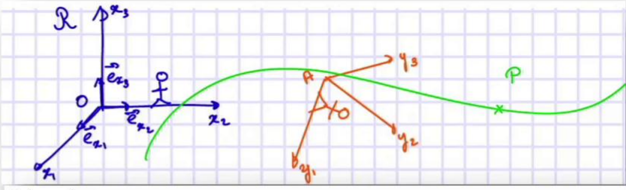
Physique générale : mécanique



Résumé :

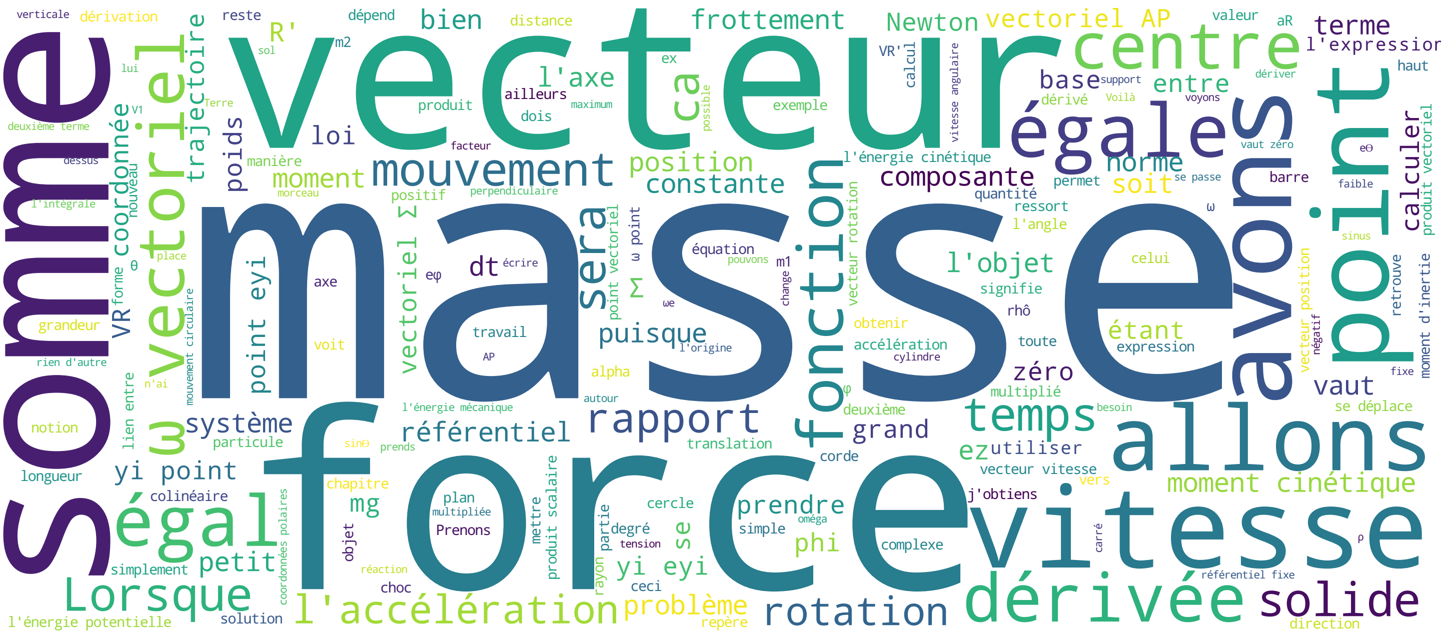
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Dérivation

Prof. Cécile Hébert



Video

Il est parfois important de se placer dans un référentiel non galiléen. C'est le référentiel adapté à la description du problème. Malheureusement, on ne peut pas appliquer les lois de Newton directement dans ce référentiel. Nous allons donc devoir faire le lien entre position, vitesse et accélération dans un référentiel fixe et dans un référentiel non galiléen en mouvement dans ce référentiel fixe. Il y a deux approches possibles. La première consiste à essayer intuitivement de rajouter petit à petit les termes qui vont être importants lorsqu'on a un référentiel qui se déplace, qui est accéléré dans un référentiel fixe. Il y a la deuxième approche qui est celle utilisée dans cette vidéo, qui est de prendre directement le cas le plus général d'un mouvement totalement quelconque du référentiel non galiléen, et de faire une dérivation académique et propre de l'ensemble du problème. Cette approche a l'inconvénient d'être un petit peu plus mathématique et un petit peu plus complexe, mais elle a l'énorme avantage de nous garantir de ne rater aucun terme, nous savons exactement ce que nous faisons. C'est quelque chose d'important dans la vie de l'ingénieur et c'est pour cela que j'ai choisi cette approche.

Notes

Summary

0m 05s

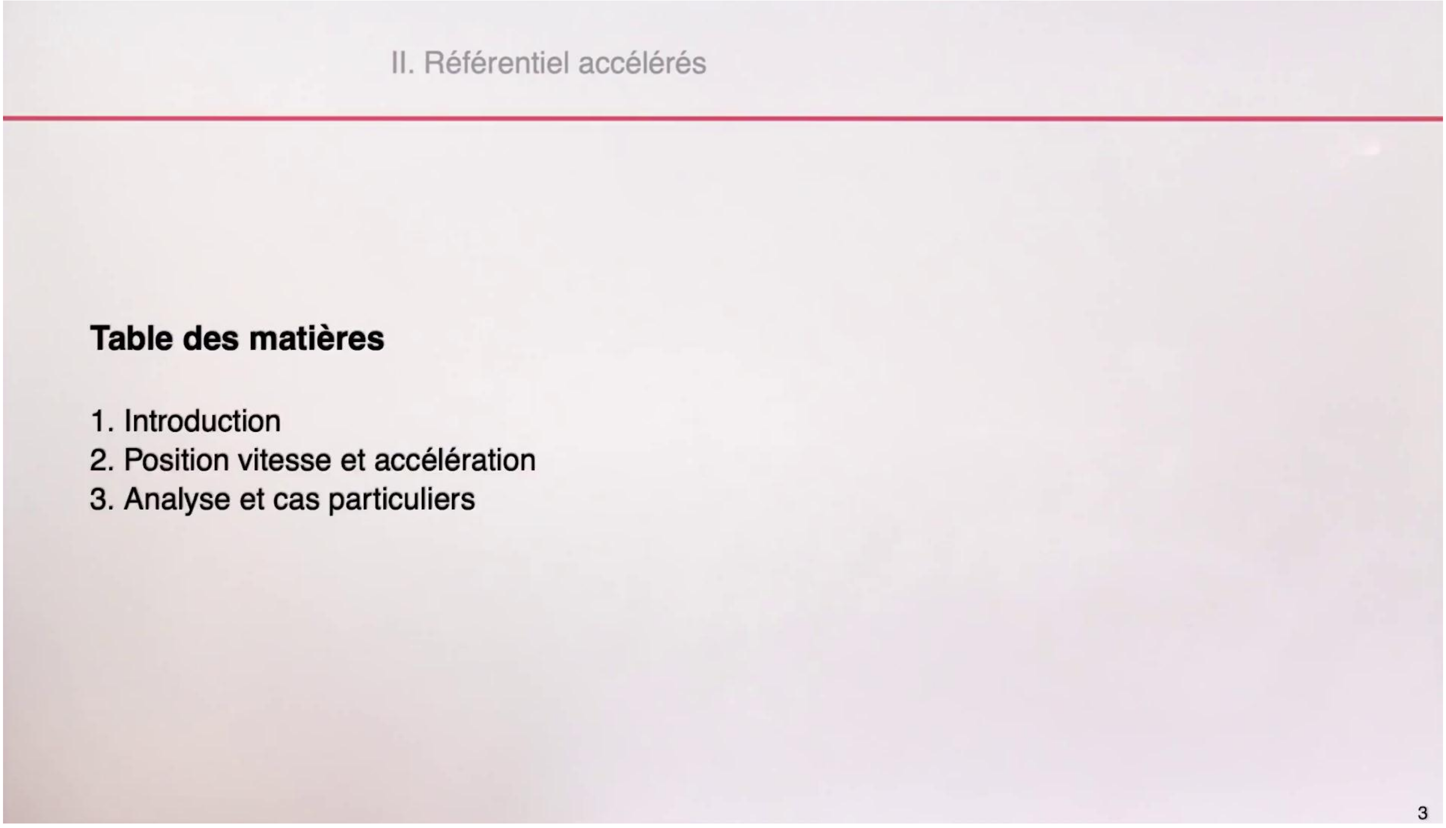
Plan du cours

2

Notes

Summary

1m 24s

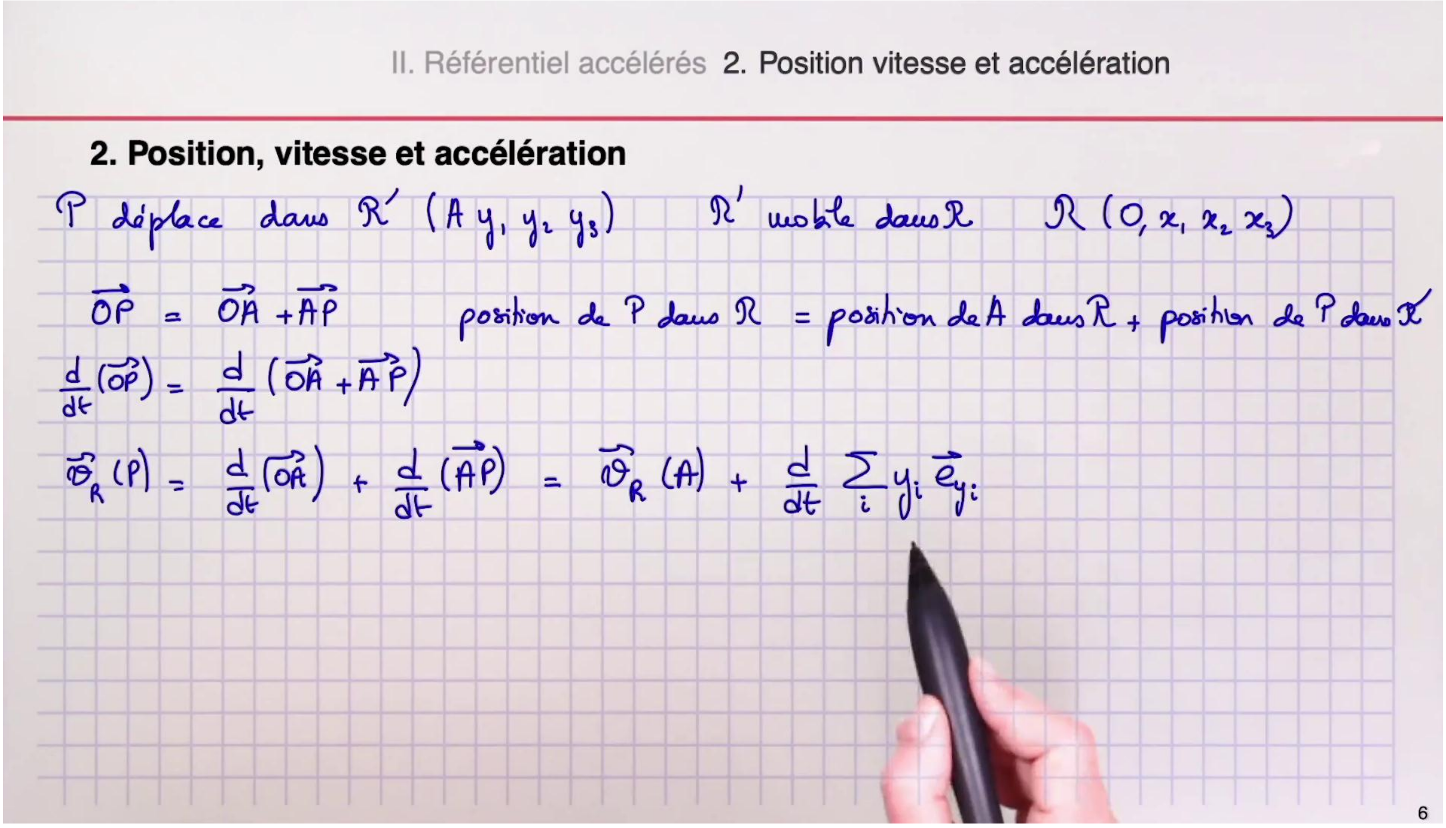


Nous sommes dans le chapitre II sur les référentiels accélérés et nous allons voir le lien entre position, vitesse et accélération dans le référentiel fixe et dans le référentiel accéléré.

Notes

Summary

1m 25s

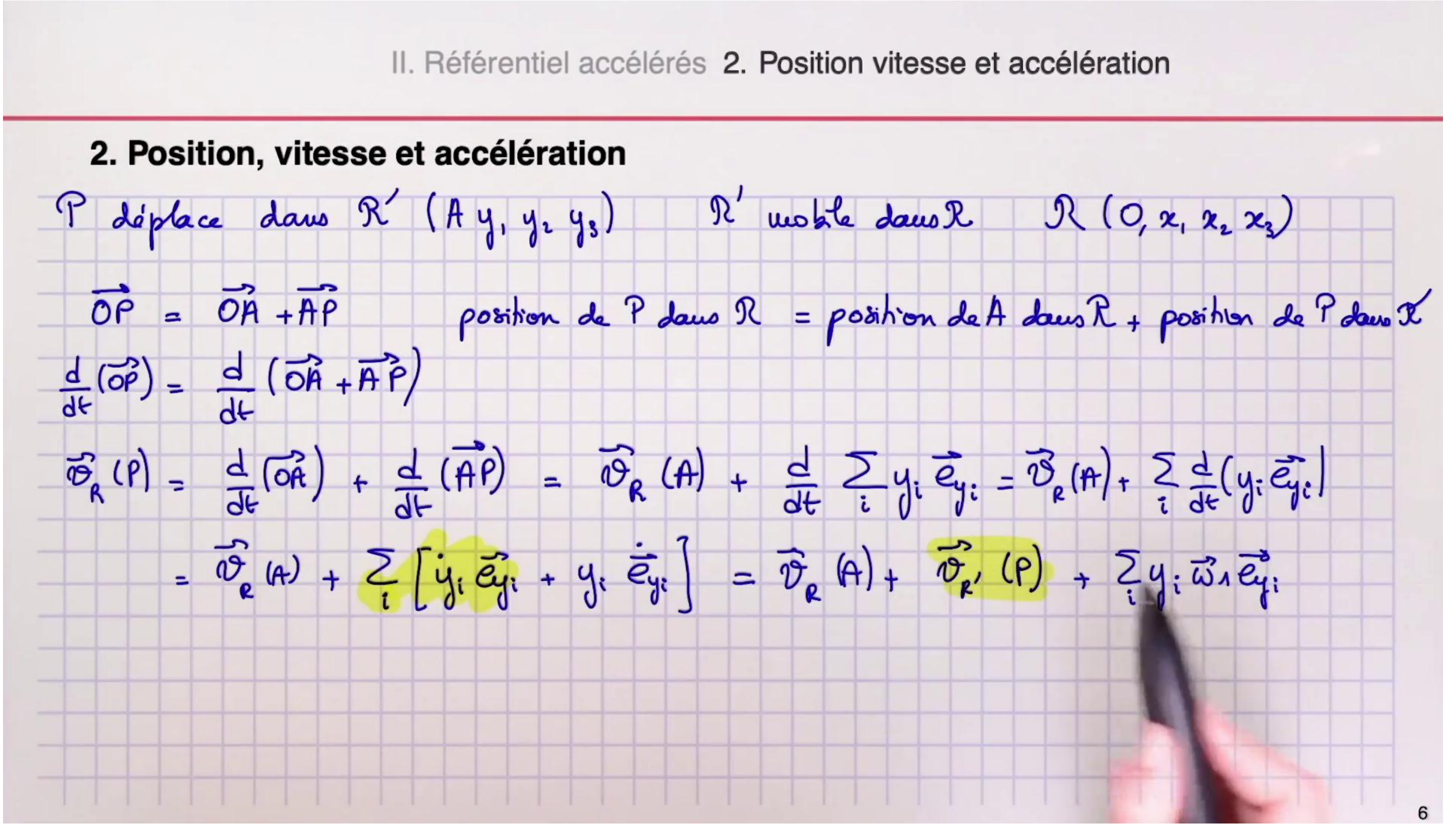


Nous avons donc un point P qui se déplace dans R'. R' est muni du repère (A, y1, y2, y3). R' est mobile dans R et R est muni du repère (O, x1, x2, x3). La position de P dans R et le vecteur OP. Le vecteur OP se décompose en OA plus AP. AP est la position de P dans R'. La position de P dans R est donc égale à la position de A dans R plus la position de P dans R'. Pour passer du vecteur position au vecteur vitesse. Nous allons devoir dériver. Nous allons dériver cette égalité. Si ce vecteur est égale à cette somme de vecteurs. La d/dt (OP) sera égale à la d/dt (OA plus AP). La d/dt (OP) est la VR(P). C'est égale à d/dt (OA), je distribue la dérivation, plus d/dt (AP). D/dt (OA) n'est rien d'autre que la VR(A). Pour obtenir d/dt (AP), je vais devoir exprimer AP. J'ai donc la VR(A) plus d/dt et AP s'exprime comme la Σ/i yi eyi. C'est la position de P dans R'. Mais ici dans R, j'ai à la fois les yi qui changent et les eyi qui changent. J'ai donc la dérivée d'une somme de produit. Je vais pouvoir passer la dérivation à l'intérieur de la somme et nous allons nous retrouver avec une somme de dérivés de produits. Pour dériver un produit, je vais avoir dérivé de ça multiplié par ça plus ça multiplié par la dérivé du deuxième.

Notes

Summary

1m 39s



Allons-y en détaillant quand même un peu les étapes. Nous avons donc VR(A) plus la Σ/i d/dt (yi, eyi). C'est donc toujours VR(A) plus la Σ/i dérivé de mon produit, cela devient [yi point eyi plus yi eyi point]. On remarquera que lorsque je dérive un seul élément, je peux utiliser la notation point. Par contre, lorsque je dérive une somme, ça n'est pas une bonne idée. En effet, si vous essayez d'utiliser la notation point avec cet élément-là, vous risquez de mettre le point au-dessus, mais finalement, on ne sait pas à quoi elle s'applique. Est-ce que c'est à tout ? Est-ce que c'est uniquement au premier morceau, au deuxième morceau ? Est-ce que c'est à toute la somme ? C'est pour cela que là, j'utilise encore d/dt mais dès que j'ai des éléments individuels, je reviens à la notation point. OK. C'est donc VR(A) plus la Σ/i yi point, eyi. Ça, c'est la VR'(P). Ce terme-là correspond donc à celui-ci. Le deuxième morceau, j'ai toujours la Σ/i, c'est la Σ/i (yi, eyi point). Pour calculer la dérivée, je vais utiliser ω vectoriel eyi. Ce deuxième terme correspond donc au deuxième morceau sur lequel la somme s'applique aussi.

Notes

Summary

4m 23s

2. Position, vitesse et accélération

P déplace dans $\mathcal{R}'$ $(A\, y_1\, y_2\, y_3)$ $\mathcal{R}'$ mobile dans $\mathcal{R}$ $\mathcal{R}\,(O, x_1\, x_2\, x_3)$

$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ position de P dans $\mathcal{R}$ = position de A dans $\mathcal{R}$ + position de P dans $\mathcal{R}'$

$$\frac{d}{dt}(\vec{OP}) = \frac{d}{dt}(\vec{OA} + \vec{AP})$$

$$\vec{v}_R(P) = \frac{d}{dt}(\vec{OA}) + \frac{d}{dt}(\vec{AP}) = \vec{v}_R(A) + \frac{d}{dt}\sum_i y_i \vec{e}_{y_i} = \vec{v}_R(A) + \sum_i \frac{d}{dt}(y_i \vec{e}_{y_i})$$

$$= \vec{v}_R(A) + \sum_i \left[\dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + y_i \dot{\vec{e}}_{y_i}\right] = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \sum_i y_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i}$$

$$= \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}$$

$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$$

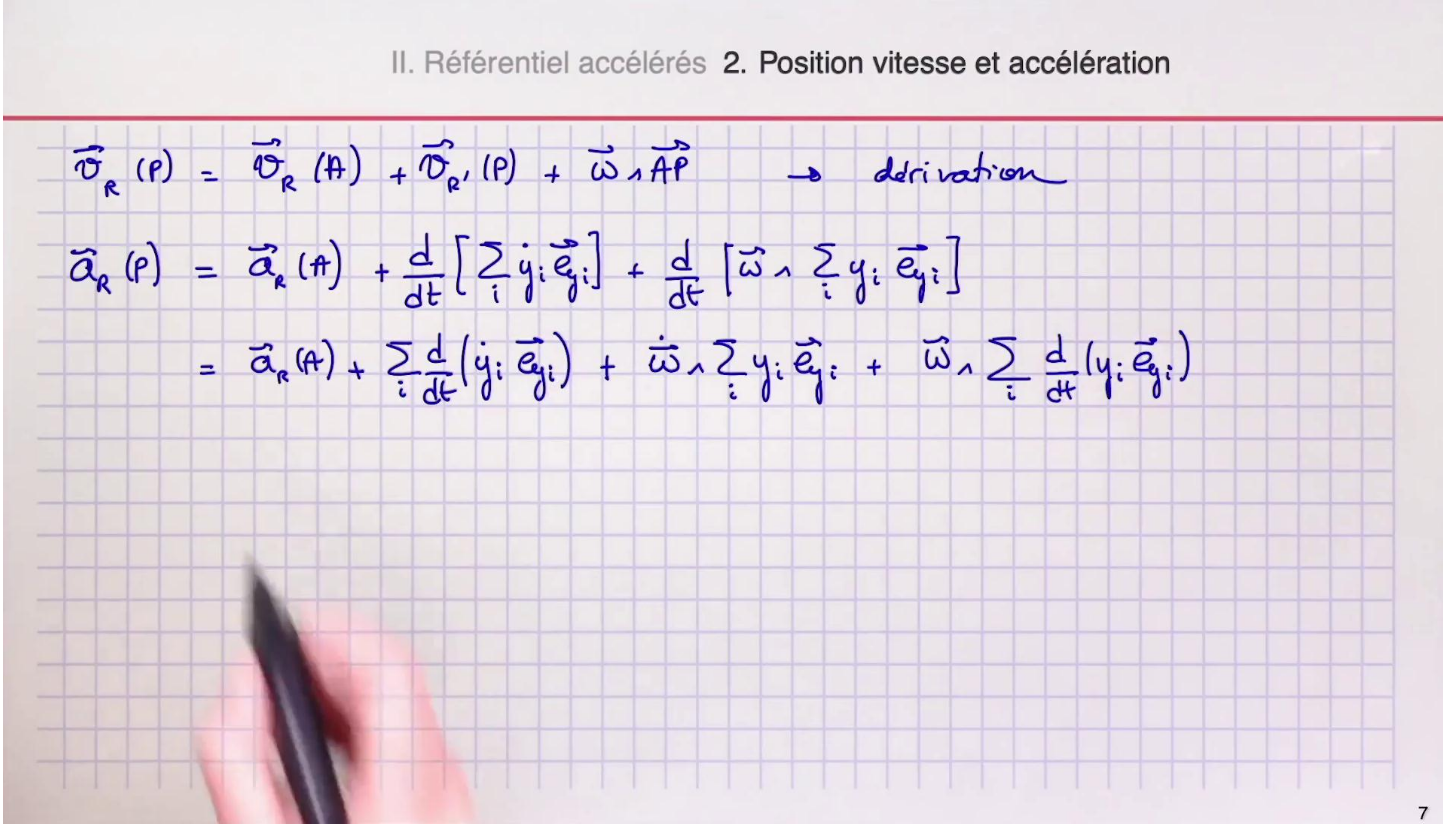
6

Nous avons donc VR(P) égale VR(A) plus VR'(P) plus Σ/i yi ω vectoriel eyi Le vecteur de rotation s'applique de la même manière aux trois vecteurs de base. C'est le même vecteur ω. Puisqu'il est identique, je peux le sortir de la somme. Je peux donc écrire ω vectoriel devant Σ/i yi, eyi. Et là, je retrouve le vecteur AP, donc le vecteur position de P dans R'. J'ai donc exprimé VR(P) en fonction de VR'(P) et d'éléments complémentaires. J'ai le lien que je cherchais. Nous allons maintenant utiliser exactement la même démarche pour lier l'accélération dans R de P à l'accélération dans R' de P en utilisant la dérivation. Je vais donc reprendre cette expression et la dériver.

Notes

Summary

6m 33s



Nous reportons donc l'expression trouvée précédemment VR(P) est égale à VR(A) plus VR'(P) plus ω vectoriel AP. Afin d'obtenir l'accélération, nous allons dériver cette expression. Je vais aller un tout petit peu plus vite que tout à l'heure. La dérivée de VR(P), c'est aR(P). La dérivée de VR(A), c'est aR(A). Pour les termes suivants, je dois exprimer les termes dans R'. J'ai donc d/dt [Σ/i yi point, eyi] plus d/dt [ω vectoriel Σ/i yi, eyi] Je conserve le premier terme aR(A) plus la dérivée de cette somme, je peux passer la dérivée à l'intérieur. Je vais donc avoir Σ/i d/dt de ce terme. La dérivée de ce produit vectoriel va se passer de la même façon que la dérivée d'un produit. Je vais avoir dérivé de ω vectoriel, deuxième terme inchangé, plus ω vectoriel dérivé du deuxième morceau. Dérivée de ω, je la note ω point vectoriel, deuxième terme inchangé, Σ/i yi, eyi plus ω vectoriel, dérivé du deuxième terme. Je vais mettre directement la dérivée dans la somme, donc Σ/i d/dt (yi, eyi). Ça, c'est bon. Ce terme-là n'est rien d'autre que AP il va falloir que je m'occupe de ces deux dérivés de produits. J'ai donc aR(A) plus Σ/i (yi deux points, eyi plus yi point, eyi vecteur dérivé) Plus ω point vectoriel AP.

Notes

Summary

7m 56s

$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP} \quad \rightarrow \text{dérivation}$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_R(A) + \frac{d}{dt}\Big[\sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i}\Big] + \frac{d}{dt}\Big[\vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}\Big]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \frac{d}{dt}(\dot{y}_i \vec{e}_{y_i}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \frac{d}{dt}(y_i \vec{e}_{y_i})$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i (\ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{y}_i \dot{\vec{e}}_{y_i}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i (\dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + y_i \dot{\vec{e}}_{y_i})$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \sum_i \dot{y}_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \Big[\sum_i y_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i}\Big]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \Big[\vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}\Big]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AP})$$

7

Plus ω vectoriel Σ/i (yi point, eyi plus yi, eyi point). Nous retrouvons donc aR(A) plus, nous séparons maintenant les termes des sommes, la Σ/i yi deux points, eyi plus la Σ/i yi point, et la dérivée de eyi est ω vectoriel eyi plus ω point vectoriel AP plus ω vectoriel Σ/i yi point, eyi plus ω vectoriel [Σ/i yi, amenons ici un vecteur de base à dériver, donc ω vectoriel eyi]. Courage, on y est presque. C'est aR(A), je retrouve ici aR'(P), plus je peux maintenant sortir le ω de la somme, ω vectoriel Σ/i yi point, eyi plus ω point vectoriel AP plus ω vectoriel Σ/i yi point, eyi plus ω vectoriel. Là, je peux à nouveau sortir le ω, [ω vectoriel Σ/i yi, eyi]. J'ai donc aR(A) plus aR'(P) plus, je vais commencer par mettre ce ω point vectoriel AP. Cela me permet de regrouper ce ω vectoriel Σ/i yi point, eyi plus ω vectoriel Σ/i yi point, eyi. Ces deux éléments sont les mêmes, ils sont identiques. J'ai donc 2ω vectoriel et Σ/i yi point, eyi, c'est VR'(P). J'ai donc ce terme-là qui est là, celui-ci qui est venu là-dedans, celui-là qui se retrouve là, celui-ci qui est venu là-dedans. Il ne me manque plus que celui-ci. C'est ω vectoriel (ω vectoriel, Σ/i yi, eyi, c'est AP). J'ai fini le travail.

Notes

Summary

11m 03s

$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP} \quad \rightarrow \text{dérivation}$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_R(A) + \frac{d}{dt}\left[\sum_i y_i \vec{e}_{y_i}\right] + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}\right]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \frac{d}{dt}(y_i \vec{e}_{y_i}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \frac{d}{dt}(y_i \vec{e}_{y_i})$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i (\ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{y}_i \dot{\vec{e}}_{y_i}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i (\dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + y_i \dot{\vec{e}}_{y_i})$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \sum_i \dot{y}_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \left[\sum_i y_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i}\right]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}\right]$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AP})$$

7

Essayons de suivre un petit peu les différents termes. Celui-ci était facile. Nous l'avons suivi tout au long de la dérivation. AR'(P) venait de la dérivation de VR'(P). Le ω point vectoriel AP est apparu assez tôt dans la dérivation du ω vectoriel AP. J'ai oublié de mettre le petit vert ici et le jaune en haut pour avoir tout. Ce 2ω vectoriel VR'(P) a deux origines. Nous en avons pris un morceau ici et un morceau à droite. Il y en a donc une partie qui venait de la dérivation de VR'(P) et une partie qui est originaire de la dérivation de produit vectoriel ω vectoriel AP. Quant au dernier terme ω vectoriel ω vectoriel AP, il est apparu dans la dérivation de ω vectoriel AP. On voit donc que ce vecteur ω est responsable de l'apparition de trois termes supplémentaires qui viennent en plus de ce qu'on a l'habitude de voir lorsqu'on a simplement un référentiel R' en translation dans un référentiel R. Dans la prochaine vidéo, nous allons analyser ces différents termes pour voir comment les interpréter de manière plus intuitive.

Notes

Summary

14m 54s

Résumé :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

8

En résumé, le fait de prendre le cas le plus général nous a permis de faire le lien entre OP et AP vecteurs positions, entre VR(P) et VR'(P) et entre un aR(P) et aR'(P). Nous avons donc maintenant une expression mathématique complexe, en particulier pour l'accélération et l'étape suivante sera d'essayer de comprendre ce que signifient ces différents termes.

Notes

Summary

16m 44s

Nous avons donc vu la dérivation mathématique de ce lien entre position, vitesse, accélération dans nos deux référentiels. Nous avons un petit peu perdu le lien avec la réalité et l'intuition. Nous allons donc dans une prochaine vidéo reconnecter ce lien et prendre les termes un par un pour voir quelle est leur signification réelle.

Notes

Summary

17m 18s