ici z en fonction de x, j'ai z qui vaut un $ax^2 + bx$. Le premier terme est a. Le deuxième terme est b. a vaut donc $-1/2*g/(v0^2\cos^2\theta)$ et b vaut $\tan\theta$. Pour un lancer donné, θ est fixe et v0 est fixe, donc a est une constante b aussi. De plus, j'ai un moins ici, donc a est une constante négative. Une courbe ayant cette équation est une parabole. Comme a est négatif, c'est une parabole tournée vers le bas. La trajectoire est donc une parabole tournée vers le bas. L'équation générique d'une parabole est $ax^2 + bx + c$ mais ici c n'existe pas, donc il vaut zéro. Cela revient à dire que ma parabole passe par l'origine, donc par le point de coordonnées (0; 0). J'ai donc une parabole tournée vers le bas passant par l'origine. La forme de cette parabole dépendra de la valeur de a et b, qui elle-même dépend de v0 et de θ. Avec ces informations, nous allons maintenant pouvoir schématiser cette parabole. Traçons les axes oz et ox et puisque la parabole est une courbe symétrique, je peux commencer par tracer son axe de symétrie. Le point d'impact se trouvera à la même distance de l'axe de symétrie que O. Le point d'impact s'appelle A. Je décide de la position du sommet S et avec cela, je peux schématiser ma parabole.

Notes

Summary

2m 29s

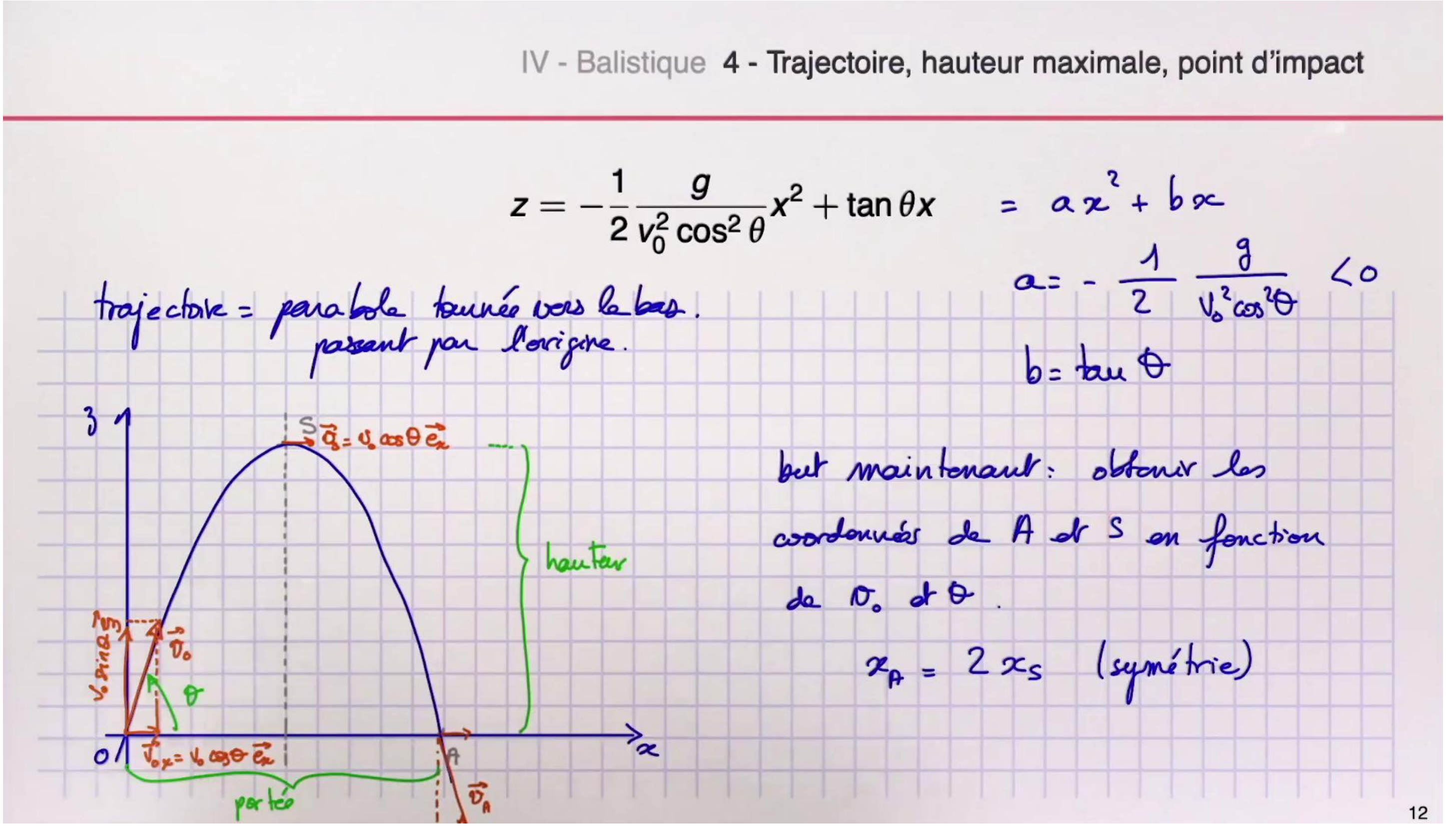


La vitesse initiale v0 est tangente à la trajectoire au point de départ O. Sa composante selon x est v0x qui vaut v0cosθ, comme nous l'avons vu dans la vidéo précédente. Sa composante selon oz est v0sinθ. Nous avons vu qu'à chaque point de la trajectoire, la composante horizontale de la vitesse reste constante. C'est toujours v0cosθ. Donc selon ox, l'objet a en tout instant une vitesse horizontale de v0 cosθ ex. C'est en particulier vrai au sommet. Mais au sommet, la vitesse est horizontale, donc la vitesse v au sommet est égale à v0cosθ ex. Le vecteur vitesse en A est toujours tangent à la trajectoire. De par la symétrie, on voit que sa composante sur ox reste toujours v0cosθ et sa composante sur ey sera -v0sinθ. La distance OA est appelée la portée. L'altitude du point S est appelée la hauteur de la trajectoire. Et je replace l'angle θ sur le dessin. Le but maintenant va être d'obtenir les coordonnées du point S et les coordonnées du point A en fonction des conditions initiales de tir donc de l'angle θ et de la norme du vecteur vitesse initiale. Nous n'aurons pas besoin de faire deux fois le calcul parce que la symétrie est le fait que la parabole passe par O dans le cas présent, nous permet de dire que xA vaut deux fois xS.

Notes

Summary

4m 17s

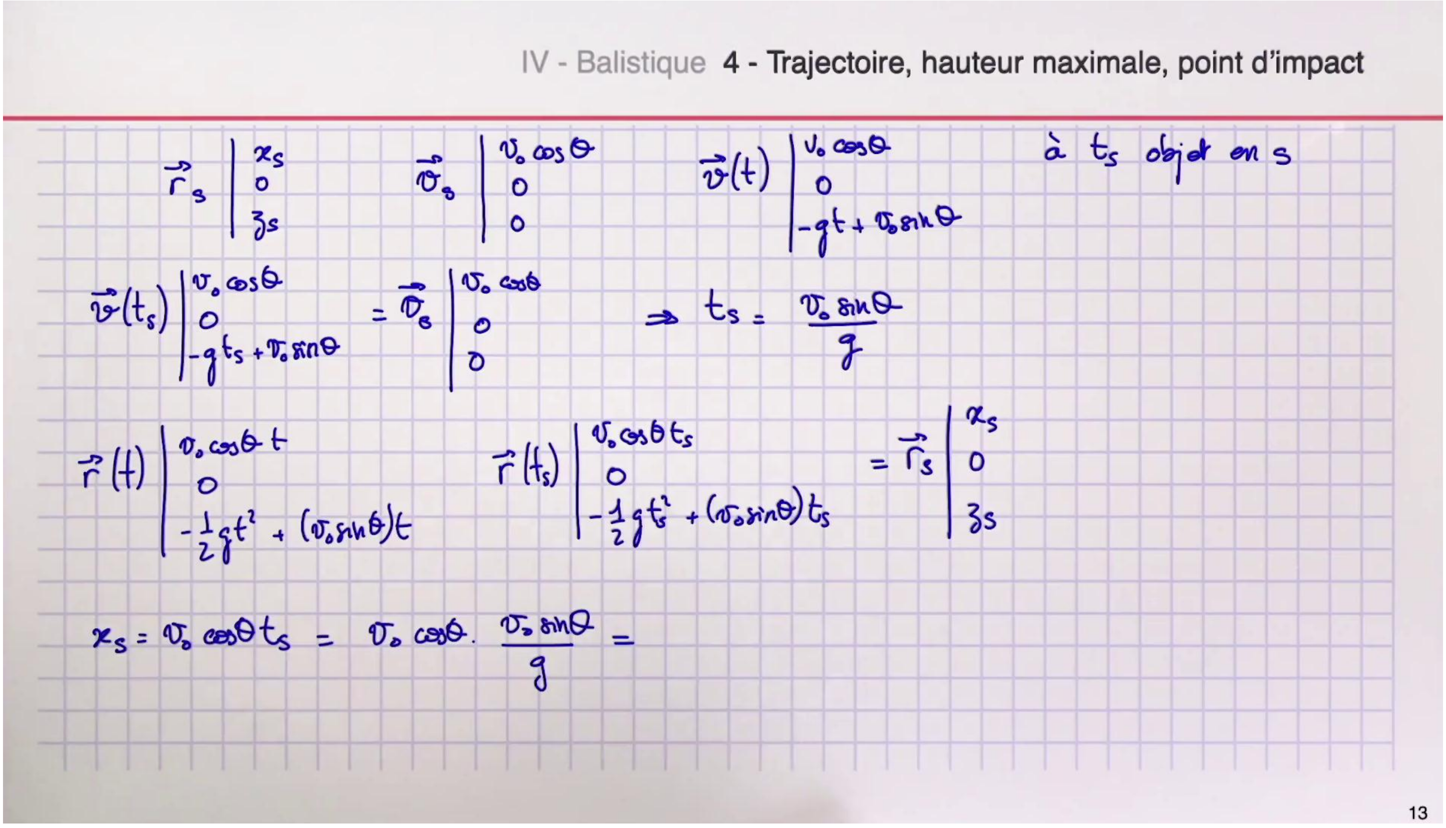


Donc il suffira de calculer les coordonnées du point S, xS et zS pour connaître les coordonnées du point A. Nous cherchons donc d'abord les coordonnées de S.

Notes

Summary

6m 21s

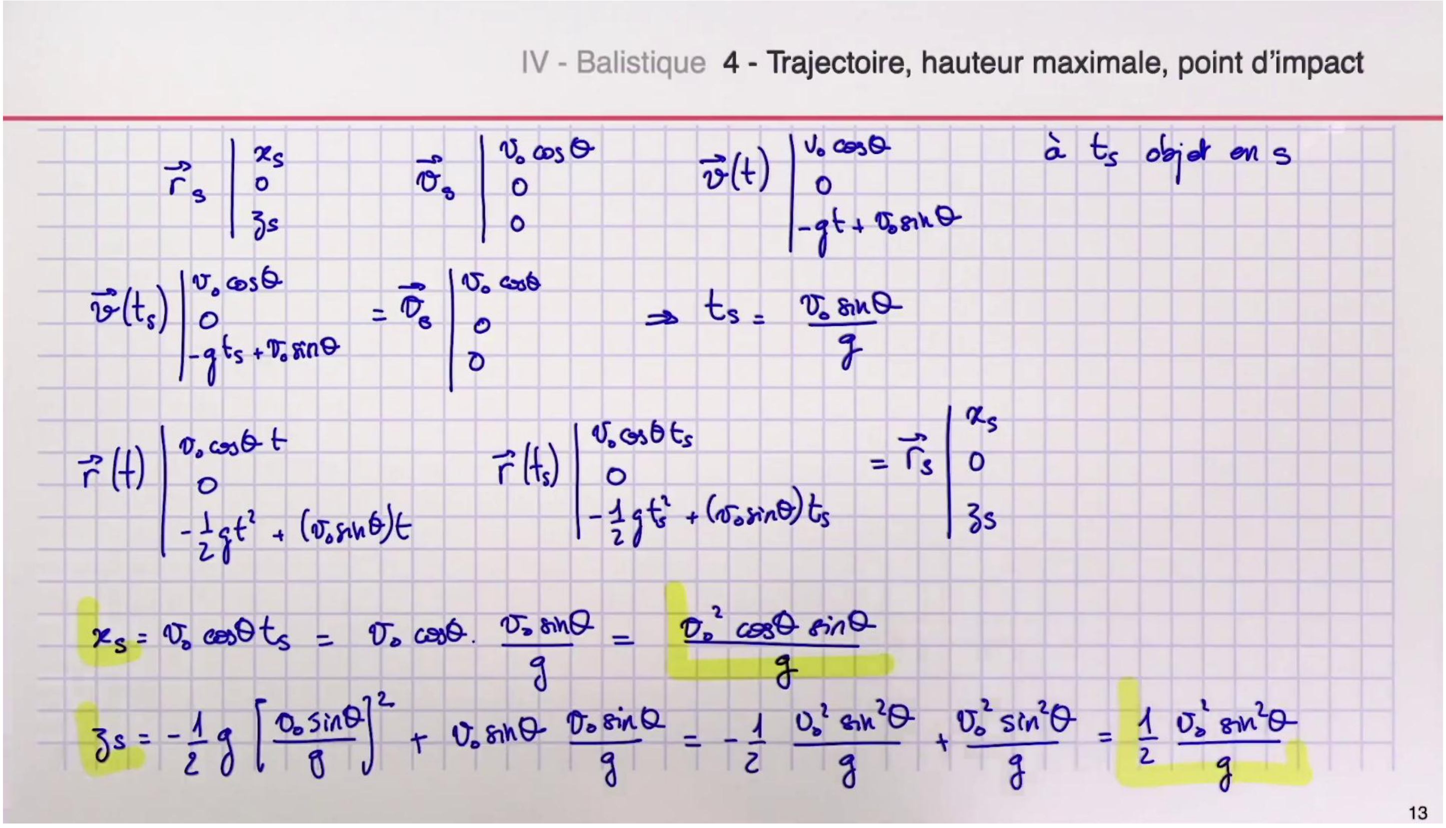


Lorsque l'objet est en S son vecteur position est rS qui a comme coordonnées xS, 0 et zS. Comme S est le sommet de la trajectoire, nous savons que la vitesse S est horizontale, donc la vitesse en S sera v0cosθ, 0 sur l'axe y, mais aussi 0 sur l'axe z. Or nous connaissons la vitesse en fonction du temps. Son expression v(t) est v0cosθ, 0 sur y, et -gt + v0sinθ sur l'axe z. Appelons ts le temps auquel l'objet est S. v(ts) a donc comme composante. v0Costθ, 0, -gts + v0sinθ. C'est aussi égal à vS puisque c'est la vitesse lorsque l'objet est en S qui a comme composante v0cosθ, 0, 0. La dernière ligne sur Z nous permet donc d'obtenir ts. ts = v0sinθ/g. Maintenant, nous allons utiliser ce temps ts pour l'introduire dans l'expression du vecteur position afin d'obtenir rs. Nous connaissons t en fonction du temps, r(t) a comme composante v0cosθt, 0, 1/2*gt² + (v0sinθ)t +0. Donc à ts, j'ai r(ts) qui a comme composantes v0cosθts, 0, -1/2gts² +(v0sinθ)ts. Or c'est aussi rs qui avait comme composantes xS, 0, zS. Cela va me permettre d'obtenir xS en fonction de ts, y, zS en fonction de ts. Je vais maintenant remplacer ts par l'expression trouvée précédemment. Et au final, en simplifiant, j'ai (v0²cosθsinθ)/g.

Notes

Summary

6m 39s

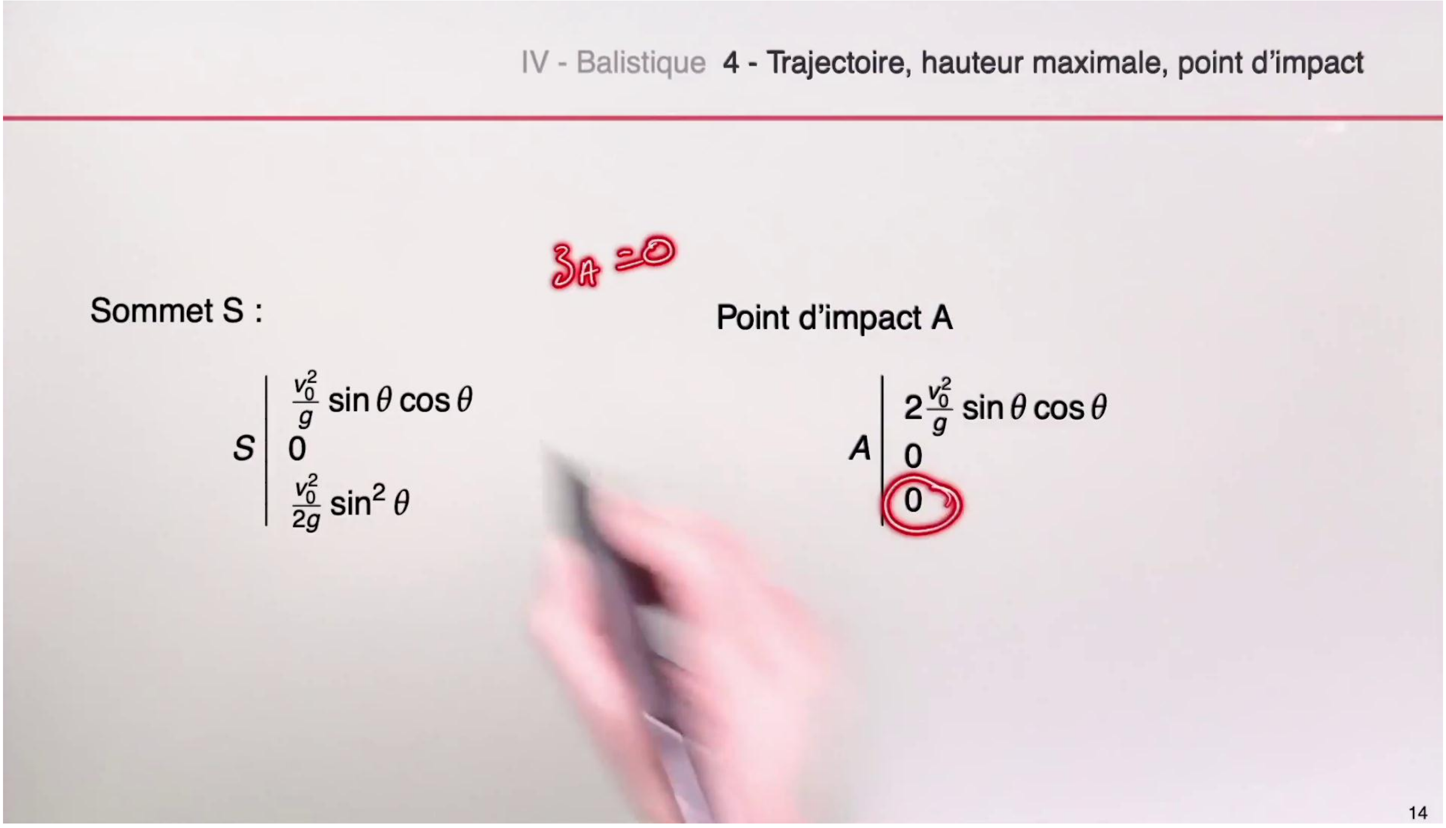


zS est un tout petit peu plus compliqué. -1/2gts², je vais tout de suite remplacer ts par son expression. -1/2g[v0sinθ/g]² + v0sinθts, donc v0sinθts. J'ai donc ici v0²sin²θ/g² multiplié par g, ça va me faire v0²sin²θ/g et -1/2 devant. Ça, c'est le premier terme. Plus v0²sin²θ/g. J'ai deux fois la même chose, v0²sin²θ/g une fois complètement et ensuite -1/2 il va donc me rester -1/2(v0²sin²θ)/g j'ai donc obtenu xS et zS.

Notes

Summary

9m 13s



En résumé, j'ai donc obtenu les coordonnées du sommet S exclusivement en fonction de V0 et θ, et bien sûr aussi l'accélération de la pesanteur G. Pour le point d'impact, je rappelle que nous avions zA qui vaut zéro, donc zéro ici et xA qui valait deux 2xS.

Notes

Summary

10m 30s

Sommet S :

$$S \left| \begin{array}{l} \dfrac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta \end{array} \right.$$

Point d'impact A

$$A \left| \begin{array}{l} 2\dfrac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = 2x_S \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

14

Notes

Summary

10m 50s

Comme je connais xS et immédiatement xA qui vaut $2(v0^2/g)\sin\theta\cos\theta$ Voilà, partant des équations horaires, en éliminant le temps, nous avons pu obtenir la trajectoire suivie par l'objet. Ceci nous a permis de la décrire plus précisément et en particulier de connaître l'altitude maximale ou l'endroit où l'objet tombe.

Notes

Summary

10m 57s