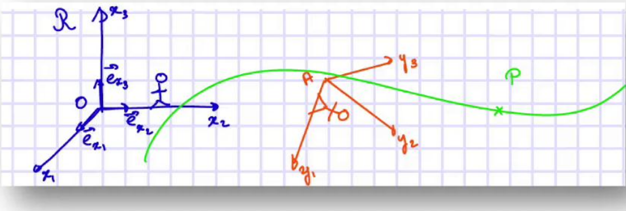
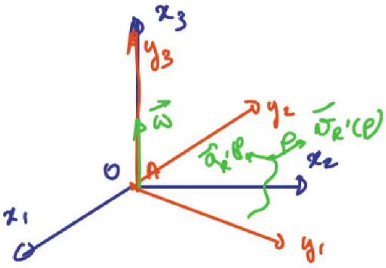
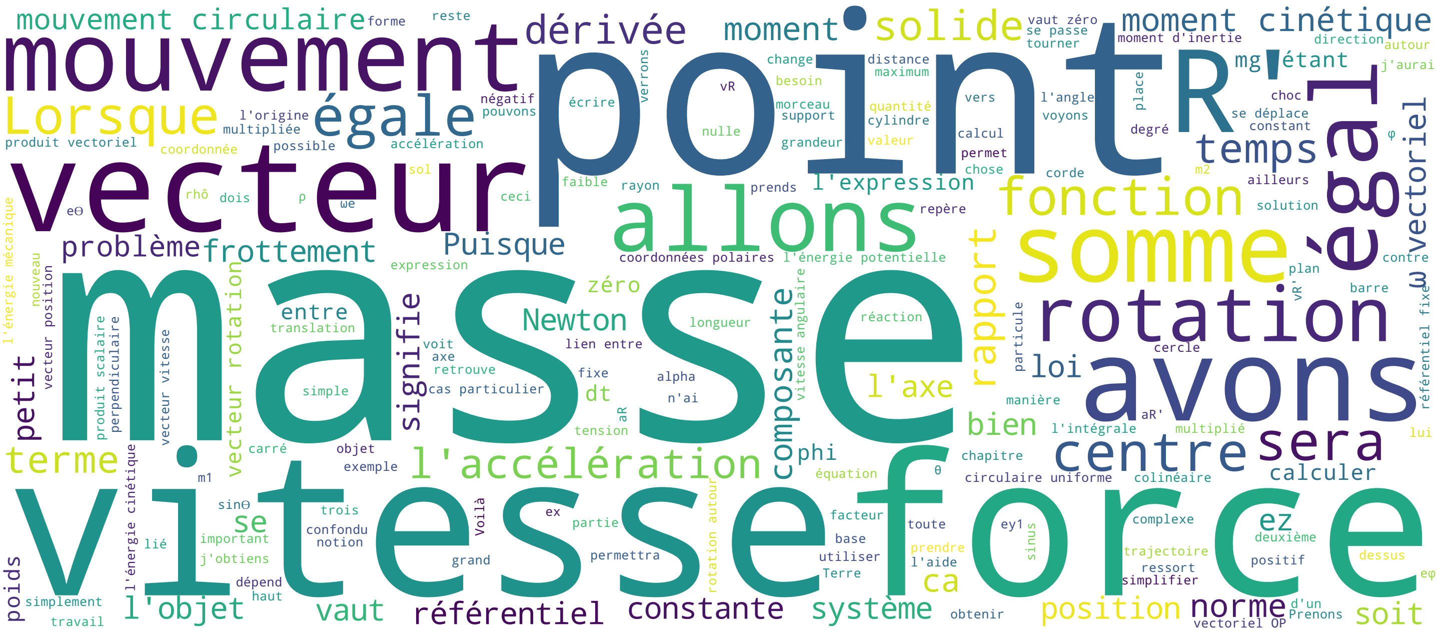
Physique générale : mécanique





Analyse

Prof. Cécile Hébert



Video

II. Référentiel accélérés

Plan du cours

2

Voilà. Dans la vidéo précédente, nous avons dérivé le lien entre l'accélération dans un référentiel fixe et l'accélération dans un référentiel qui est lui même accéléré, à la fois avec une translation et une rotation dans le référentiel fixe. Nous sommes arrivés à une expression générale qui fonctionne dans tous les cas de figure. Les cas particuliers que nous rencontrerons sont souvent une simplification de ces cas généraux. Nous allons maintenant voir trois cas particuliers et comprendre avec cela, ce que signifient les différents termes.

Notes

Summary

0m 05s

Table des matières

3

Nous sommes dans le chapitre 2 sur les référentiels accélérés, et nous allons voir l'analyse de l'expression et des cas particuliers.

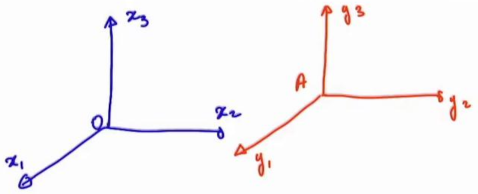
Notes

Summary

0m 45s

3. Analyse et cas particuliers

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$



A a un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$

pas de rotation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$

$\vec{v}_R(A) = \vec{cte}$ $\quad \vec{a}_R(A) = \vec{0}$ $\quad \vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\cancel{\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}}}_{\vec{0}}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{AP}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP})}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}}$$

9

Prenons le cas particulier le plus simple possible. Nous avons R' qui a un mouvement de translation uniforme dans R. Nous avons donc un référentiel R fixe d'origine O avec trois axes : x1, x2 x3 Dans ce référentiel fixe, j'ai un référentiel en mouvement R' d'origine A, lui aussi muni de trois axes : y1, y2, y3 R' a un mouvement de translation uniforme dans R signifie que A se déplace dans un mouvement rectiligne uniforme dans R. Je n'ai pas de rotation des axes de R' par rapport aux axes de R. Donc, Ay1 reste toujours parallèle à Ox1, Ay2 à O(x2) et Ay3 à Ox3. Si je me réfère aux expressions que nous aurons dériver pour le lien entre VR(P) et VR'(P), aR(P) et aR'(P), je peux transcrire mathématiquement ces deux contraintes. La première contrainte signifie que vR(A) est une constante et donc que aR(A) vaut 0. La deuxième contrainte s'exprime mathématiquement en disant que le vecteur rotation est nul. L'effet de ω égal zéro me fera disparaître un grand nombre de terme. Le fait d'avoir aR(A) égale 0 se retrouvera dans l'accélération. Ce terme aR(A) disparaitra lui aussi.

Notes

Summary

0m 55s

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \qquad (1)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$$

(1) Composition des vitesses dans un mouvement de translation

↳ Chapitre 3 = lois de Newton lien entre force et accélération

elles s'exprimeront de la même manière dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

$\mathcal{R}'$ sera aussi un référentiel galiléen.

10

Nous avons donc une simplification considérable du lien entre vR(P) et vR'(P), aR(P) et aR'(P) Cela signifie donc que pour R' ayant un mouvement de translation uniforme dans R, l'expression vR(P) est tout simplement la somme de la vitesse dans R' de mon objet, plus la vitesse dans R de l'origine de R'. Cette expression que je peux numéroter 1, est la composition des vitesses telle que nous la connaissons dans un mouvement de translation. Si je regarde l'expression liant les accélérations, je vois que l'accélération dans R et dans R' de mon objet considéré est la même. Nous verrons dans le chapitre 3 les lois de Newton. Ces lois de Newton vont nous permettre d'établir un lien entre force et accélération. Puisque les deux accélérations sont identiques dans le référentiel immobile et dans le référentiel en translation rectiligne uniforme, ces lois de Newton s'exprimeront de la même manière dans le référentiel R et dans le référentiel R'. C'est ce qui nous permettra de dire que nous pouvons appliquer les lois de Newton soit dans un référentiel fixe, soit dans un référentiel R' en translation uniforme dans un référentiel fixe. R' sera aussi un référentiel galiléen. Voyons maintenant un cas particulier un peu plus complexe.

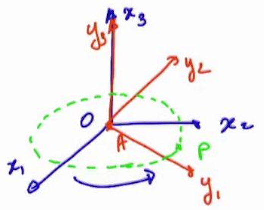
Notes

Summary

3m 18s

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$



Ox_3 = axe de rotation

Rotation de (Ay_1) et (Ay_2)

P fixe dans R' ⇒ décrit un mvt circulaire

$\vec{\omega}$ = cte ↳ et uniforme

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

11

Je considère toujours mon référentiel R fixe. Par contre, R' a un mouvement de rotation dans R. De plus, l'origine de R' est confondue avec l'origine de R. Je vais donc retrouver l'origine de R'(A) au même endroit que O, par contre, R' sera en rotation dans R. Je vais choisir l'axe de rotation comme étant l'axe Ox3. Cela signifie que l'axe Ay3 restera confondu avec Ox3; par contre, les axes Ay1 et y2 vont tourner. Par ailleurs, je prends le cas où le point P est fixe dans R'. Je vais donc fixer la position de P, et il ne bougera pas par rapport aux axes y1 et y2. Cela signifie que dans le mouvement général de rotation des axes y1 et y2, P sera entraîné dans cette rotation. P va donc décrire un mouvement circulaire. Et pour finir, j'ai choisi un mouvement de rotation uniforme. Cela signifie que le vecteur rotation ω restera constant, et par conséquent, le mouvement circulaire sera un mouvement circulaire uniforme. Voyons maintenant ce que toutes ces contraintes impliquent sur les formules générales dérivées précédemment. Nous allons commencer par nous intéresser à la contrainte P fixe dans R'. P fixe dans R' signifie que la vitesse dans R' de P vaut zéro. Ce terme disparaîtra donc.

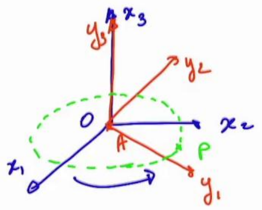
Notes

Summary

5m 13s

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$



Ox_3 = axe de rotation

Rotation de $(A y_1)$ et $(A y_2)$

P fixe dans R' ⇒ décrit un mvt circulaire

↳ et uniforme

$\vec{\omega} =$ cte

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + \underbrace{\cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}}$$

11

L'accélération dans R' de P vaudra aussi zéro, si sa vitesse est nulle, son accélération est nulle, et le dernier terme de l'accélération comprend aussi la vitesse dans R' qui vaut zéro; donc, ce terme-là disparaîtra également. Nous avons donc l'annulation de trois termes liés exclusivement au fait que P est fixe dans R'. Nous avons ensuite la contrainte ω égale constante. Si ω égale constante, la dérivée de ω vaut zéro. Ce terme-là sera donc nul, ω point vectoriel AP disparaîtra également. C'est lié à ω et la constante. La dernière contrainte est de dire que A est confondu avec O. Si A est confondu avec O, A reste toujours en O. La vR(A) vaut zéro. aR(A) vaut également toujours zéro. C'est donc lié à A confondu avec O. Pour finir, le fait que A soit confondu avec O me permet de remplacer le point A par le point O dans les deux expressions de produit vectoriel avec ω. J'utiliserai donc OP dans ces deux expressions. À nouveau, nous avons une simplification considérable de vR(P), et aR(P).

Notes

Summary

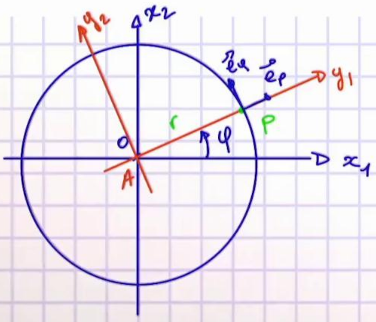
7m 31s

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$
P a donc un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$



$\vec{e}_\rho = \vec{e}_{y_1}$

12

Dans le cas particulier où R' a un mouvement de rotation uniforme dans R avec A confondu avec O et P fixe dans R' nous avons donc le point P qui a un mouvement circulaire uniforme dans R et l'expression vR(P) et aR(P) qui s'exprime simplement à l'aide du vecteur rotation et du vecteur OP. Nous allons maintenant voir le lien entre ces expressions et le fait que nous ayons un mouvement circulaire uniforme. Puisque nous avons une rotation autour de l'axe vertical Ox3, je vais faire un dessin de dessus. Faisons donc un dessin qui représentera la situation de dessus. Je place P sur l'axe Ay1. J'appelle R la distance OP qui est la même que la distance AP. P a un mouvement circulaire uniforme de rayon R. Pour faire le lien entre cette situation et une situation connue, je vais utiliser aussi les coordonnées polaires. Je vais donc utiliser l'angle Φ, le vecteur de base, l'eω et le vecteur de base eΦ. Dans le cas présent, le vecteur de base e des coordonnées polaires est égal au vecteur de base porté par l'axe Ay1, c'est donc ey1. Le vecteur de base eΦ, toujours des coordonnées polaires, est égal au vecteur ey2 porté par l'axe Ay2.

Notes

Summary

9m 13s

Cas particulier 2 :

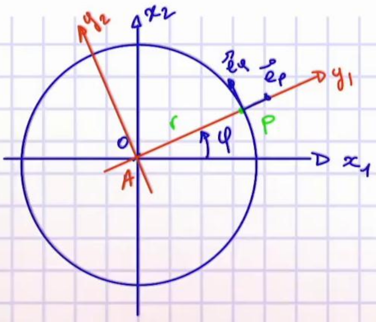
$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$
P a donc un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$\vec{\omega} = \omega \, \vec{e}_{y_3}$

$\overrightarrow{OP} = r \, \vec{e}_{y_1}$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$



$\vec{e}_\rho = \vec{e}_{y_1}$

$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_{y_2}$

$\vec{v}_R(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \vec{e}_{y_3} \wedge r \vec{e}_{y_1} = r\omega \, \vec{e}_{y_2}$

$\vec{v}_R(P) = r\omega \vec{e}_\varphi$

$\vec{a}_R(P) = \omega \vec{e}_{y_3} \wedge r\omega \vec{e}_{y_2} = r\omega^2 (-\vec{e}_{y_1}) = -r\omega^2 \vec{e}_{y_1}$

12

Je vais chercher à calculer ces produits vectoriels et à les lier avec ce que nous avons vu pour le mouvement circulaire uniforme en coordonnées polaires. Dans ce mouvement de rotation, le vecteur ω est porté par l'axe Ay3. Le vecteur rotation ω s'écrira donc : ω qui est la composante de ω ey3. Le vecteur OP qui est égal au vecteur AP est de norme R et porté par ey1. OP s'écrit donc r ey1. Lorsque je calcule vR(P), je trouve ω vectoriel OP, soit, ω ey3 vectoriel r ey1, ey3 vectoriel ey1 est égal à ey2. C'est donc rω ey2. Or, nous venons de dire que ey2 est le même que eΦ. Je retrouve donc aussi vR(P) est égal à rωeΦ C'est bien ce que nous avions trouvé pour un mouvement circulaire en coordonnées polaires. Si nous faisons la même chose avec l'accélération. aR(P) est égale à ω, soit ω ey3, produit vectoriel, avec ω vectoriel OP. Or, ω vectoriel OP n'est rien d'autre que vR(P) que nous avons calculé précédemment, rω ey1. Je peux donc directement remplacer ω vectoriel OP par rω ey2. J'obtiens donc rω² ey3 vectoriel ey2 moins ey1 moins rω² ey1. Nous venons de dire que ey1 est égal à e. Si je reprends les coordonnées polaires, c'est moins rω² e.

Notes

Summary

11m 00s

Cas particulier 2 :

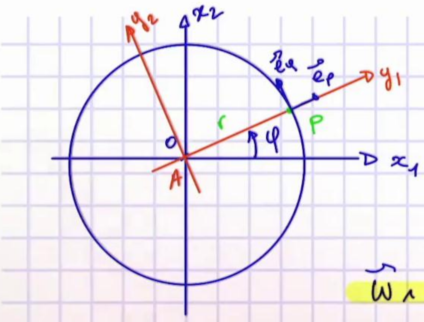
$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$
P a donc un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{y_3}$

$\overrightarrow{OP} = r\, \vec{e}_{y_1}$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$



$\vec{e}_\rho = \vec{e}_{y_1}$

$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_{y_2}$

$\vec{v}_R(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \vec{e}_{y_3} \wedge r\vec{e}_{y_1} = r\omega\, \vec{e}_{y_2}$

$\vec{v}_R(P) = r\omega \vec{e}_\varphi$

$\vec{a}_R(P) = \omega\vec{e}_{y_3} \wedge r\omega\vec{e}_{y_2} = r\omega^2(-\vec{e}_{y_1}) = -r\omega^2\vec{e}_{y_1}$

$= -r\omega^2 \vec{e}_\rho$

$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$ est donc l'accélération centripète !

12

J'ai donc aR(P) colinéaire à e ou moins ey1 qui pointe vers l'intérieur du cercle, ce que j'ai le signe moins, c'est une accélération centripète. Puisque le mouvement est circulaire uniforme, je n'ai pas de composante tangentielle de l'accélération. Je n'ai que l'accélération centripète qui est en rω². Je viens donc de reconnaître que ce terme ω vectoriel - ω vectoriel OP est l'expression de l'accélération centripète. D'une façon générale, dès que j'aurai un mouvement dans lequel A est confondu avec O, j'aurai dans aR(P) un terme ω vectoriel - ω vectoriel OP que je pourrai appeler accélération centripète.

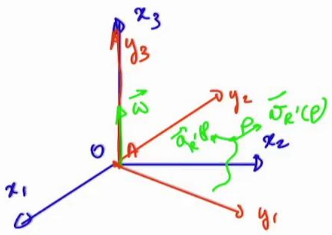
Notes

Summary

13m 34s

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

P a un mouvement quelconque dans R'



$\vec{\omega} = \text{cte}$

$\vec{v}_{R'}(P) \neq \vec{0}$ $\quad\quad$ $\vec{a}_{R'}(P) \neq \vec{0}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \underset{\vec{0}}{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)}} + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \underset{\vec{0}}{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}} + \underset{\vec{0}}{\cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

13

Notre troisième cas particulier sera similaire au deuxième avec R' ayant un mouvement de rotation uniforme dans R et A confondu avec O, mais cette fois, P a un mouvement quelconque. Cela signifie que nous ne pourrons pas annuler la vitesse dans R' de P, ni l'accélération dans R' de P. Pour le reste, je reprends la même notation. R avec A confondu avec O y1, y2 et y3 confondu avec l'axe Ox3. Le vecteur ω est constant, et la rotation se fait autour de l'axe Ox3. Par contre, le point P peut se déplacer dans R' avec une vitesse dans R' et éventuellement, une accélération dans R'. J'ai donc ω égale constante, mais vR'(P) non nul, aR'(P) non nul. Mes expressions précédentes se simplifieront donc un petit peu moins. ω égal constante me permettra toujours de faire disparaître le terme en ω point. A confondu avec O me permettra toujours de faire disparaitre vR(A) et aR(A). De même, A confondu avec O me permettra de remplacer AP par OP. Par contre, je ne peux plus supprimer vR'(P), aR'(P), ni ce terme.

Notes

Summary

14m 36s

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})}_{\text{accélération centripète}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{accélération de Coriolis}}$$

accélération relative

P se déplace dans R'
et R' en rotation dans R

Je vois que cette fois, la vR(P) est la somme de deux termes : un terme correspondant à la vR'(P), c'est une composition des vitesses comme on a l'habitude, le référentiel R' n'ayant pas de mouvement de translation dans R, je n'ai pas la vitesse dans R dehors. Par contre, le mouvement de rotation de R' dans R entraîne le point P et lui communique en plus, une vitesse liée à la rotation. C'est ce ω vectoriel OP. Lorsque nous prenons aR(P), elle est composée de aR'(P). C'est ce que nous appelons l'accélération relative. Ce terme-là n'a pas changé par rapport au cas particulier 2. C'est toujours une accélération centripète. Elle est liée au mouvement de rotation de R' dans R. Mais nous voyons apparaître un troisième terme. Celui-ci a une forme particulière. Il est lié à la rotation de R' dans R, mais aussi à la vitesse relative de P dans R'. Si P est immobile dans R', ce terme disparaît, dès que P se déplace dans R', ce terme réapparaît. Ce terme est ce que nous appelons l'accélération de Coriolis. Elle n'apparaît que si P se déplace dans R', si R' est en rotation dans R, et il faut encore que la vitesse de déplacement ne soit pas colinéaire au vecteur rotation. Nous verrons l'effet de ce terme lorsque nous verrons les lois de Newton dans un référentiel accéléré.

Notes

Summary

16m 24s

Nomenclature dans le cas général

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{Accélération de Coriolis}}$$

P est entraîné par l'accélération de R' dans R.

15

En résumé, si je prends maintenant la nomenclature dans un cas général. Pour le lien entre aR(P) et aR'(P), aR(P) s'obtient par la somme de aR'(P) et d'un certain nombre de termes. Les trois premiers termes sont appelés « ensemble accélération d'entraînement ». Cette accélération d'entraînement est liée au fait que l'endroit où se trouve P dans R' est lui-même accéléré dans R. P est à un endroit donné de R'. R' est accéléré dans R et P est entraîné par l'accélération de R' dans R. Ce deuxième terme est, comme nous l'avons dit, l'accélération de Coriolis. On appelle souvent l'accélération dans R' « accélération relative ». Par ailleurs, si A est confondu avec O, ce terme disparaît et ce terme devient l'accélération centripète.

Notes

Summary

18m 19s

Voilà, nous venons de voir trois cas particuliers, ce qui nous a permis de comprendre un petit peu ce que signifient certains termes. D'une façon générale, dans les exercices, il faudra partir de l'expression la plus générale et la simplifier en fonction des conditions particulières du problème étudié.

Notes

Summary

19m 35s