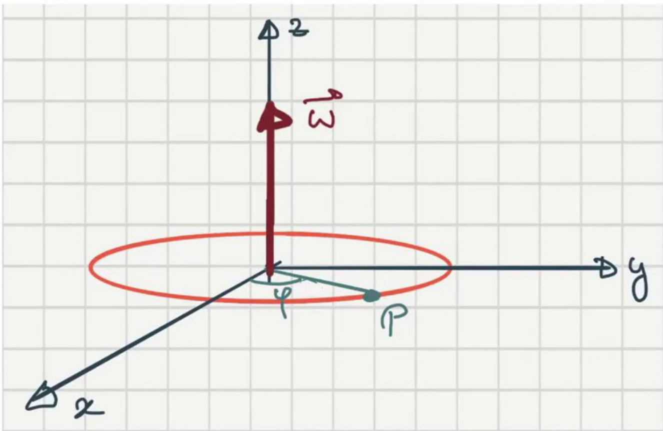
Physique générale : mécanique



Vecteur rotation

Prof. Cécile Hébert

Video

EPFL

Plan du cours

De nombreux problèmes comportent une rotation, que ce soit dans un mouvement circulaire, lorsqu'on est dans un référentiel en mouvement de rotation dans un référentiel fixe, ou bien plus tard, pour la mécanique du solide. Nous allons voir comment une seule grandeur vectorielle appelée vecteur rotation permet de représenter cette rotation. Nous sommes dans le chapitre un sur la cinématique et nous allons voir la notion de vecteur rotation.

Notes

Summary

0m 05s

I - Cinématique

Table des matières

3

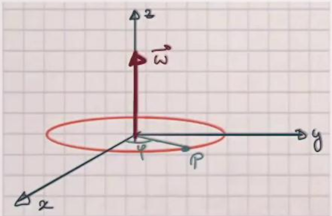
Notes

Summary

0m 29s

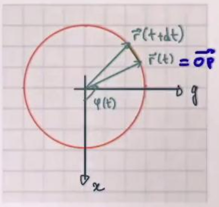
8 Vecteur rotation

On considère un point P ayant un mouvement circulaire dans le plan (O,x,y) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$.



Soit $\vec{\omega}$ le vecteur de norme ω, perpendiculaire au plan contenant le cercle décrit par P et de sens donné par la règle du tire-bouchon.

$\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation



$\vec{r} = \vec{OP}$ de norme constante

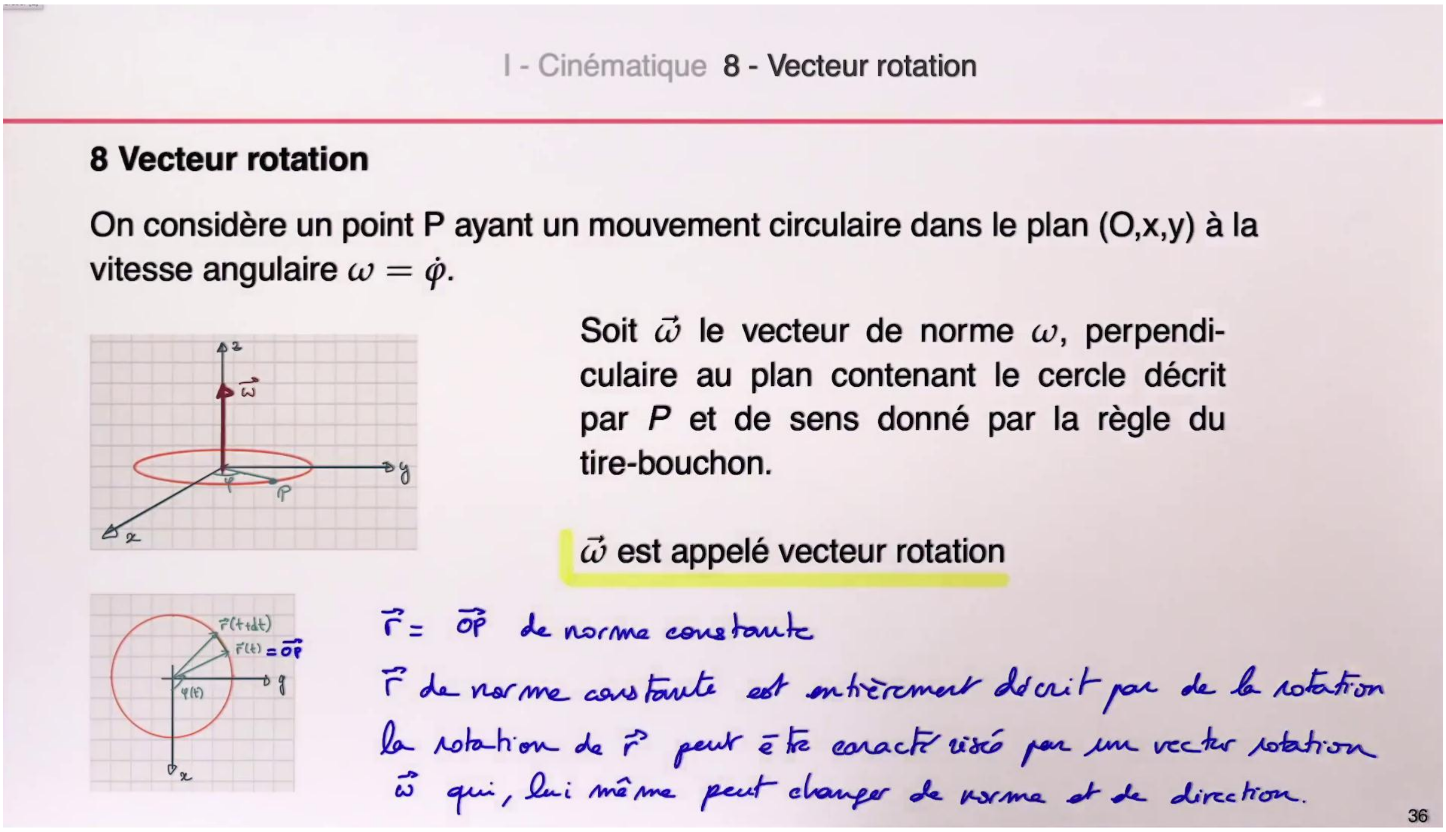
36

Nous allons commencer par considérer un point P ayant un mouvement circulaire, pas forcément uniforme, dans le plan (O,x,y) à la vitesse angulaire oméga égale phi point. J'ai donc le plan (O,x,y) et P qui décrit un mouvement circulaire dans ce plan. P tournant autour de la de l'axe Oz décrit une rotation autour de Oz. Nous allons décrire cette rotation par un unique vecteur oméga. Nous définissons oméga, le vecteur de norme oméga Ω, qui est la vitesse angulaire de rotation perpendiculaire au plan contenant le cercle décrit par P, donc colinéaire à l'axe Oz, et de sens donné par la règle du tire-bouchon pour le mouvement de rotation de P. C'est-à-dire que si P a un mouvement de rotation dans le sens trigonométrique, le vecteur oméga pointera selon les z positifs. Ce vecteur oméga permet de caractériser entièrement la rotation de P autour de l'axe Oz. Nous appelons donc oméga le vecteur rotation. Si l'on regarde ce qui se passe de dessus, on voit immédiatement que puisque P décrit un mouvement circulaire, le vecteur r égale OP est de norme constante. Puisque sa longueur ne change pas, le seul changement qu'il peut avoir est donc lié à une rotation.

Notes

Summary

0m 33s



Dans le cas présent, nous avons choisi une rotation dans un plan autour de l'axe Oz. On peut imaginer de généraliser cela et dans ce cas-là, le vecteur r égale OP pourrait tourner de n'importe quelle manière dans l'espace. r de norme constante est donc entièrement décrit par de la rotation. Si on souhaite généraliser le mouvement de r, dans ce cas-là, le vecteur oméga ne restera pas forcément aligné avec l'axe Oz, mais il pourra lui-même tourner au cours du temps. Cette rotation peut être caractérisée par un vecteur oméga qui lui-même change de norme et de direction au cours du temps.

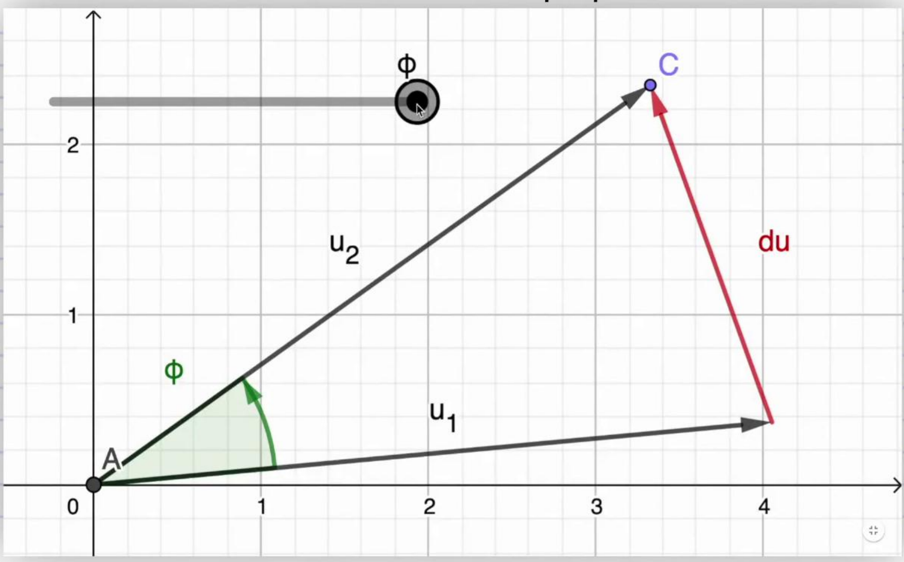
Notes

Summary

2m 31s

Dérivée d'un vecteur de norme constante

Soit $\vec{r}$ un vecteur de norme constante. Alors $\dot{\vec{r}}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$



37

Nous allons maintenant nous intéresser à la dérivée d'un vecteur de norme constante. Soit r un vecteur de norme constante, alors, la dérivée temporelle de r, r point est perpendiculaire à r. Je vous propose une première analyse géométrique. Prenons ici un vecteur u qui change au cours du temps. À t1, il est égal à u1. À t2, il est égal à u2. Entre les deux, il a tourné d'un angle phi. Cela a pris un intervalle de temps delta t. Si je fais maintenant diminuer delta t, on voit évidemment que la rotation sera de plus en plus faible. Entre u1 et u2, j'ai la variation de u qui est ici du. u2 est égal à u1 plus du. Dans le cas où la rotation est macroscopique, *du* n'est pas forcément perpendiculaire à u1 ou u2.

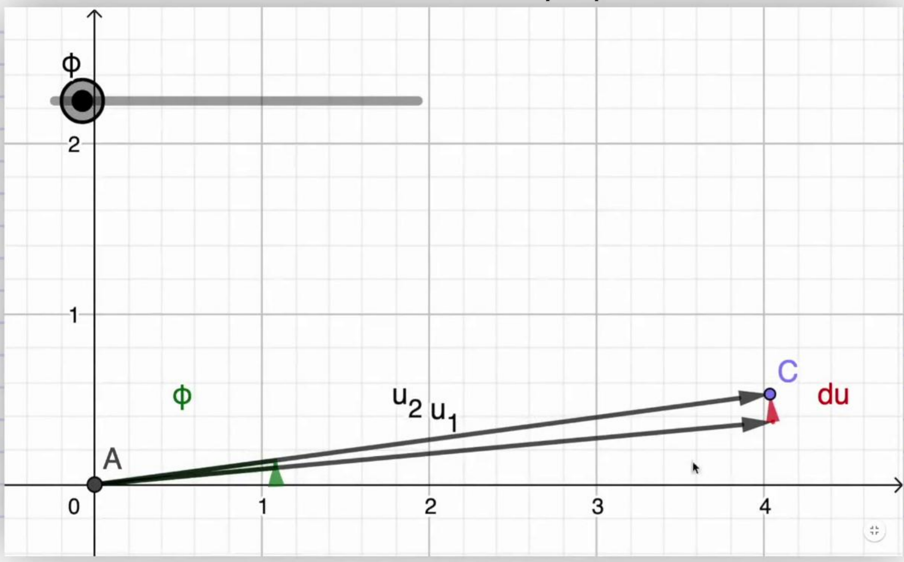
Notes

Summary

3m 21s

Dérivée d'un vecteur de norme constante

Soit $\vec{r}$ un vecteur de norme constante. Alors $\dot{\vec{r}}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$



37

Mais si je fais tendre l'intervalle de temps vers 0, je rapproche u2 de u1, j'arrive à un moment où il commence à être difficile de voir ce qui se passe.

Notes

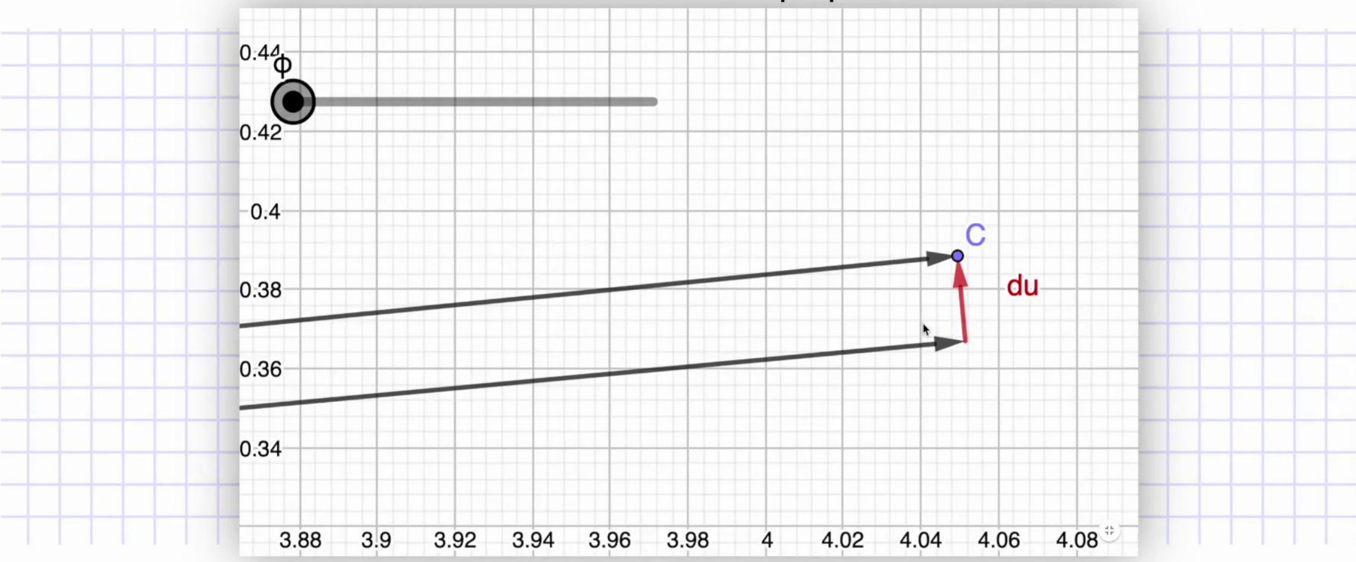
Summary

4m 28s

I - Cinématique 8 - Vecteur rotation

Dérivée d'un vecteur de norme constante

Soit $\vec{r}$ un vecteur de norme constante. Alors $\dot{\vec{r}}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$



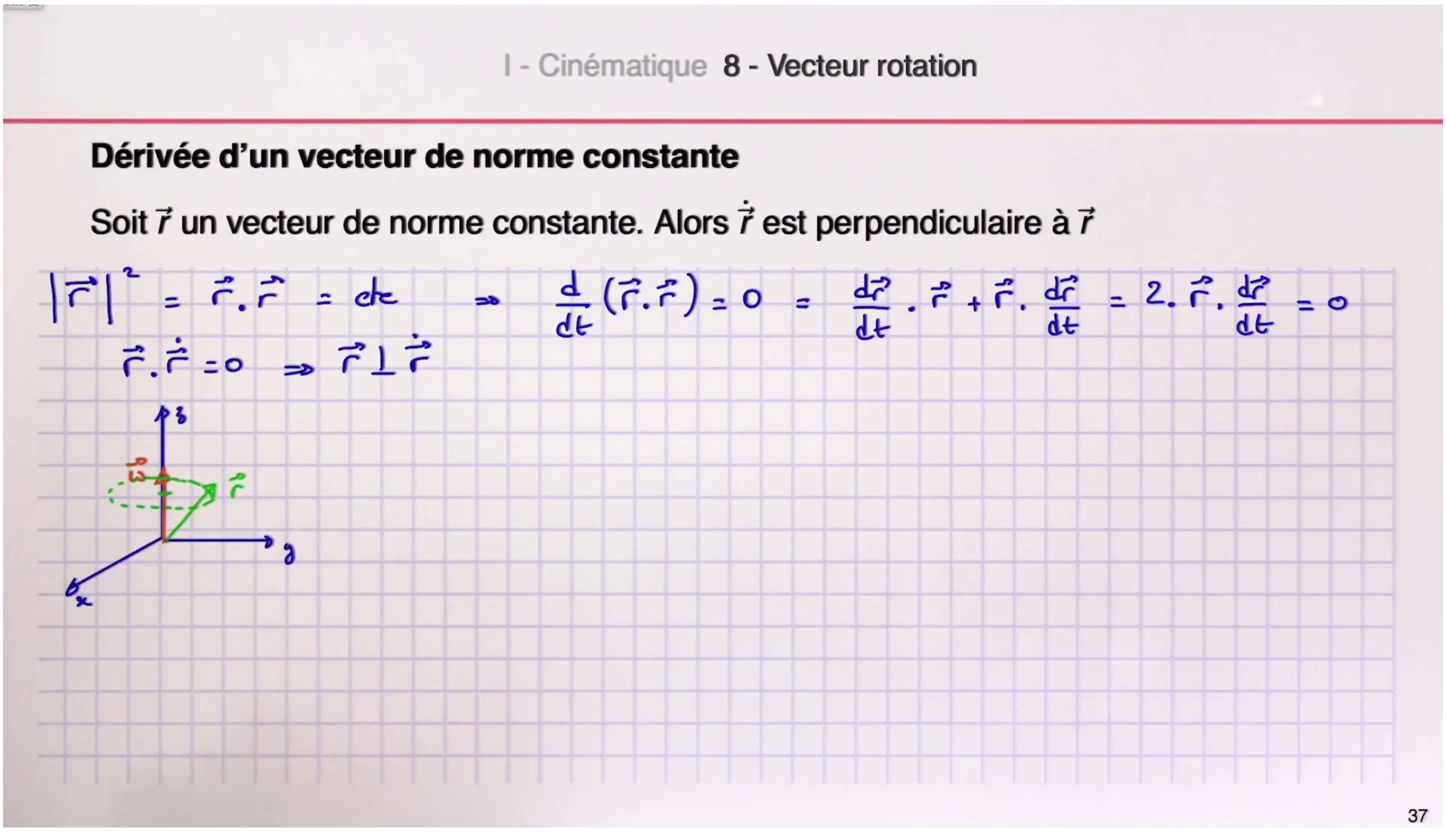
37

Je vais donc zoomer pour regarder plus précisément au bout des deux flèches de u1 et u2. Cela me permet de continuer à diminuer l'intervalle de temps. On voit que lorsque l'intervalle de temps devient très faible, u1 est quasiment colinaire à u2 et du devient perpendiculaire aussi bien à u1 et à u2. La dérivée de u sera du sur dt, colinaire à du, elle sera donc perpendiculaire à u.

Notes

Summary

4m 41s

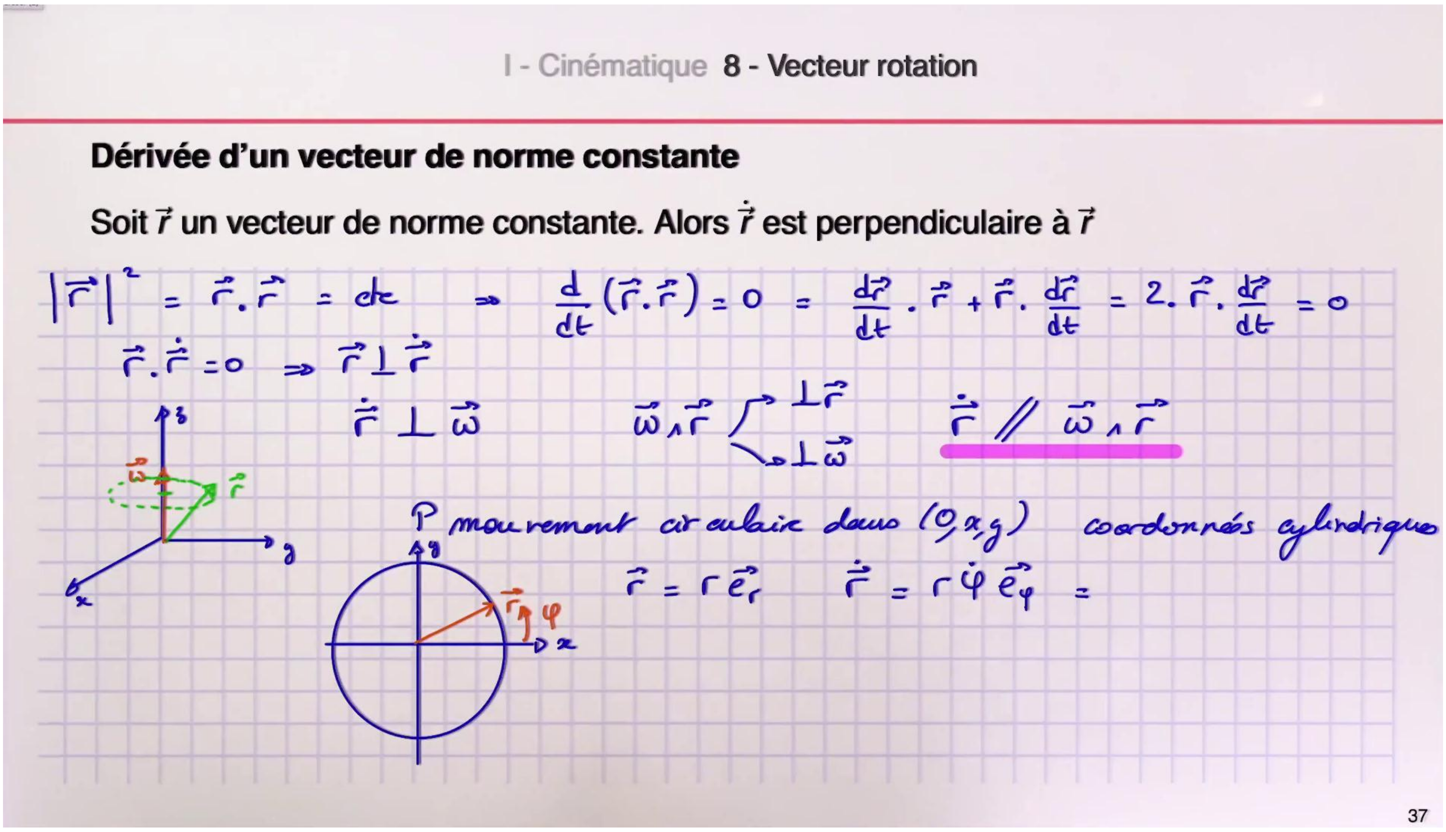


Cette affirmation peut aussi se démontrer analytiquement. Soit r de norme constante. Si je prends la norme de r au carré, c'est égal au produit scalaire r scalaire r. C'est donc une constante. Lorsque je prends la dérivée temporelle de cette expression, je trouve que la dérivée par rapport au temps de r produit scalaire r est égale à la dérivée par rapport au temps d'une constante, donc 0. Je peux développer cette dérivée et je trouve dr sur dt produit scalaire avec r plus r produit scalaire dr sur dt. Le produit scalaire étant commutatif, je trouve deux fois r produit scalaire dr sur dt qui est égal à 0. En écriture avec le point, je retrouve donc que r scalaire r point est égal à 0. Cela signifie que r est perpendiculaire à sa dérivée r point. Par ailleurs, si on prend r de norme constante, subissant une rotation de vecteur oméga colinéaire à Oz. Je considère un vecteur r de norme constante, pas forcément dans le plan (O,x,y). Lorsque je fais tourner r autour de l'axe Oz, le vecteur r décrit un cône. Il va se mettre à tourner autour de l'axe Oz. La pointe de r décrit un cercle horizontal parallèle au plan (O,x,y). Le centre de ce cercle est sur l'axe Oz.

Notes

Summary

5m 25s

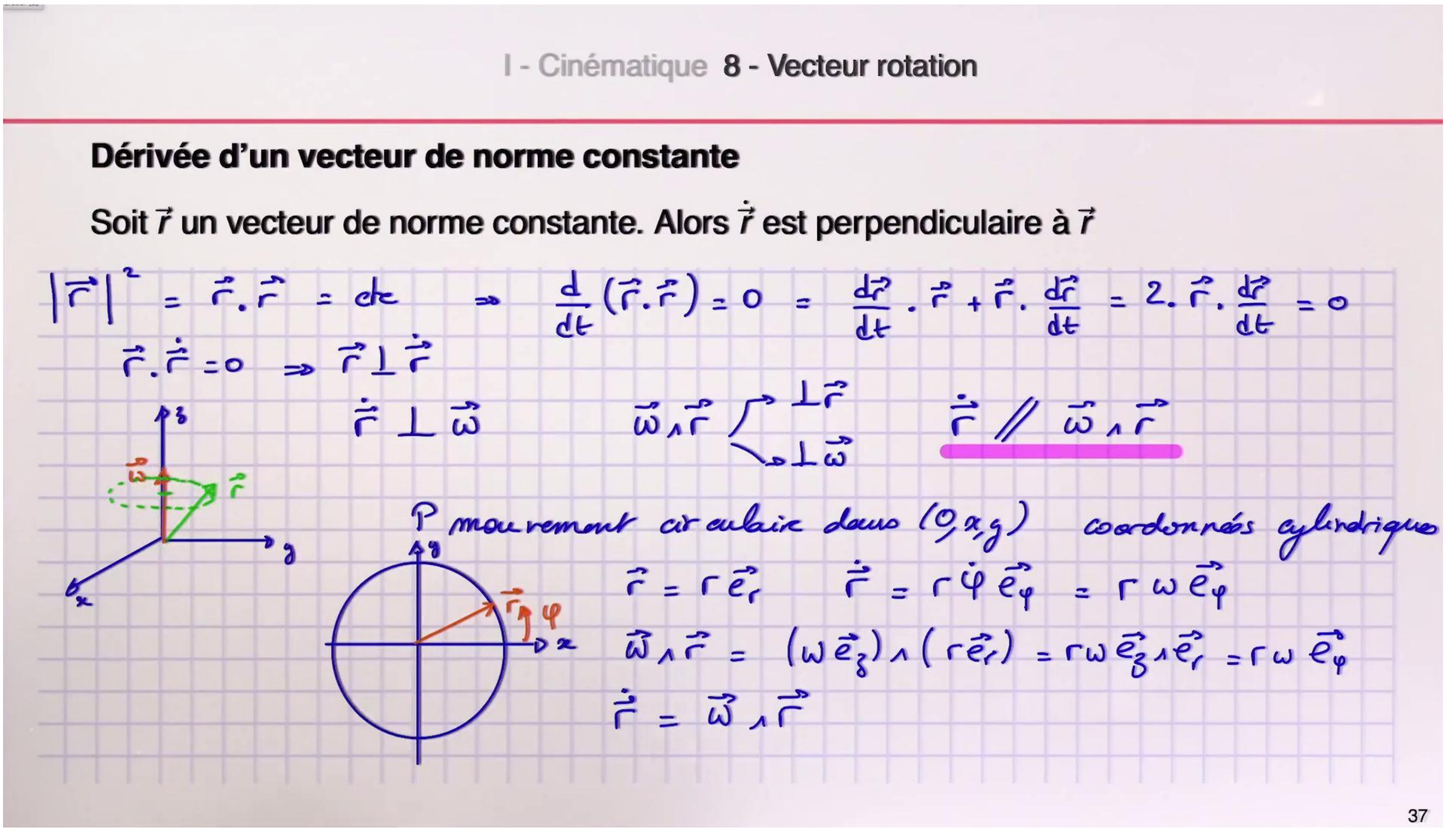


La pointe de r décrit donc ce cercle entre t et t plus dt. J'ai un petit vecteur dr qui est tangent au cercle. Le petit vecteur dr est donc dans un plan horizontal. Puisque oméga est colinéaire à l'axe Oz, dr est perpendiculaire à oméga. Si j'ai un vecteur de norme constante qui subit une rotation de vecteur, rotation oméga, on voit que géométriquement, la dérivée temporelle de r est perpendiculaire à oméga. Je trouve donc que la dérivée de r est perpendiculaire à r et que la dérivée de r est perpendiculaire à oméga. Si je prends le vecteur oméga vectoriel r, il est à la fois perpendiculaire à r et perpendiculaire à oméga. La dérivée temporelle de r sera donc colinéaire au vecteur oméga vectoriel r. Par ailleurs, si je reprends le cas particulier où P décrit un mouvement circulaire dans le plan (O,x,y). Si je fais une vue de dessus et que je me place en coordonnées cylindriques, le vecteur r est égal à r er. Comme il est de norme constante, la dérivée temporelle de r, r point, sera égale à r dérivée de er qui est phi point e phi. Comme nous avons un mouvement circulaire de vitesse angulaire oméga, oméga égal phi point, donc r point est égal à r oméga vecteur de base e phi.

Notes

Summary

7m 30s

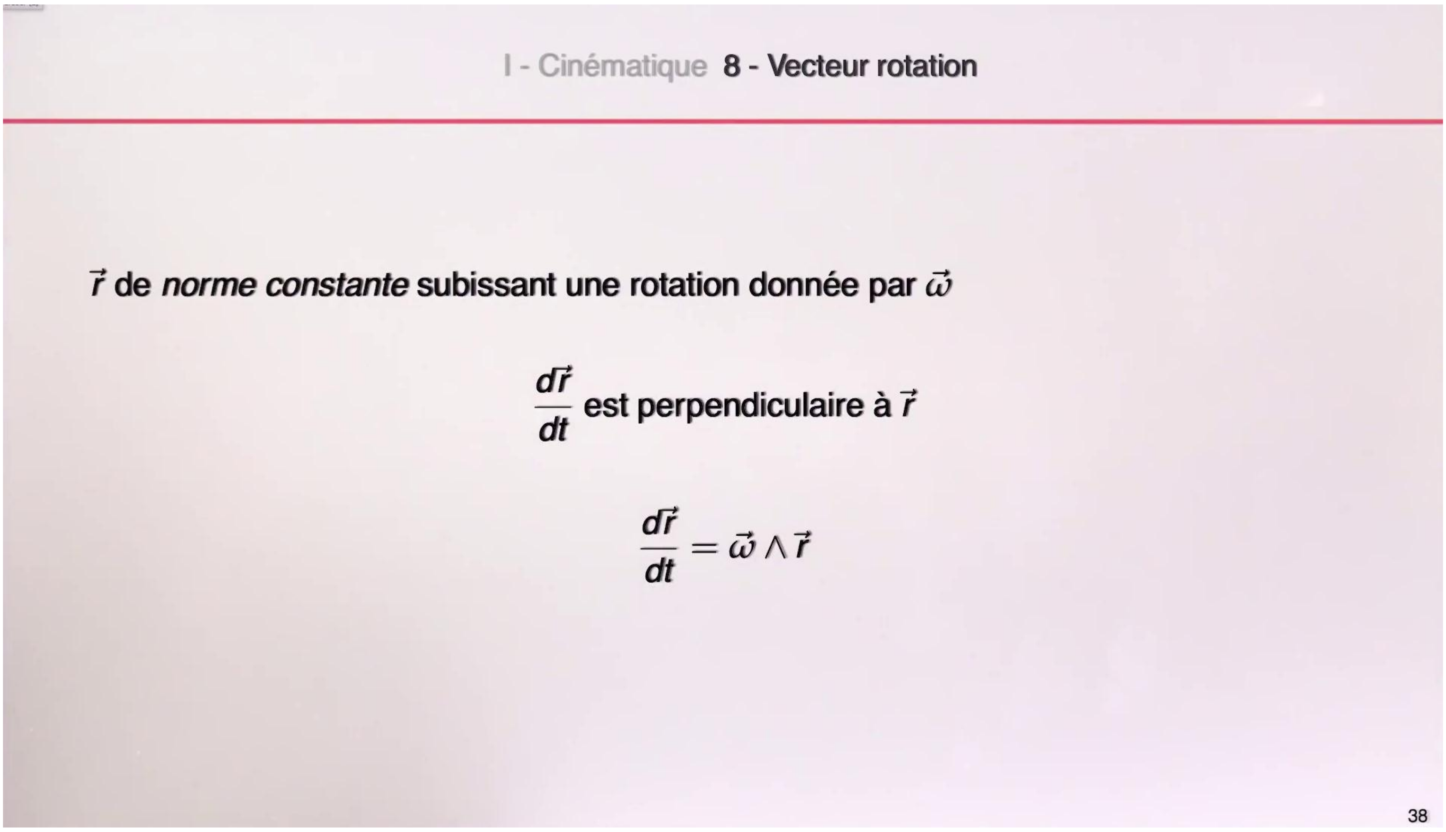


Si je cherche à calculer le produit vectoriel oméga vectoriel r, je trouve que oméga vectoriel r est égal au vecteur oméga, c'est vitesse angulaire oméga, vecteur de base ez, produit vectoriel r er. C'est donc égal à r oméga ez vectoriel er, or ez vectoriel er vaut e phi. Je trouve donc r oméga e phi. Dans le cas où P a un mouvement circulaire, je trouve donc que r point est égal à r oméga e phi et oméga vectoriel r est aussi égal à r oméga e phi. J'ai donc r point qui est égal à oméga vectoriel r. La démonstration complète peut se faire en coordonnées sphérique est un peu plus compliquée. Je vous demande d'admettre que pour tout vecteur r de norme constante, subissant une rotation de vecteur rotation oméga, alors r point est égal à oméga vectoriel r, même si r n'est pas perpendiculaire à oméga, et même si le vecteur oméga change au cours du temps.

Notes

Summary

9m 38s



En résumé, pour un vecteur r de norme constante, subissant une rotation donnée par le vecteur oméga, dr sur dt est perpendiculaire à r et dr sur dt est égal à oméga vectoriel r.

Notes

Summary

11m 10s

Voilà, nous avons défini le vecteur rotation qui sera un outil indispensable pour analyser ce qui se passe lorsqu'on est dans un référentiel accéléré dans un référentiel fixe ou bien pour la mécanique du solide.

Notes

Summary

11m 27s