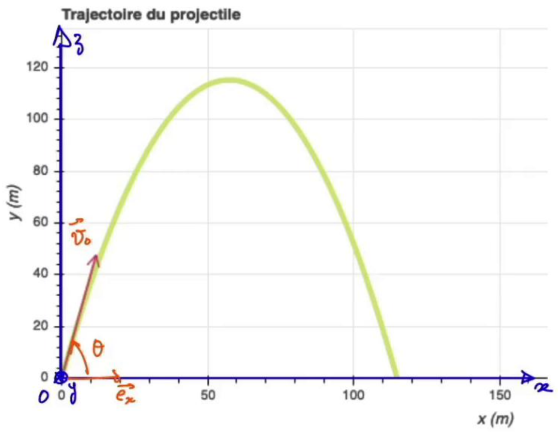
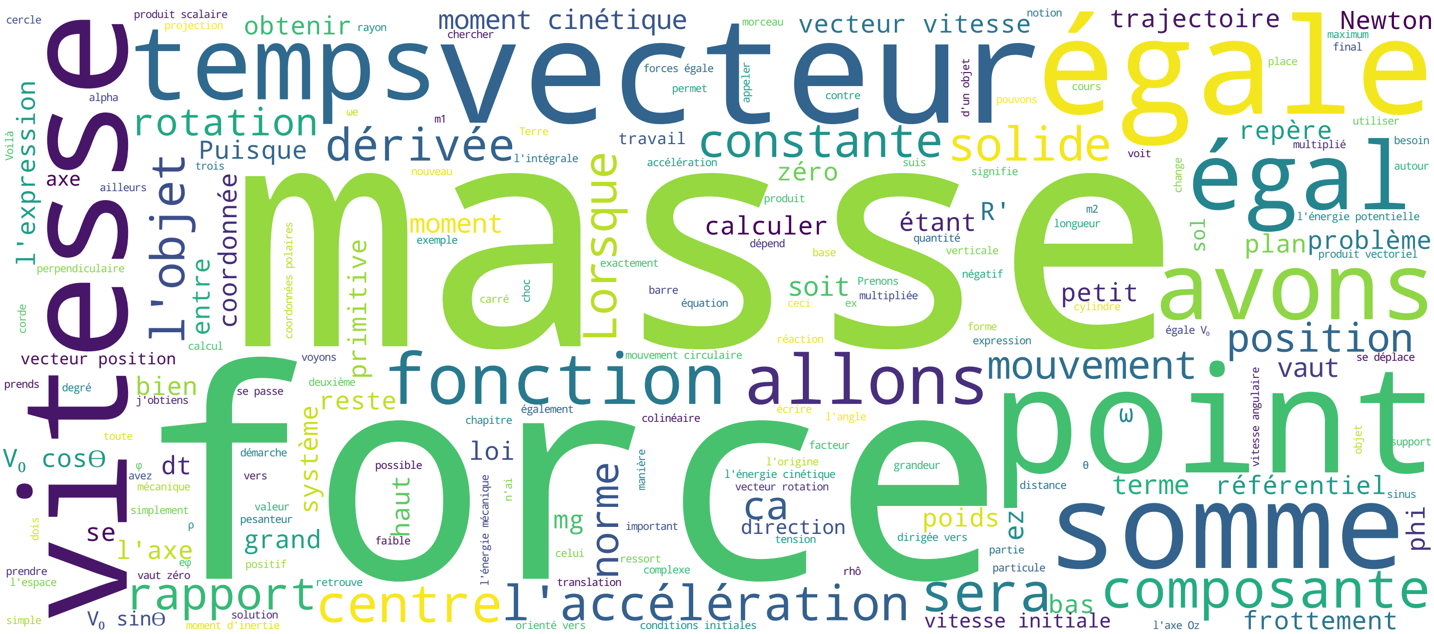
Physique générale : mécanique



Position vitesse accélération

Prof. Cécile Hébert



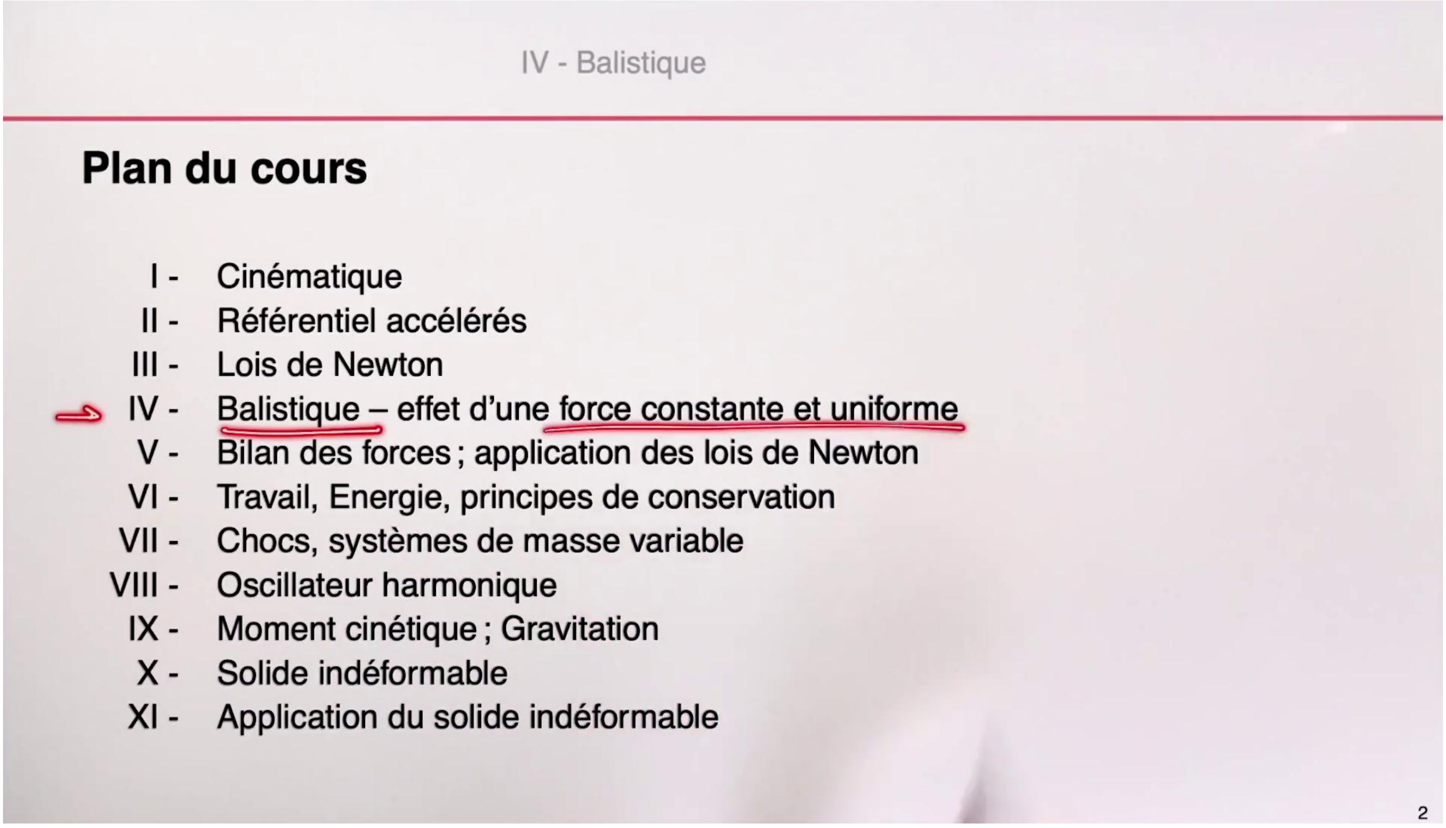
Video

Bonjour. Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement d'un objet si la seule force qu'il ressent est le poids. Bien plus que les formules qu'on va obtenir, ce qui est important, c'est la démarche et c'est cette démarche que vous devrez appliquer à tous les problèmes. Pour commencer, nous allons partir de la force, remonter à l'accélération et ayant l'accélération, en déduire la vitesse et la position de l'objet en fonction du temps.

Notes

Summary

0m 05s



Nous sommes dans le chapitre 4, sur la Balistique, effet d'une force constante et uniforme, et nous allons voir les trois premiers points.

Notes

Summary

0m 32s

IV - Balistique

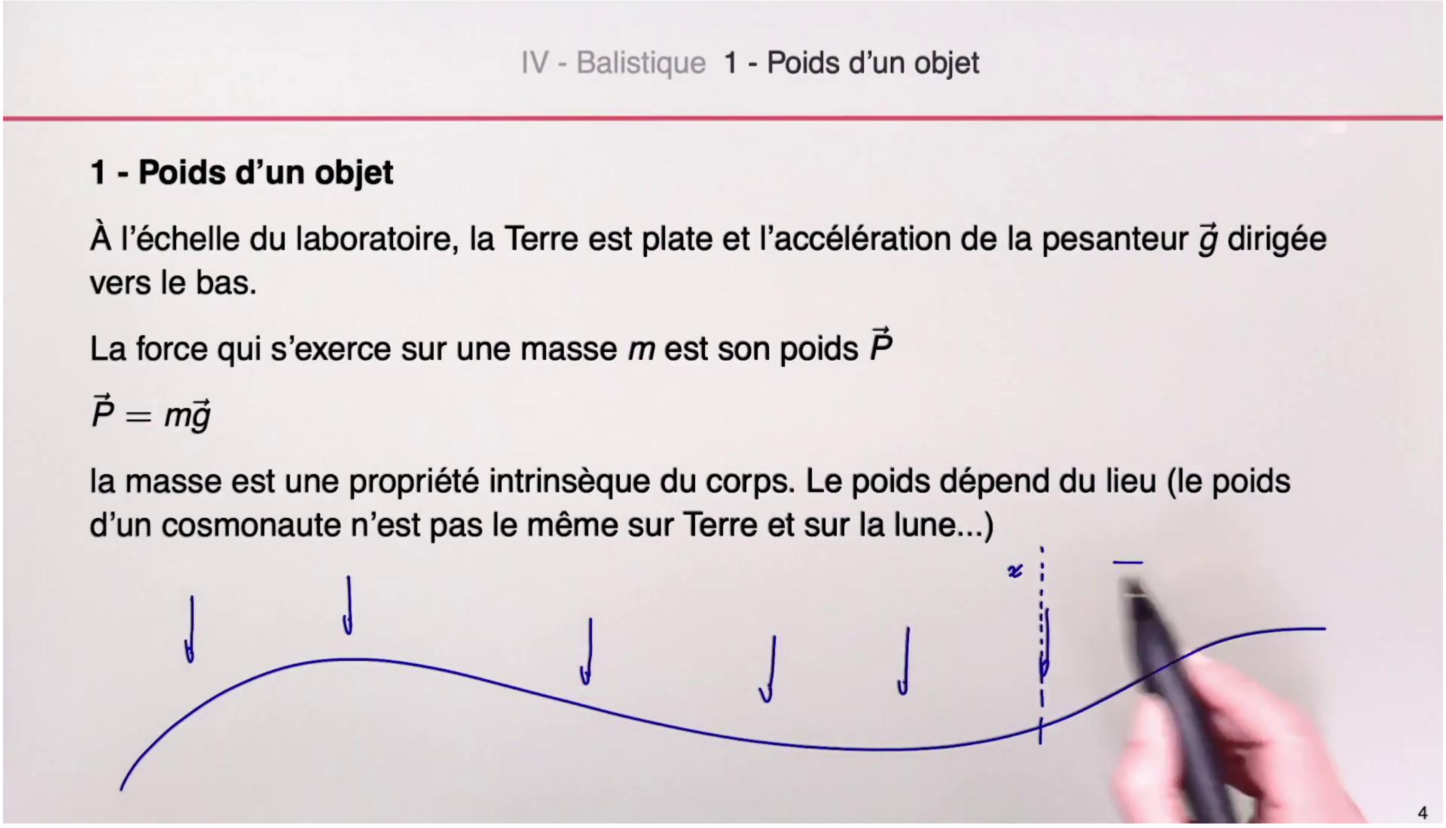
Table des matières

3

Notes

Summary

0m 37s



Nous allons donc voir le mouvement d'un objet soumis à son poids uniquement. À l'échelle du laboratoire, on n'a pas besoin de prendre en compte la courbure de la Terre. On peut la considérer comme plate et l'accélération de la pesanteur, g, est dirigée vers le bas et elle sera uniforme sur l'ensemble de l'observation. La force qui s'exerce sur une masse m est ce qu'on appelle son poids P qui est relié à m et g par P égale mg. La masse est une propriété intrinsèque du corps alors que le poids, lui, dépend du lieu. Le poids d'un cosmonaute n'est pas le même sur Terre et sur la lune. Le poids étant dirigé vers le bas, si j'ai un sol qui n'est pas horizontal, le poids ne sera pas perpendiculaire au sol. En fait, c'est très exactement la direction du poids qui indique la verticale. Cela me fera donc une direction privilégiée sur laquelle je pourrais, par exemple, placer un axe z. Quelle que soit la position de l'objet dans l'espace, le poids est identique, donc représenté par un vecteur de même norme, même sens et même direction. Si j'ai un objet à trois dimensions qui a une certaine taille, son poids s'exerce au centre de masse.

Notes

Summary

0m 42s

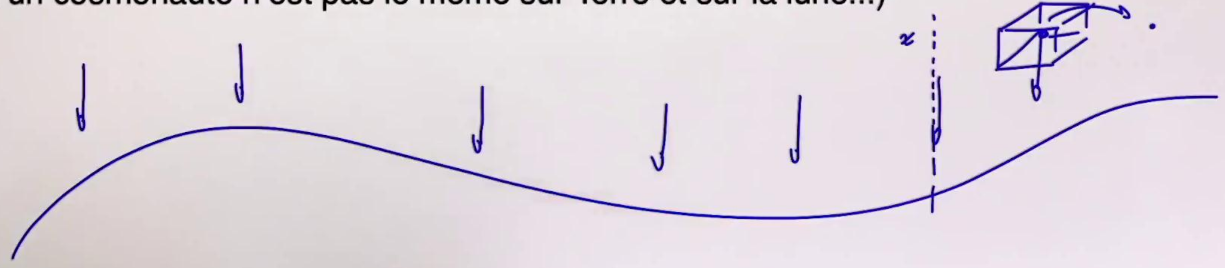
1 - Poids d'un objet

À l'échelle du laboratoire, la Terre est plate et l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ dirigée vers le bas.

La force qui s'exerce sur une masse *m* est son poids $\vec{P}$

$\vec{P} = m\vec{g}$ $\qquad g \simeq 10 \text{ m.s}^{-2} \qquad g = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}$

la masse est une propriété intrinsèque du corps. Le poids dépend du lieu (le poids d'un cosmonaute n'est pas le même sur Terre et sur la lune...)

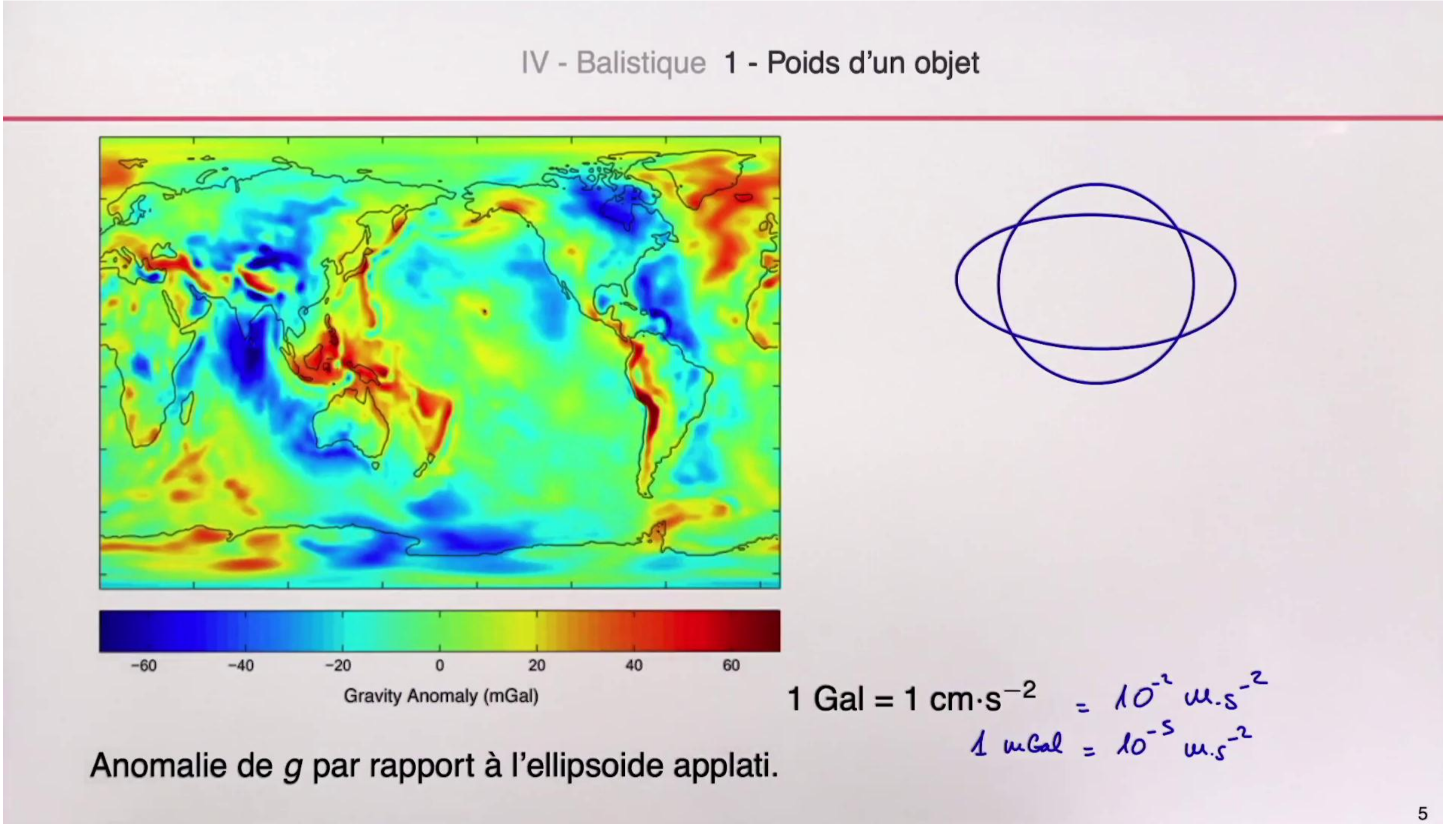


Mais pour l'instant, nous sommes dans la mécanique du point, donc nous assimilons l'objet à un point matériel rassemblé à son centre de masse. Dans le cours, il suffira généralement de prendre g à peu près égale à 10 m.s^{-2}. Si on veut être plus précis, on prendra g égale 9,81 m.s^{-2}. Mais en fait, g n'est pas parfaitement uniforme sur Terre.

Notes

Summary

2m 01s



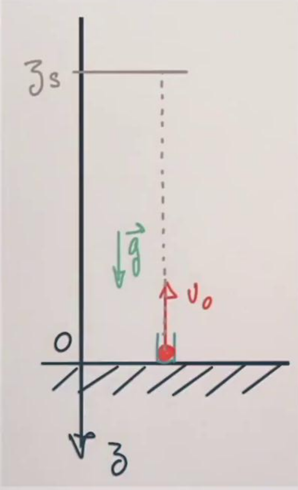
Il y a deux effets qui expliquent cela. D'abord, la Terre n'est pas une sphère homogène, mais a en fait plutôt la forme d'un ellipsoïde aplati. Elle est plus renflée à l'équateur et aplatie aux pôles. Le résultat, c'est que g ne sera pas identique à l'équateur et aux pôles. En plus de cela, la croûte terrestre n'est pas parfaitement homogène. Cela induit des petites variations de g à l'échelle locale qui sont représentées sur cette carte. En rouge, les zones où g est plus grande que la valeur prédite par l'ellipsoïde aplati et en bleu, les zones où g est plus petit. Mais ces variations sont très faibles. On parle ici d'une anomalie de gravité en milligal, 1 gal étant égal à 1 cm.s^{-2}. C'est donc 10^{-2} m.s^{-2}. Un milligal fait donc 10^{-5} m.s^{-2}. Puisque g fait 10 m.s^{-2} Et que nous sommes ici de 40 à 60 milligals, nous avons ici des anomalies qui sont de l'ordre de 5 x 10^{-5} g.

Notes

Summary

2m 26s

2 - Cas d'un lancer vertical (1 dimension)



Référentiel: labo repère: coordonnées cartésiennes (O,x,y,z)
Oz vertical vers le bas.
à $t=0$ $z(0)=0$ $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = -v_0 \vec{e}_z$ $v_0 = |\vec{v}_0| > 0$
force: poids $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow$

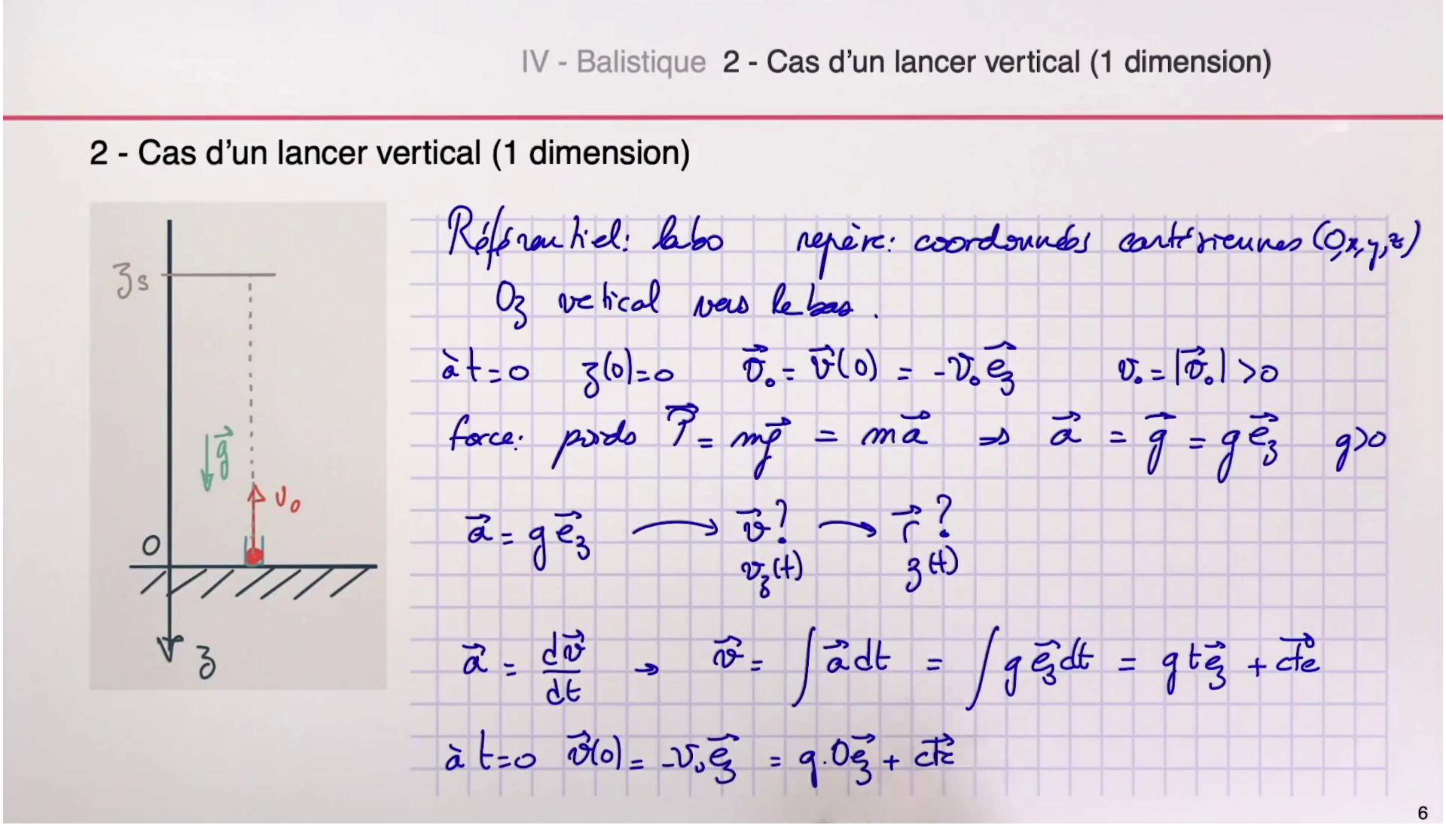
6

Le premier cas que nous allons tresser est celui d'un objet lancé verticalement dans le champ de pesanteur, donc soumis uniquement à son poids après avoir été lancé avec une vitesse initiale V_0 dirigée verticalement vers le haut. Nous devons choisir un référentiel et un repère. Le référentiel choisi est celui du laboratoire. Le repère sera des coordonnées cartésiennes, (O, x, y, z). Nous choisirons l'axe Oz vertical, et généralement, vous l'avez probablement vu orienté vers le haut. Comme j'ai l'esprit de contradiction, je vais le prendre orienté vers le bas. À t égale 0, on donne à la bille qui est là une vitesse V_0 dirigée vers le haut. On la fait partir du sol et j'ai placé l'origine de repère au sol. Cela me donne les conditions initiales à t égale 0, z(0) vaut 0 et la vitesse initiale V_0 qui est V(0) égale -V_0ez puisqu'elle est dirigée vers le haut alors que ez est vers le bas. Dans ce cas-là, V_0 est positif, c'est la norme du vecteur V_0. La seule force qui s'exerce sur l'objet est le poids, P égale mg. Comme somme des forces égale ma, c'est aussi égal à ma. Cela me permet de dire que l'accélération de l'objet est égale à l'accélération de la pesanteur.

Notes

Summary

3m 45s

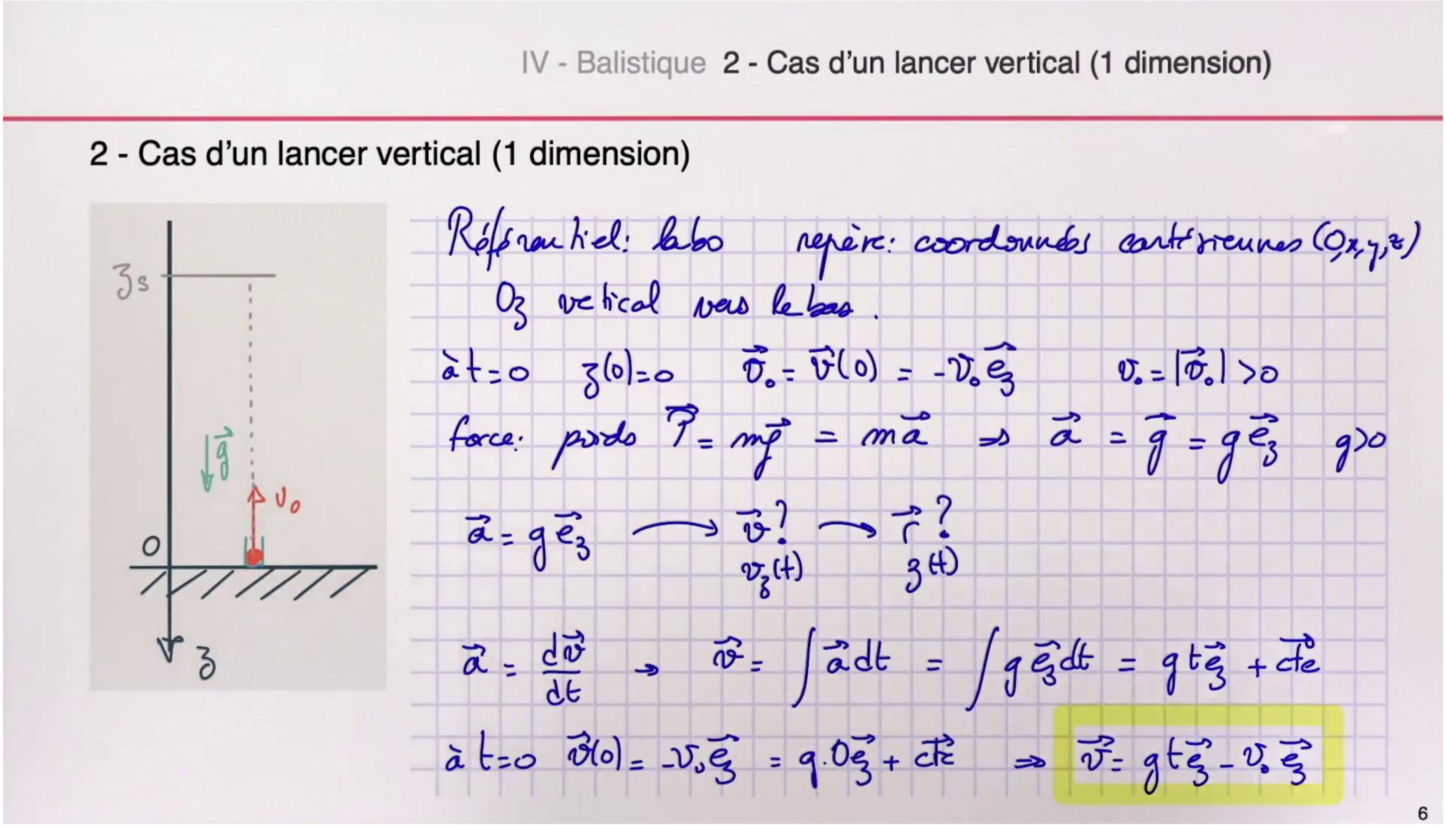


Comme g est dirigée vers le bas et que l'axe Oz est dirigé vers le bas, je peux donc écrire le vecteur g comme étant g ez. g est positif, égal à 10 m.s⁻². J'ai donc a, l'expression de l'accélération de ma bille. Maintenant, le but va être d'utiliser cela pour remonter à la vitesse, puis à la position. Comme je suis à une dimension, je vais chercher Vz en fonction du temps et la position z en fonction du temps. Nous avons vu que l'accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. Cela me permet d'écrire que la vitesse est la primitive de l'accélération. Comme a est un vecteur constant, je dois donc chercher la primitive de g ez dt. la primitive de g constante par rapport au temps sera gt. Je vais donc obtenir gt ez plus une constante d'intégration que j'écrit ici, constante avec une flèche dessus. Afin d'obtenir cette constante, je dois utiliser les conditions initiales. Puisque je suis avec la vitesse, je vais utiliser les conditions initiales sur la vitesse. À t égale 0, je sais que V(0) est égale -V_0 ez. Mais je sais aussi grâce à cette relation-là que c'est égal à g x 0ez plus constante. Ce terme-là vaut 0, il me reste donc la constante égale -V_0 ez.

Notes

Summary

5m 23s

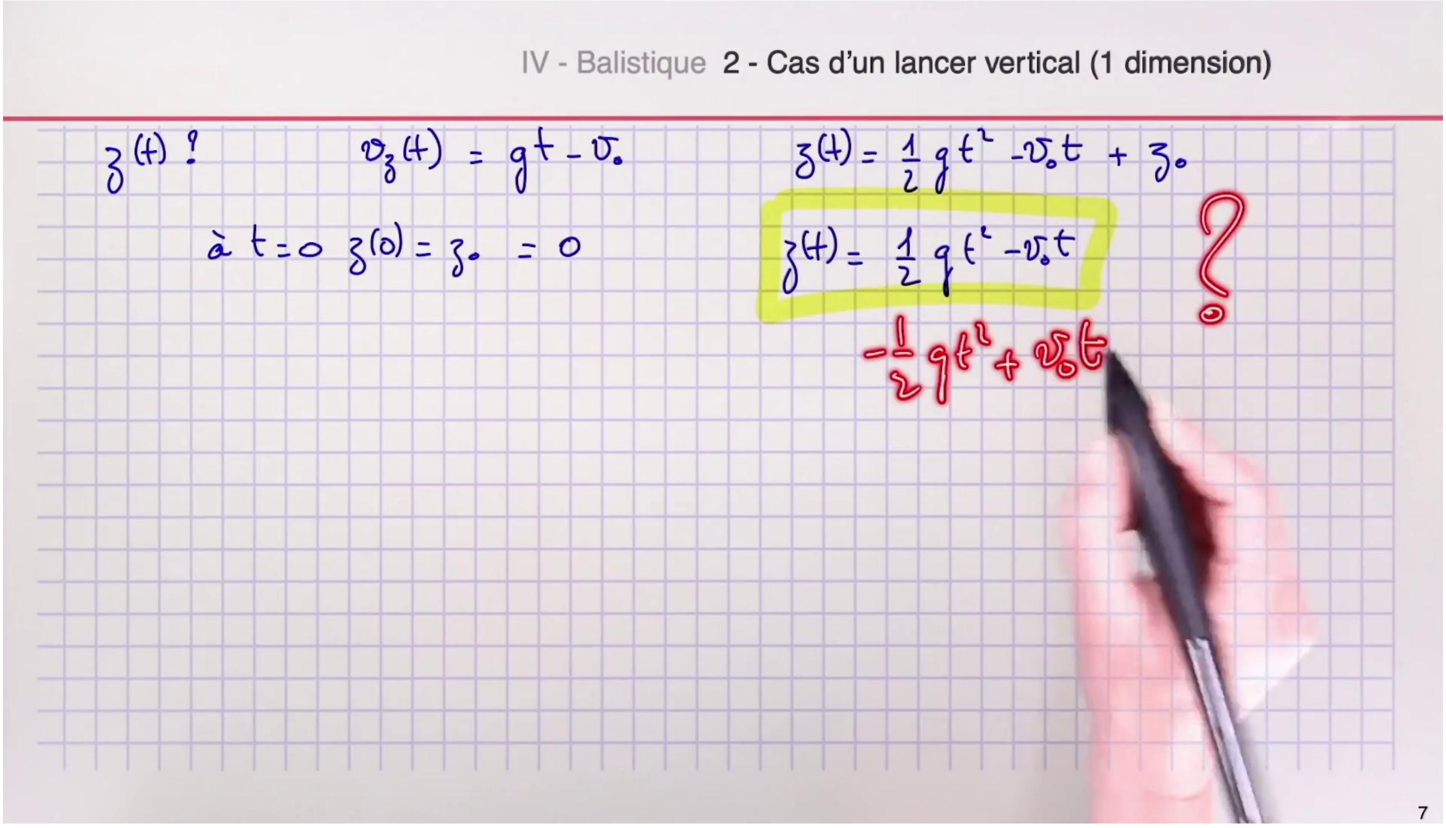


Au final, la vitesse V est égale à gt ez - V_0 ez. J'ai donc obtenu l'expression de la vitesse en fonction du temps. C'est une expression vectorielle colinéaire au vecteur de base ez. La vitesse va toujours rester sur l'axe vertical.

Notes

Summary

7m 10s

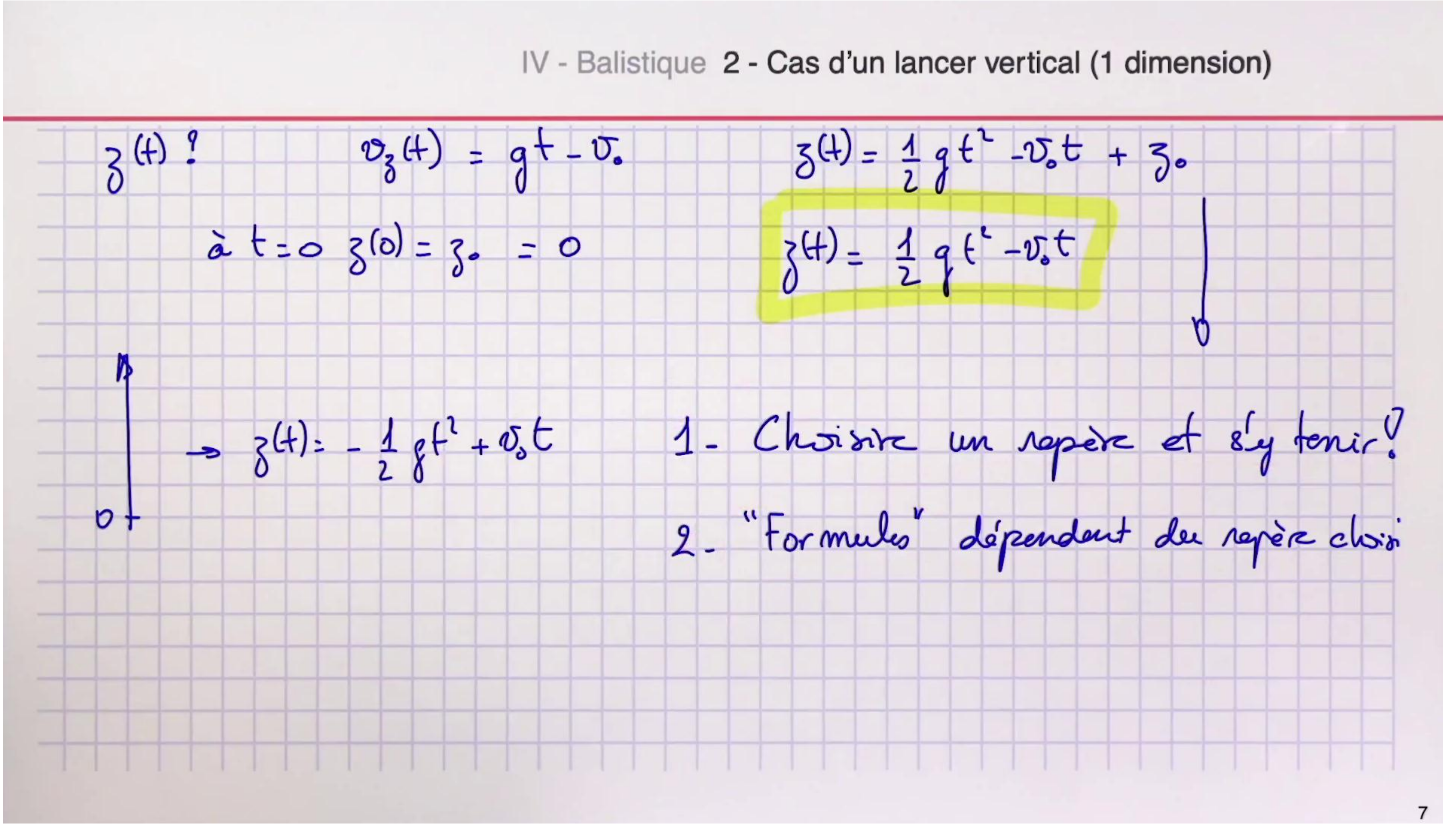


La prochaine étape va être de chercher z en fonction du temps. La composante sur z de la vitesse Vz de t est égale à gt moins V_0. C'est la projection sur ez de la vitesse. Pour obtenir z en fonction de temps, je dois intégrer cette expression. z(t) va être égal à la primitive de Vz(t). La primitive de gt, c'est ½gt². La primitive de V_0, c'est V_0t. Et j'ai une constante d'intégration qui est la valeur de z à t égale 0. Or, à t égale 0, z(0) vaut donc z_0, mais on a dit qu'on choisissait l'origine de manière à ce que ça soit nul. Cela me permet de supprimer ce terme. J'obtiens donc z(t) égale ½gt² - V_0t. Vous allez probablement me dire : « Bizarre ! Ça ressemble à ce que j'avais vu au gymnase, mais normalement, c'était -½gt² plus V_0t ».

Notes

Summary

7m 33s

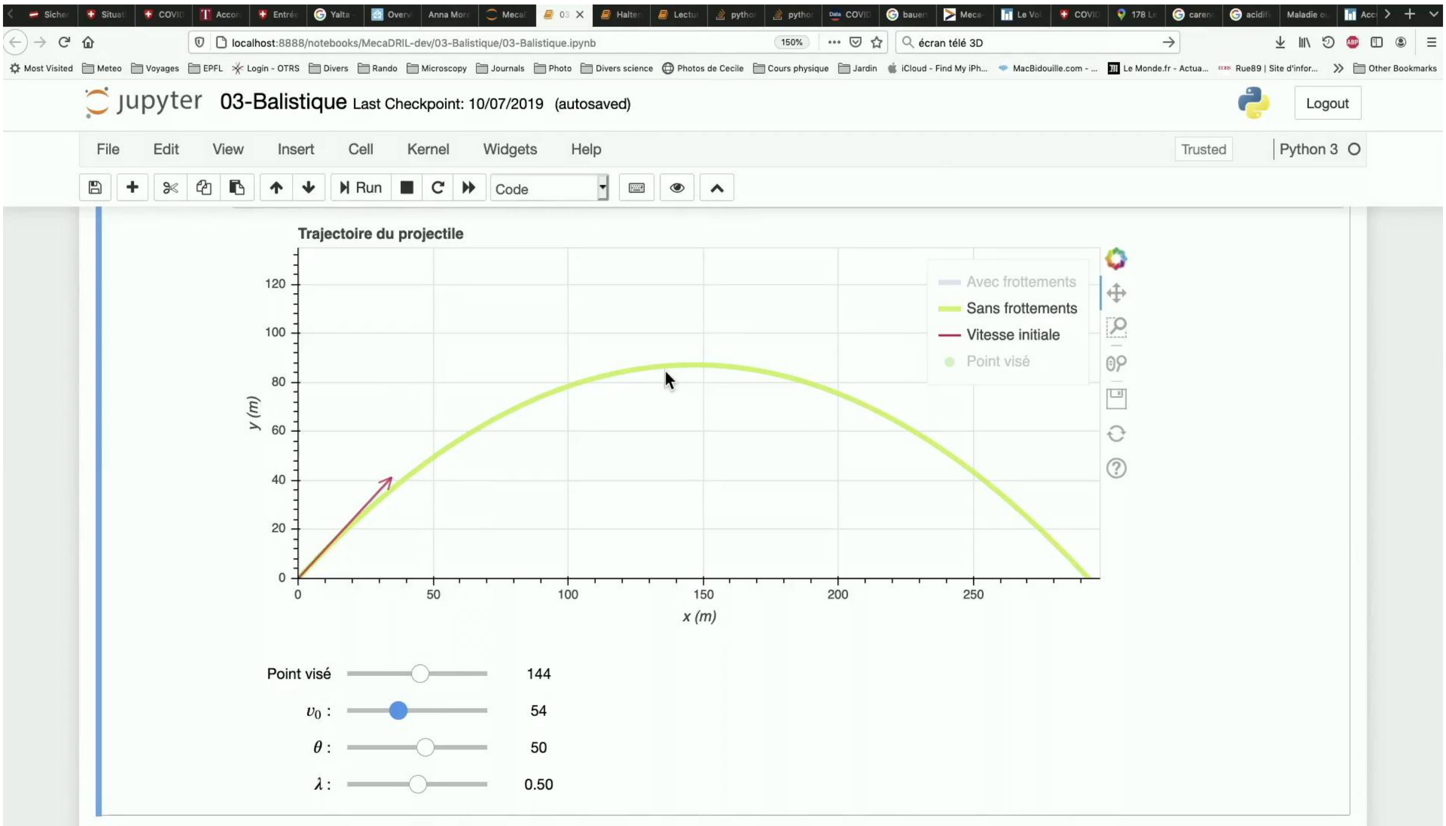


C'est quoi ce bazar ? Pourquoi il n'y a pas de moins ici et pourquoi il y en a un là ? C'est tout simplement l'effet de mon orientation du repère. J'ai choisi un z orienté vers le bas et c'est l'influence que ça a eu sur l'expression que j'ai obtenue ici. Si vous aviez choisi un axe Oz orienté vers le haut, vous auriez trouvé un z(t) égale - ½gt² + V_0t. Il y a donc deux messages principaux qui sortent de là. Dès que vous analysez un problème, il faut absolument choisir un repère et s'y tenir. Et la deuxième chose, les formules que vous obtenez dépendent du repère choisi. Elles n'ont donc en elles-mêmes aucune valeur. Elles n'ont une valeur qu'avec le repère choisi. Ce choix et le fait que vous liiez le résultat au choix que vous avez fait pour définir votre problème, c'est quelque chose qui vous suivra dans toute votre vie d'ingénieur.

Notes

Summary

8m 48s

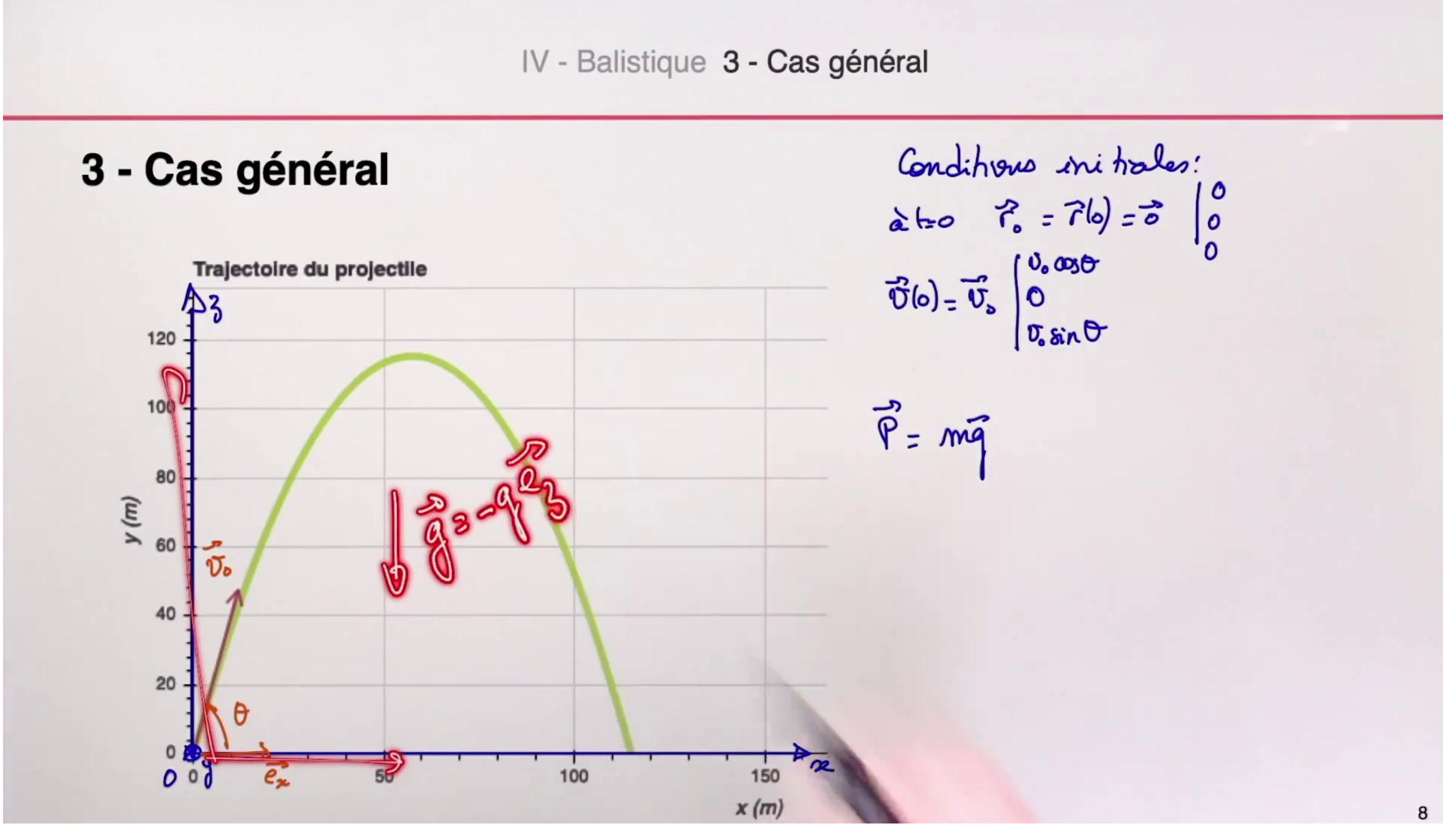


Nous allons maintenant nous intéresser à un cas un peu plus général. Nous allons choisir non seulement la norme du vecteur vitesse initiale, mais en plus, nous n'allons plus forcément lancer l'objet verticalement, mais nous allons lui communiquer une vitesse initiale qui fait un angle avec l'horizontale. Je vais appeler cet angle Θ. Je peux ici choisir de le lancer plus ou moins verticalement, et je peux choisir la norme du vecteur vitesse initiale. Le but va être d'analyser la vitesse et la position de l'objet en fonction du temps dans cette configuration. Plus tard, nous verrons quelle est la forme de la trajectoire obtenue.

Notes

Summary

9m 53s

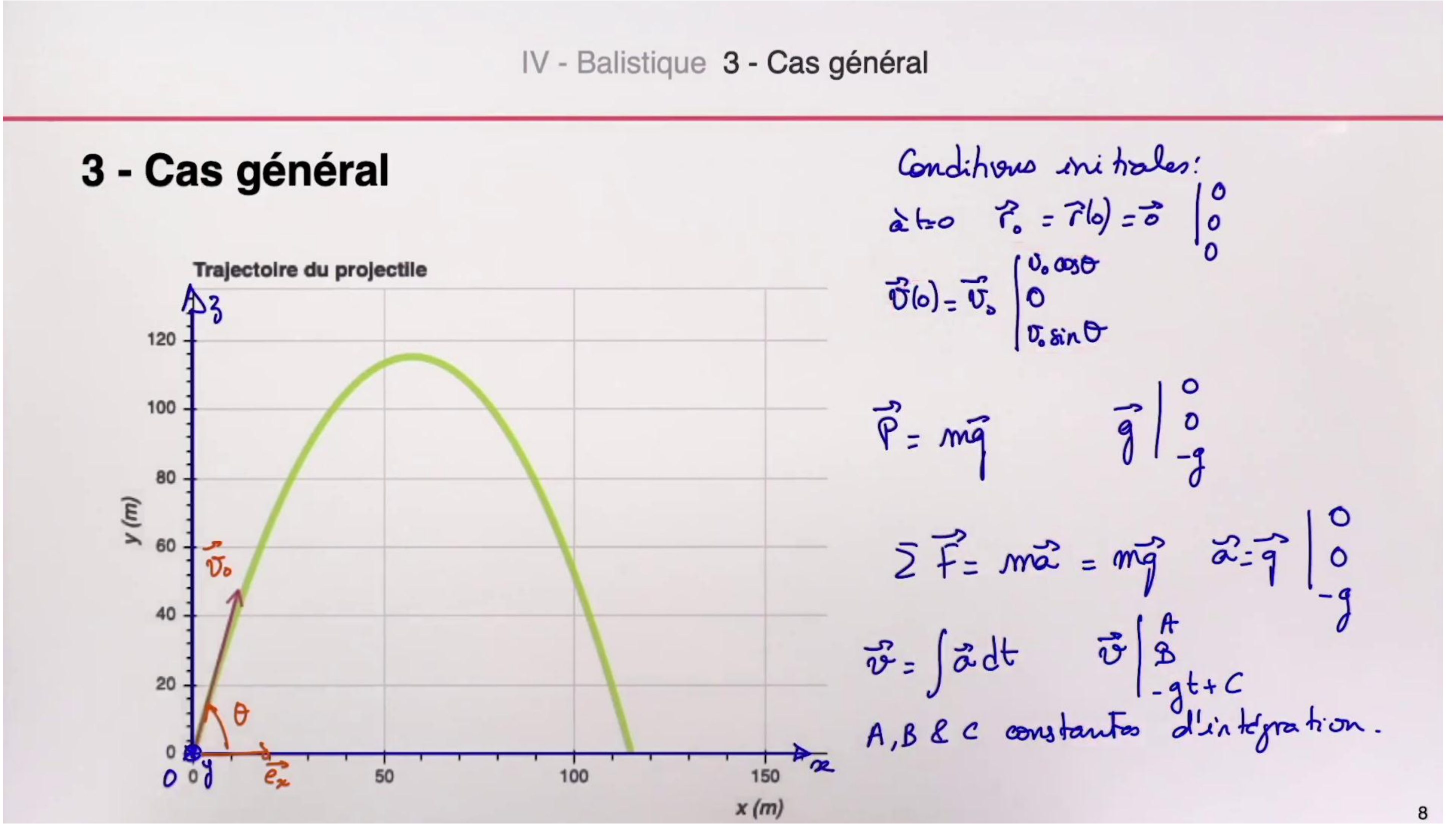


Nous allons toujours considérer que nous lançons l'objet depuis l'origine. Je vais cette fois choisir un axe Oz vertical vers le haut. Je vais choisir l'axe horizontal Ox de telle manière que le vecteur vitesse initial soit dans le plan (O, x, z). Une fois Ox et Oz choisis, forcément, Oy est fixé pour avoir un repère direct. J'appelle V_0 le vecteur vitesse initial et Θ l'angle que fait V_0 avec ex. J'ai donc les conditions initiales suivantes. À t égale 0, r0 égale r(0) vaut 0. Cela signifie qu'il a comme coordonnée (0, 0, 0). En d'autres termes, à t égale 0, je pars de l'origine. Toujours à t égale 0, la vitesse initiale V(0) qui vaut V_0 et dans le plan (O, x, z), sa composante sur y vaut 0. Puisqu'elle fait un angle Θ avec l'horizontale et qu'elle a une norme V_0, ses composantes sur ex et ez sont respectivement V_0 cosΘ et V_0 sinΘ. Ici, Θ est un angle fixe qui est un des paramètres du problème. De plus, l'objet est soumis à son poids uniquement P égale mg. Avec le repère que j'ai choisi, g est un vecteur dirigé vers le bas, donc il est selon −ez, il va être égal à −gez.

Notes

Summary

10m 37s

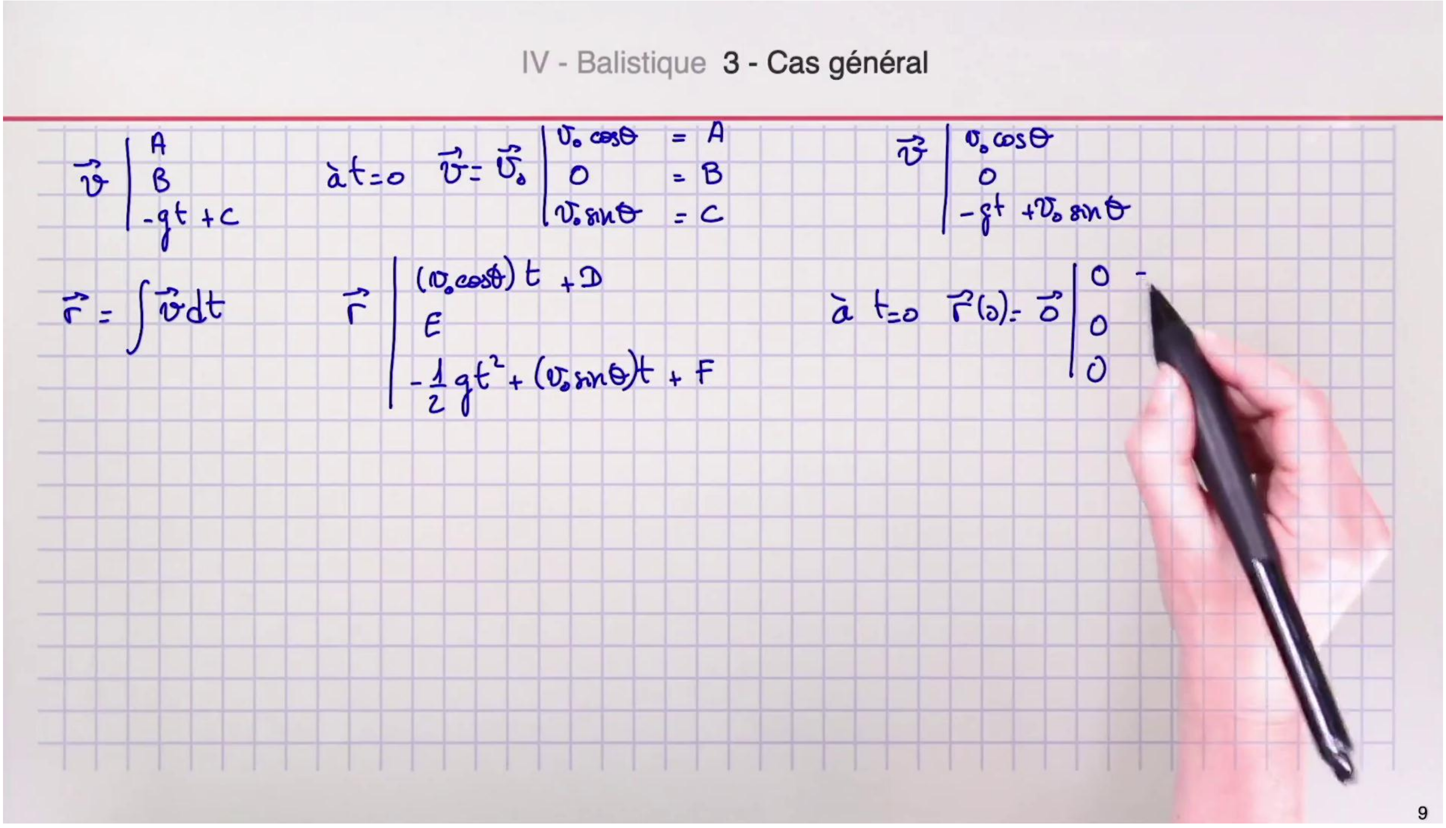


En d'autres termes, les composantes du vecteur g sont 0, 0, −g. À nouveau, la seconde loi de Newton, somme des forces égale ma me donne ceci égale mg, donc a égale g et l'accélération a comme composante 0, 0, −g. Pour obtenir la vitesse, je vais devoir intégrer l'accélération. Cette intégration va se faire composante par composante comme la dérivation. L'expression de ma vitesse sera donc la primitive de 0. C'est une constante, et là, je vais en avoir plusieurs des constantes. Donc je vais l'appeler A, ma première constante. Ensuite, encore une fois, la primitive de 0, également une constante, mais aucune raison qu'elle soit la même que grand A, donc je vais l'appeler B. Pour finir, la primitive de −g qui sera moins gt plus une constante que je vais appeler C. A, B et C sont les constantes d'intégration. Je les obtiens en écrivant qu'à t égale 0, j'ai V égale V_0.

Notes

Summary

12m 25s

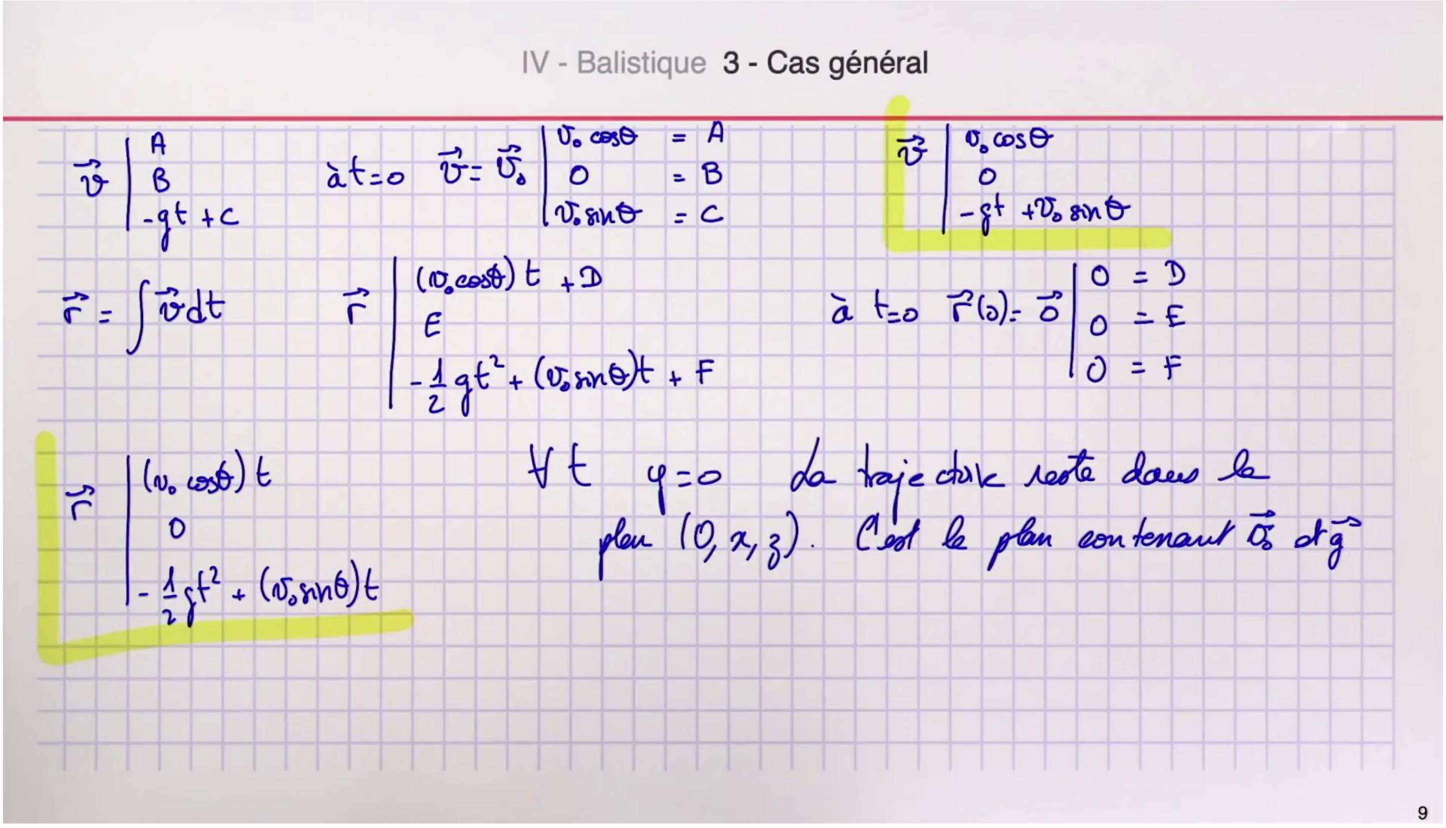


J'ai donc obtenu la vitesse V qui a comme composante A, B et −gt + C. Par ailleurs, j'avais à t égale 0, V qui est égal à V_0 de composante V_0 cosΘ, 0 et V_0 sinΘ. En utilisant cette expression-là, je vois qu'à t égale 0, j'ai A, B pour la composante sur z et -gt valeur 0, il me reste C. Cela me donne donc l'expression de B qui vaut zéro de C égale V_0 sinΘ et de A égale V_0 cosΘ. J'ai donc fini le travail pour V. J'ai les composantes du vecteur vitesse V_0 cosΘ, 0 et -gt + V_0 sinΘ. Pour obtenir le vecteur position, je vais devoir chercher la primitive du vecteur vitesse. À nouveau, je vais intégrer composante par composante. Je vais donc chercher la primitive de V_0 cosΘ, qui est une constante. Sa primitive est (V_0 cosΘ)t plus une constante d'intégration, encore une différente. Cette fois, je continue avec la lettre D. La primitive de 0 est une constante que j'appelle E, et la primitive de -gt + V_0 sinΘ, -gt va donner -½gt² + (V_0 sinΘ)t plus une dernière constante d'intégration F. À t égale 0, r(0) vaut 0, de composantes 0, 0, 0. Si je mets t égale 0 là-dedans, ce terme-là disparaît, ce terme-là disparaît, celui-ci aussi. Il me reste D, E, F. Donc D, E et F sont chacun égal à 0.

Notes

Summary

13m 41s

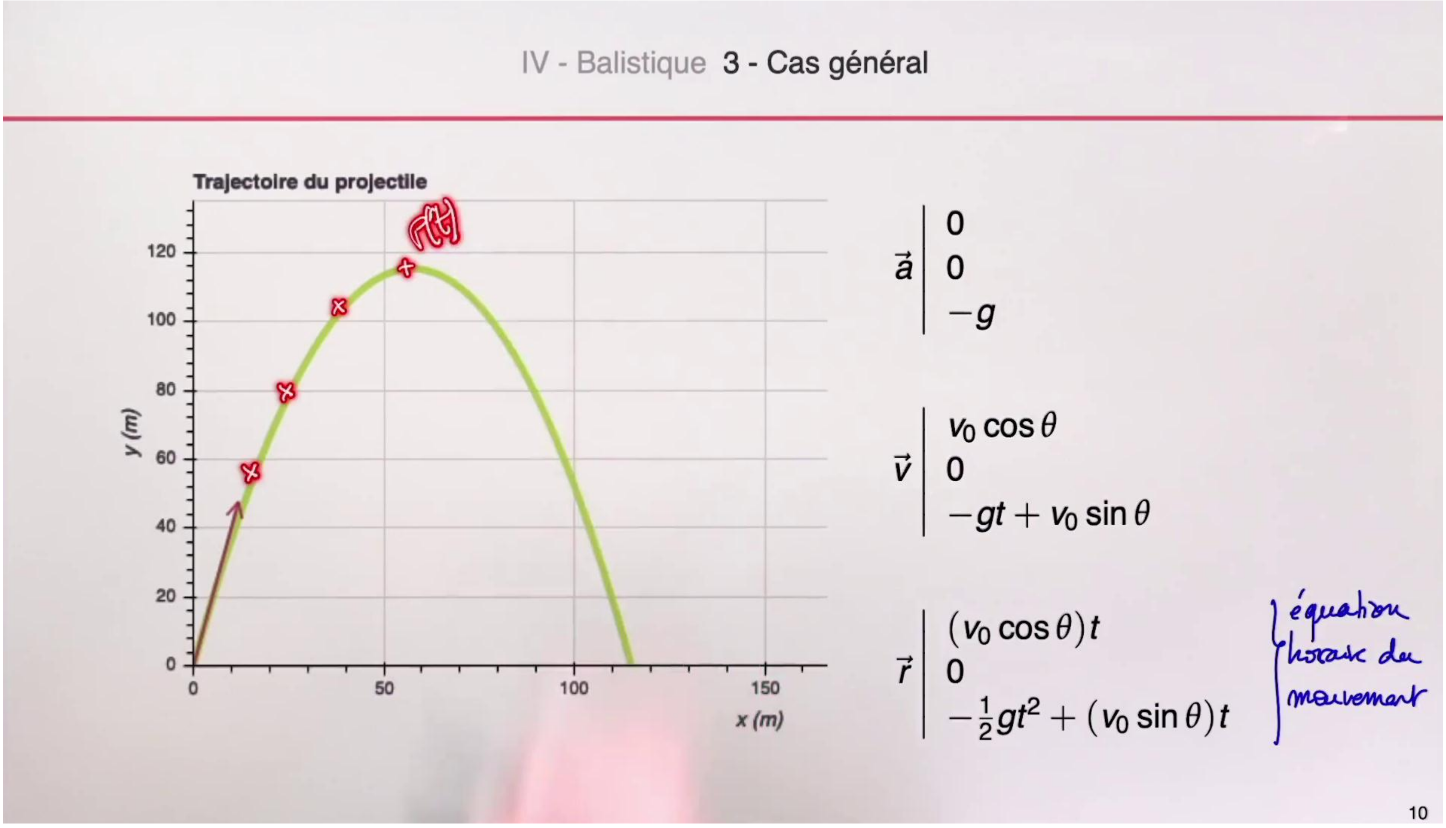


Cela vient de ce que je pars de l'origine. Au final, je trouve mon vecteur position (V_0 cosΘ)t, 0 et -½gt² + (V_0 sinΘ)t + 0. J'ai donc obtenu l'expression de mon vecteur position et de mon vecteur vitesse. C'était ce que je cherchais. On remarque au passage que quel que soit le temps t, la composante y reste nulle. Donc la trajectoire reste dans le plan (O, x, z). C'est le plan qui contient V_0 et g.

Notes

Summary

15m 52s

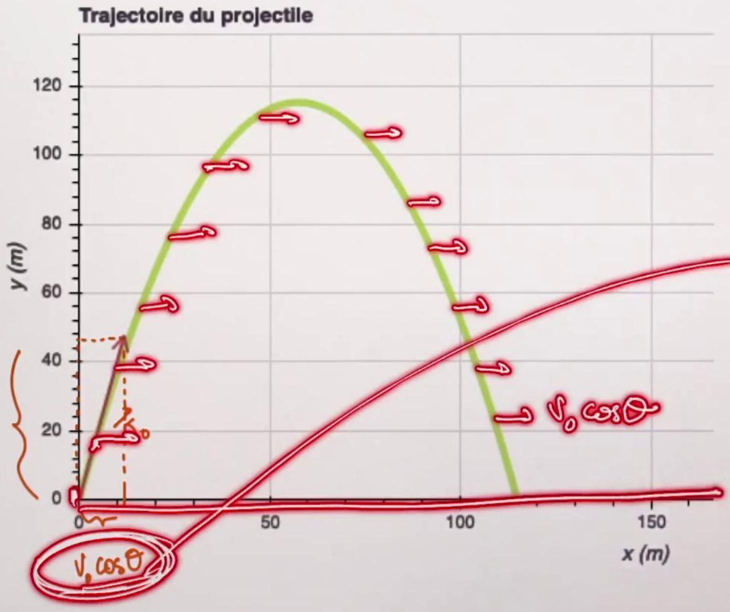


En résumé, grâce à l'accélération et aux conditions initiales V_0 et la position à t égale 0, j'ai exprimé la vitesse en fonction du temps et la position en fonction du temps. Cette position en fonction du temps est ce qu'on appelle l'équation horaire du mouvement. Cela me permet, pour chaque instant t de connaître la position du point P sur la trajectoire, P(t).

Notes

Summary

16m 39s



$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array} \right.$$

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{array} \right.$$

$$\vec{r} \left| \begin{array}{l} (v_0 \cos\theta)t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t \end{array} \right.$$

équation horaire du mouvement

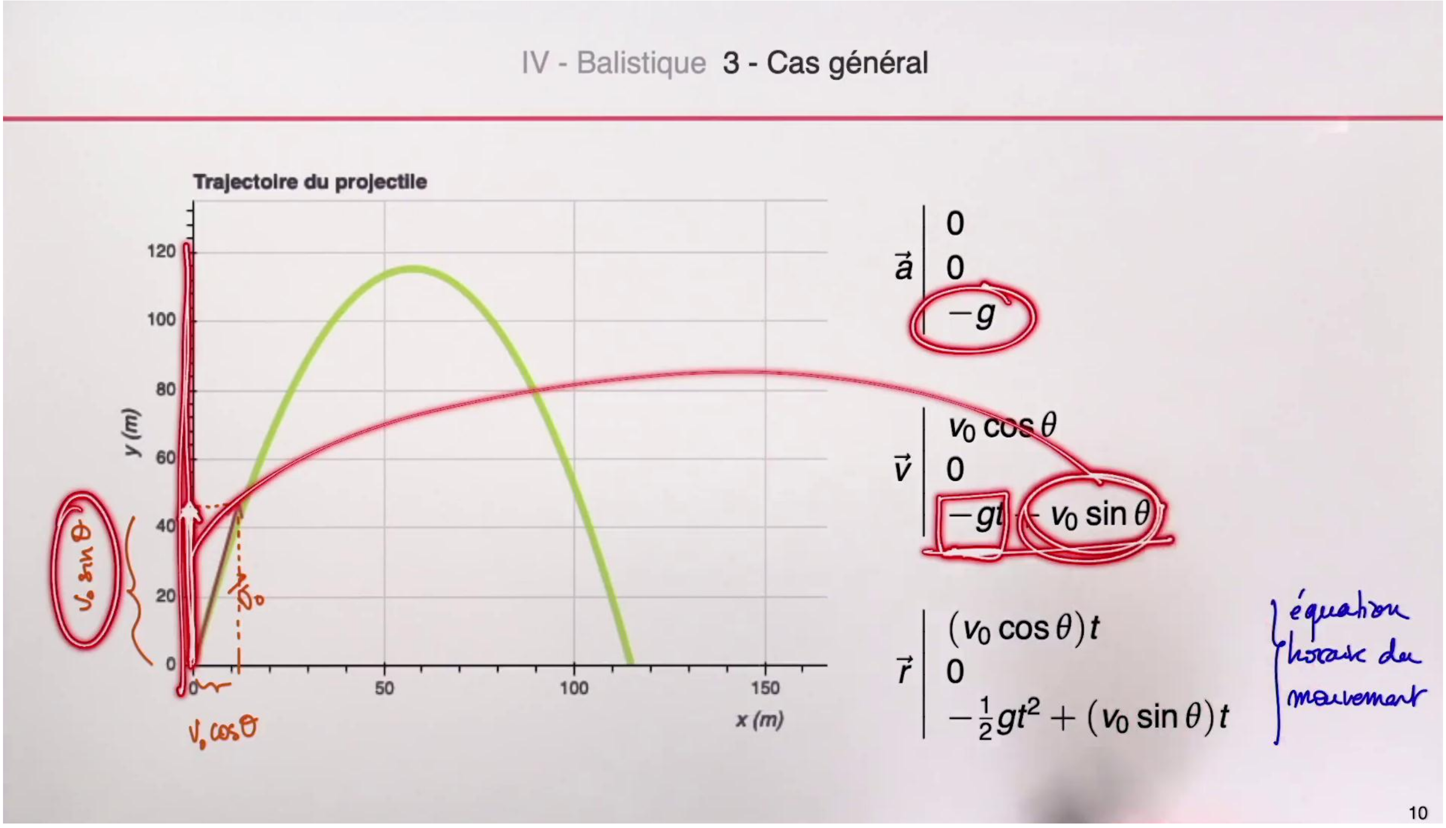
10

Nous utiliserons cette équation horaire pour obtenir la forme mathématique de la trajectoire. Si on essaye d'analyser la forme de ce vecteur vitesse en fonction du temps, on remarque ici qu'on a V_0 cosΘ et V_0 sinΘ. Essayons de les retrouver sur ce schéma. À t égale 0, nous avions le vecteur vitesse V_0. Sa composante sur ex vaut V_0 cosΘ. Sa composante sur ez vaut V_0 sinΘ. Donc, horizontalement, on communique initialement à l'objet une certaine vitesse V_0 cosΘ, et on voit que c'est cette vitesse qui se retrouve dans l'expression de V(t). Cela signifie qu'en tout temps, et quelle que soit la position de l'objet sur sa trajectoire, sa vitesse horizontale sera constante et toujours égale à V_0 cosΘ. Horizontalement, l'objet a un mouvement rectiligne uniforme.

Notes

Summary

17m 09s

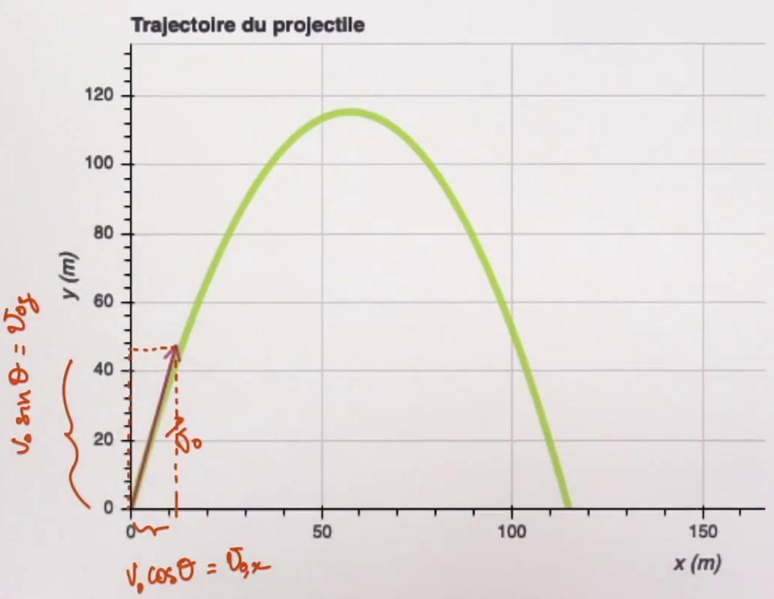


Par contre, verticalement, on lui communique une vitesse initiale V_0 sinϴ. On la retrouve en partie dans la composante sur z de V, mais il reste ce morceau en plus. Donc, sur z, l'objet a un mouvement uniformément accéléré. L'accélération est constante. On retrouve le même genre de vitesse que pour le g vertical, mais en rajoutant ici la composante verticale de la vitesse initiale.

Notes

Summary

18m 21s



$$\vec{a}\ \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array}\right.$$

$$\vec{v}\ \left|\begin{array}{l} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{array}\right.$$

$$\vec{r}\ \left|\begin{array}{l} (v_0 \cos\theta)t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t \end{array}\right.$$

équation horaire du mouvement

Donc, d'une certaine façon, j'ai la combinaison d'un mouvement vertical uniformément accéléré et d'un mouvement horizontal uniforme. On appelle parfois cette composante initiale sur x, V_0x, et la composante initiale sur z, V_0z. Il nous restera à voir après l'équation de la trajectoire et ce qu'on peut obtenir à partir de cette équation horaire.

Notes

Summary

18m 59s

Voilà, à partir d'un modèle de force, nous avons supposé que la seule force ressentie par l'objet est le poids dans un auditoire. Nous avons pu remonter à l'accélération, la vitesse et la position en fonction du temps. J'insiste bien. Ce qui est important, c'est la démarche, pas les formules obtenues, car ces formules dépendent principalement du repère- Non, on va dire ça. J'insiste, ce qui est important, c'est la démarche, pas les formules obtenues, car ces formules dépendent du choix que vous avez fait pour le repère.

Notes

Summary

19m 25s