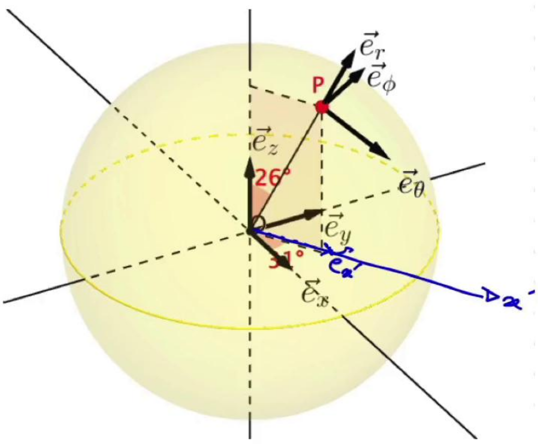
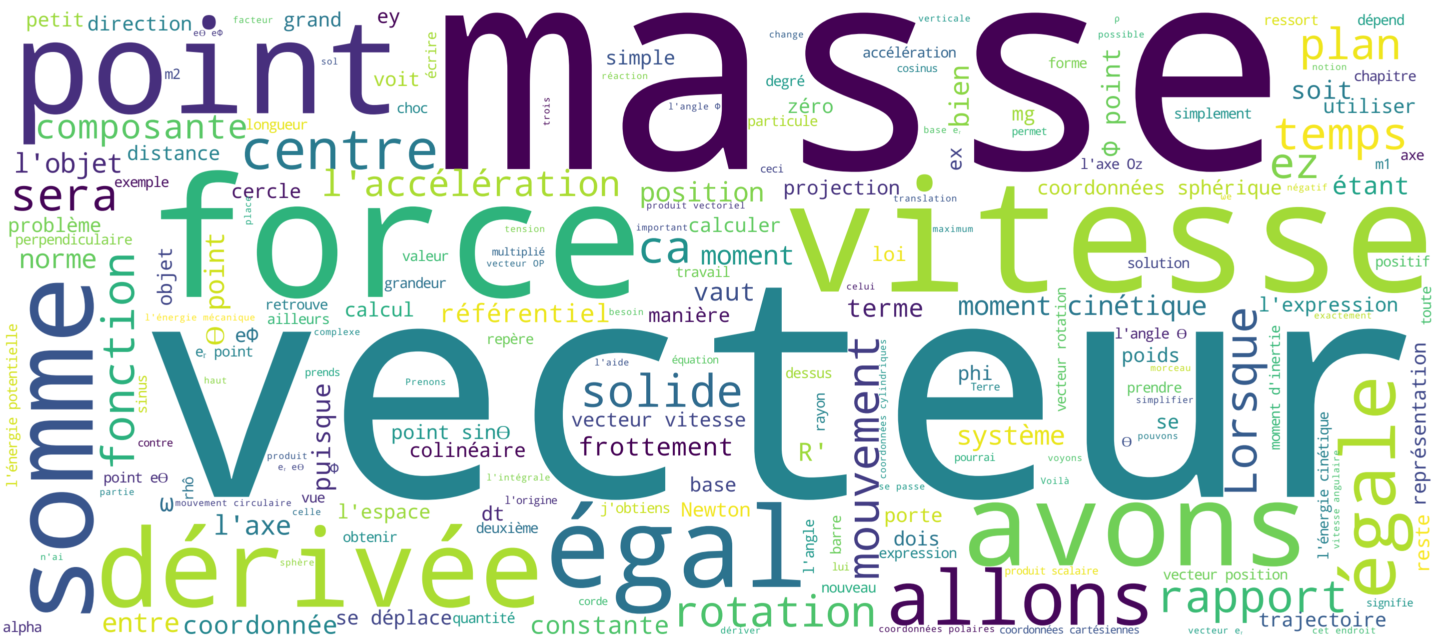
Physique générale : mécanique

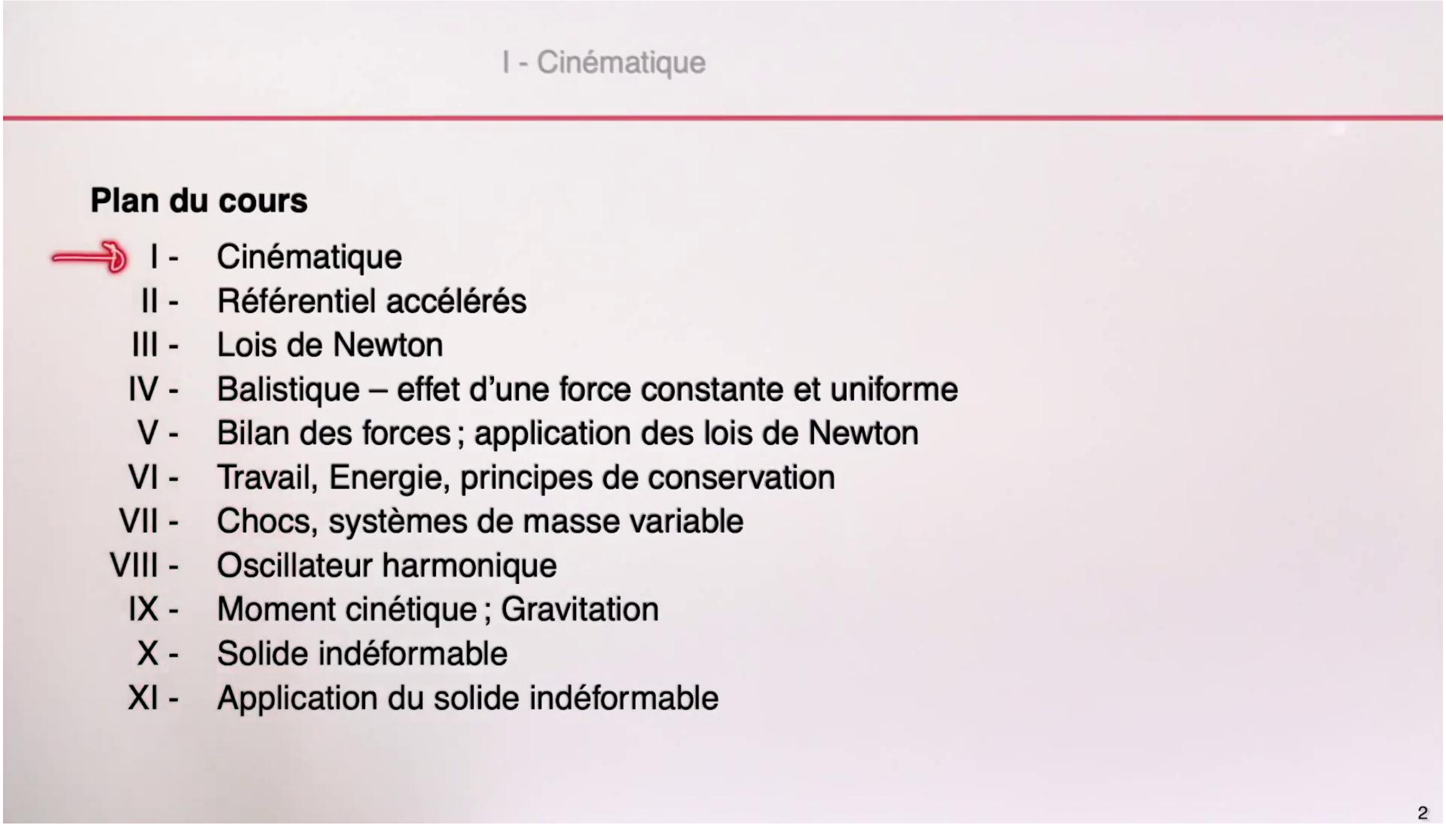


Coordonnées sphériques

Prof. Cécile Hébert



Video



Parmi les systèmes de coordonnées mobiles, les coordonnées sphériques sont certainement les plus difficiles à visualiser en trois dimensions. C'est aussi celles que vous utiliserez le plus dans votre vie d'ingénieur, car elles sont utiles dans énormément de types de problèmes. Lorsque la problématique a une symétrie sphérique, elles apportent une énorme simplification. Fondamentalement, on repère un objet dans l'espace par sa position par rapport à l'origine du référentiel et de rotation. La manière la plus puissante de dériver ce système de coordonnées et le manipuler est d'utiliser le calcul matriciel. Cependant, on peut faire sans et nous nous en passerons dans cette vidéo. Il vous faudra vraiment développer une vision en trois dimensions pour manipuler ce système de coordonnées.

Notes

Summary

0m 05s

I - Cinématique

Table des matières

1 - Référentiel ; Repère
2 - Trajectoire, vitesse, accélération
3 - Coordonnées cartésiennes
4 - Coordonnées polaires
5 - Coordonnées curviligne
6 - Coordonnées cylindriques
7 - Coordonnées sphériques
8 - Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques

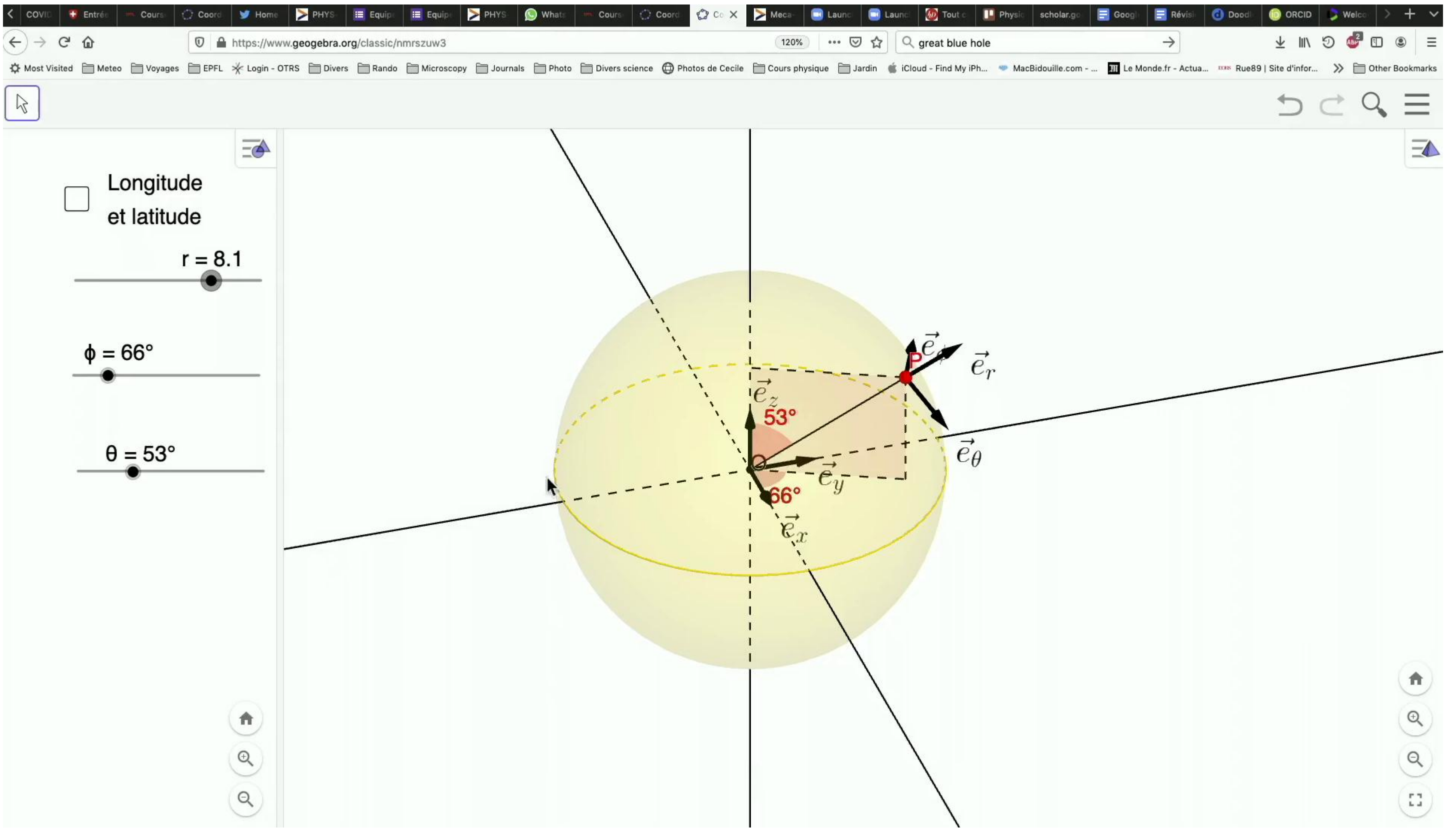
3

Nous sommes dans le chapitre 1 sur la Cinématique, et nous allons voir les coordonnées sphériques.

Notes

Summary

1m 01s

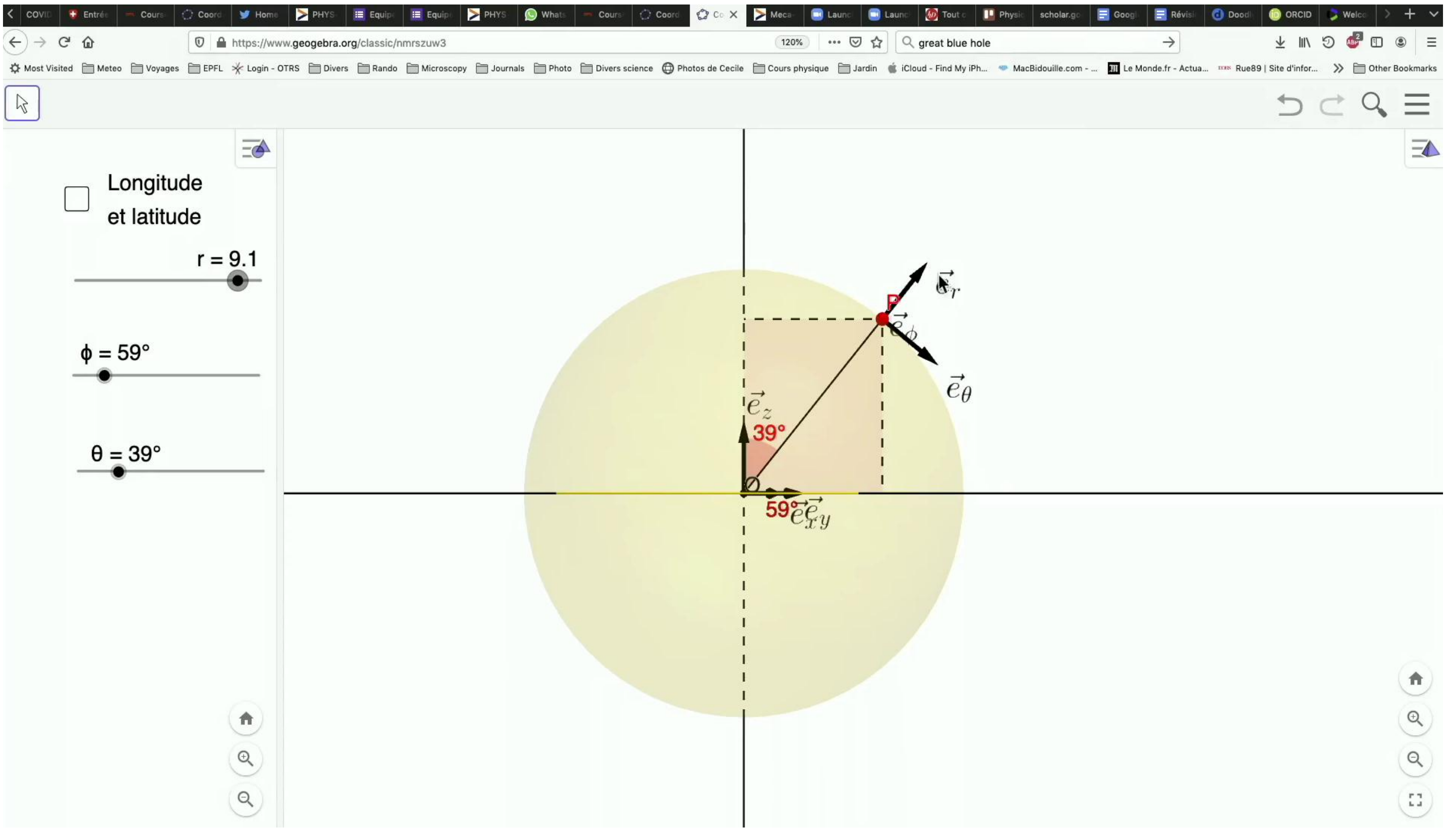


La logique des coordonnées sphériques est la suivante. Si je prends un point P qui serait dans un repère cartésien (O, x, y, z), je vais chercher à repérer ce point P par rapport au point O. C'est un système de coordonnées qui est très souvent utilisé en physique et en ingénierie, car il s'adapte à toutes les situations qui sont dites à symétrie sphérique, dans lesquelles un centre joue un rôle particulier. Ce qui est important, c'est la distance d'un objet à ce centre. Par exemple, si vous vous intéressez au rayonnement solaire, ce qui est intéressant, c'est la distance au soleil. Si vous vous intéressez à une antenne, pour connaître l'onde rayonnée, il faut se placer à la distance par rapport à l'antenne. Donc, la distance OP nous fournira la première coordonnée. Une fois que je connais la distance entre le point P et le centre O, que je peux ici faire varier dans cette tablette, il va encore falloir que je repère la position de P dans l'espace. Je vais le faire avec deux angles. Le premier angle que je vais prendre est similaire à celui des coordonnées cylindriques. C'est l'angle Φ qui mesure la rotation par rapport à l'axe Oz des coordonnées cartésiennes.

Notes

Summary

1m 08s

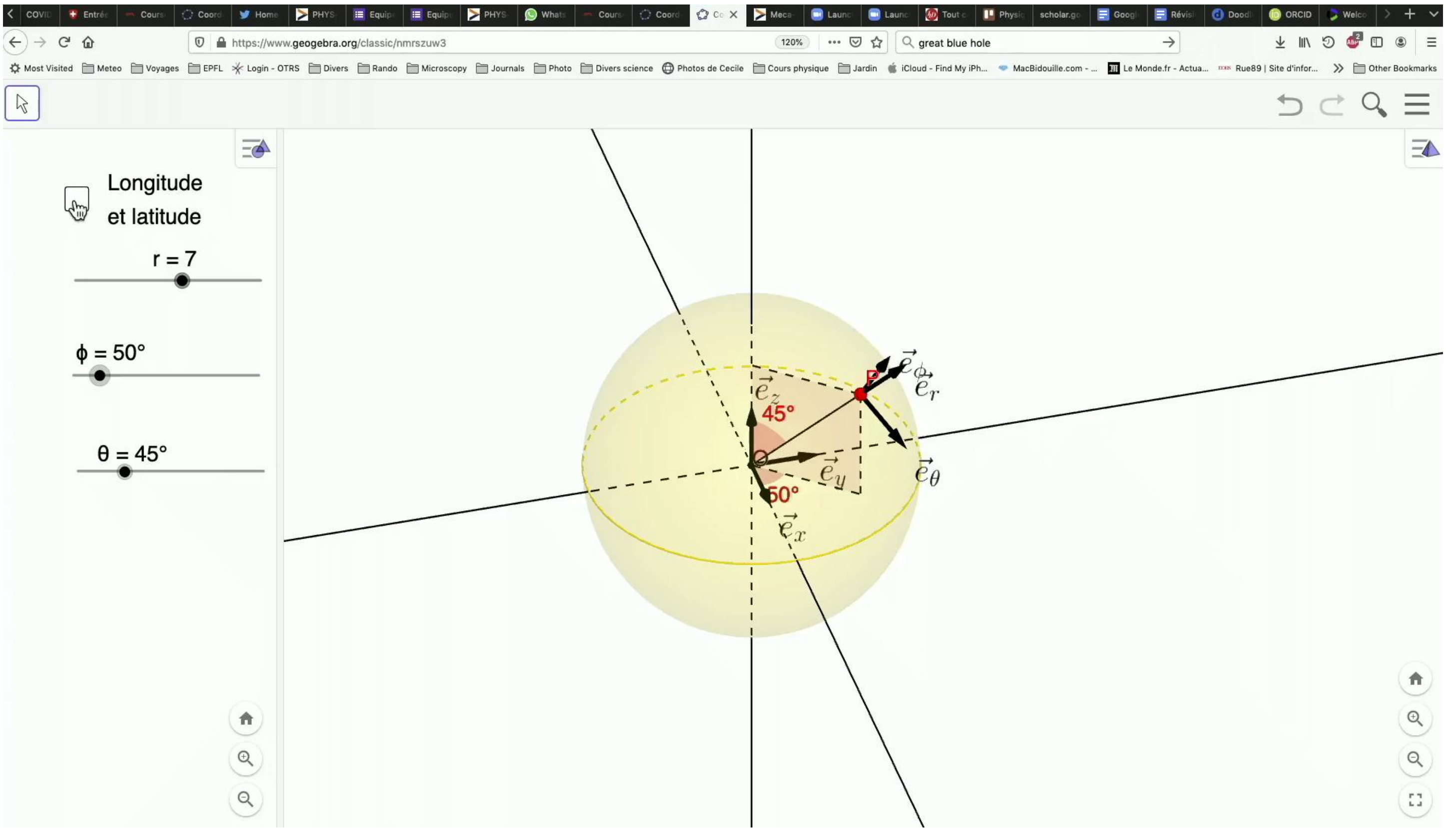


Comme pour les coordonnées cylindriques, imaginez que le point P se trouve sur une sorte de porte verticale qui peut tourner autour de l'axe Oz. Lorsque je fais varier Φ, on voit le point P qui tourne autour d'Oz. J'ai maintenant la distance OP et la position de ma porte dans l'espace. Il faut encore que je trouve à caractériser la position du point P sur cette porte. C'est le deuxième angle Θ qui, lui, est mesuré depuis l'axe Oz vertical, donc depuis les au z positifs, vers le vecteur OP. Lorsque je fais varier Θ, on voit le point P qui se déplace sur la porte. La porte, elle, ne bouge plus. Comme pour les coordonnées polaires, j'ai trois vecteurs de base e_r, eΘ, eΦ, liés à ces coordonnées. Pour mieux voir, je vais déplacer ma sphère de manière à avoir une projection dans laquelle er est vu dans le plan. Le point P est ici sur un cercle et je vois directement le plan de la porte. Lorsque j'augmente r, P se déplace vers l'extérieur de ce cercle et cela me permet de fixer le vecteur e_r. Cette représentation est aussi la bonne pour voir le vecteur de base eΘ puisque je suis dans le plan de la porte et que l'angle Θ entre la verticale et le vecteur OP est dans le plan de cette porte.

Notes

Summary

2m 27s

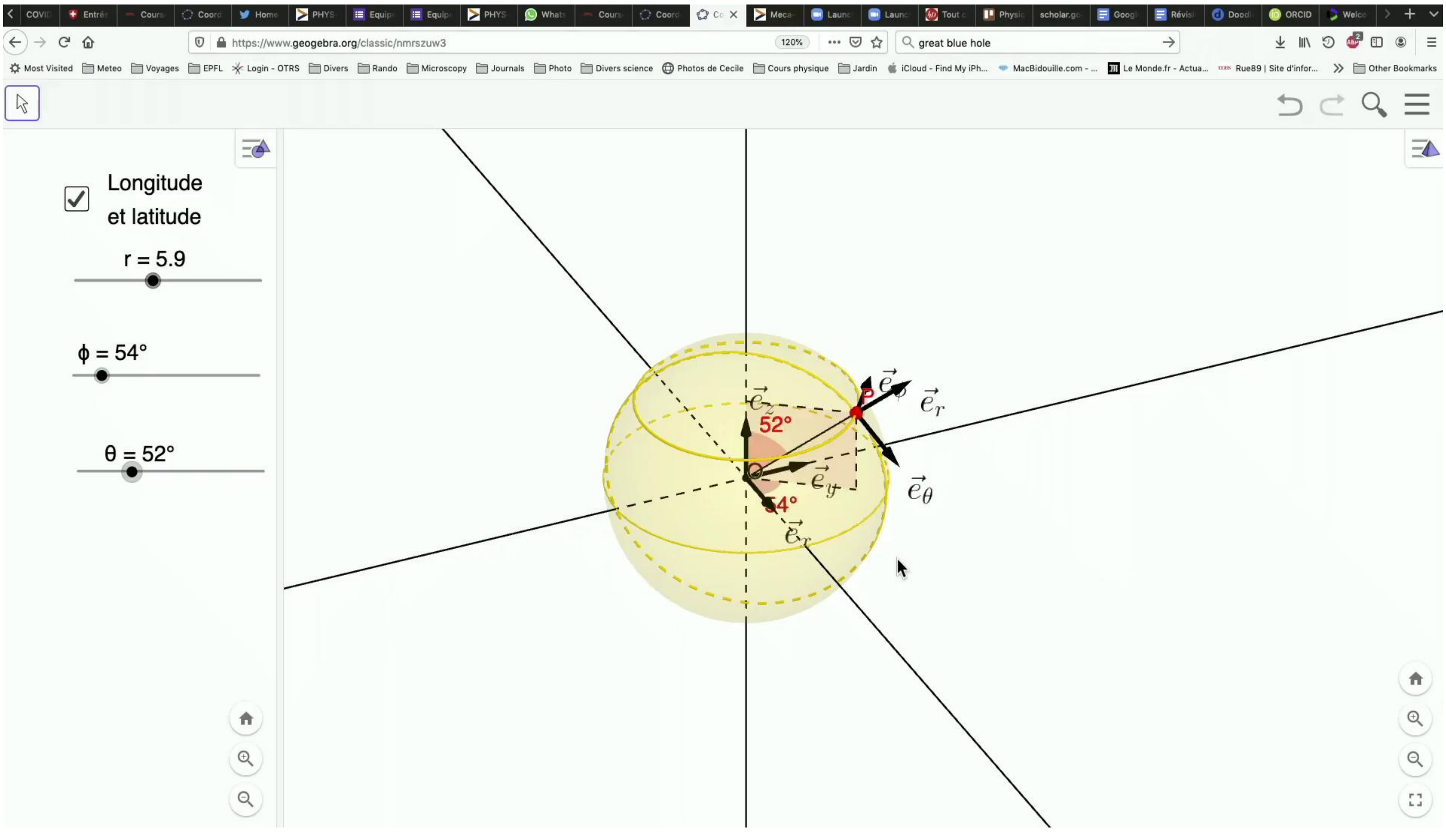


Faisons augmenter Θ et regardons dans quelle direction se déplace P. Cela me donne la direction du vecteur de base eΘ. Pour voir le vecteur de base eΦ, je dois faire une vue de dessus. Je tourne mon système. Je le regarde avec l'axe Oz qui pointe vers moi et à ce moment-là, lorsque je fais varier Φ, P va se déplacer dans un plan horizontal que je vois de dessus. À nouveau, on voit comment se déplace P et cela me donne la direction de eΦ. On peut représenter deux cercles qui correspondent à la longitude et à la latitude sur Terre.

Notes

Summary

4m 05s

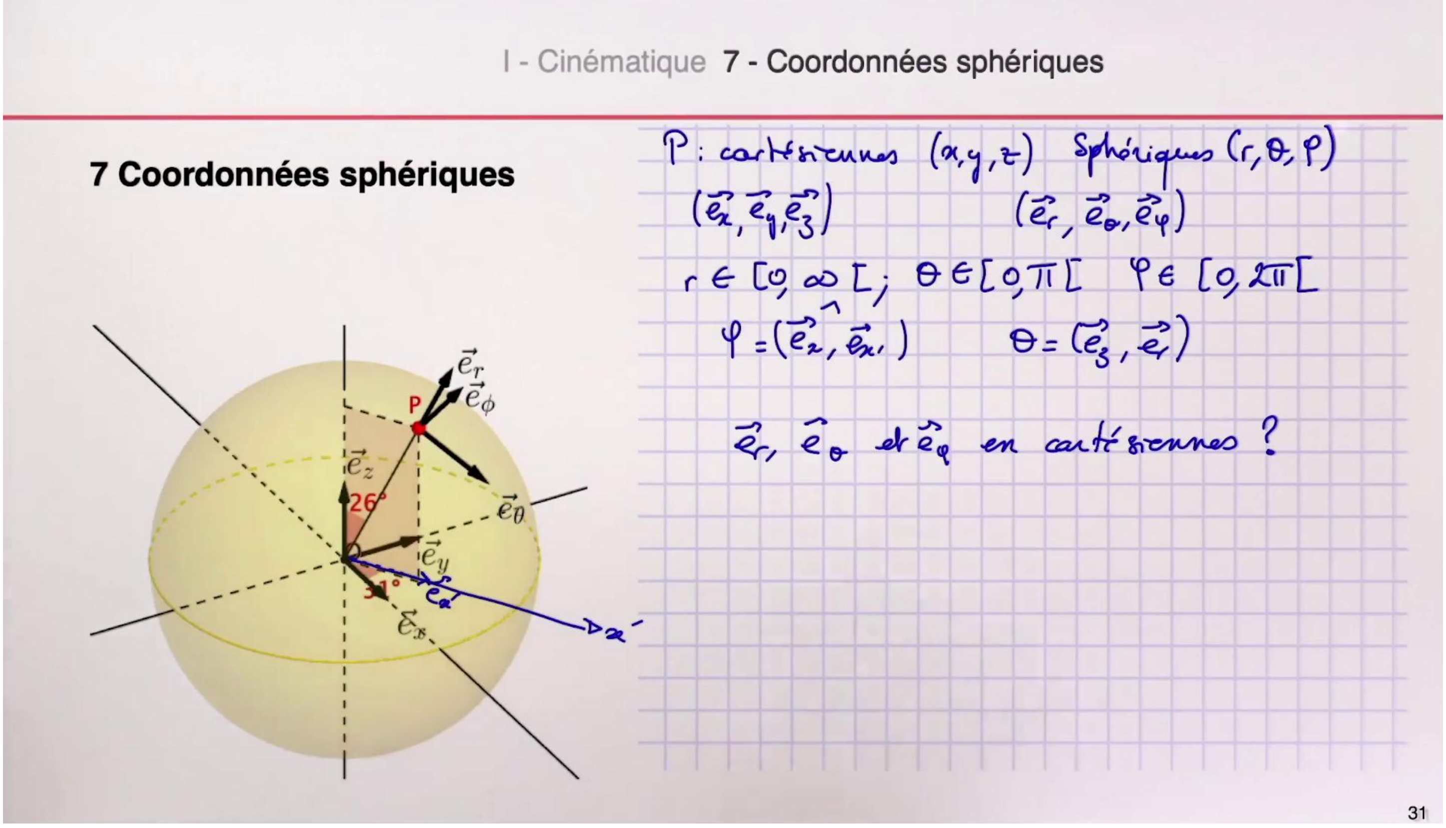


Ils passent par le point P. Le cercle correspondant à la longitude est le cercle vertical, celui d'un méridien. Il est dans le plan de la porte et on voit que eΘ est tangent à ce cercle. Le cercle correspondant à la latitude, c'est celui des parallèles que je peux visualiser en tournant ma sphère, il est dans le plan qui contient eΦ, et e_r est perpendiculaire à la sphère. Afin de connaître parfaitement la position de P dans l'espace, je dois pouvoir faire varier r entre 0 et l'infini. Je dois pouvoir faire varier Φ sur un tour complet, donc entre 0 et 360 degrés, soit 2π. Une fois que j'ai fait le tour complet, je n'ai plus besoin que de faire un demi plan pour le plan de la porte. Donc, il me suffira de faire varier Θ entre 0 et 180 degrés ou entre 0 et π. Maintenant, le but va être d'exprimer d'abord les vecteurs de base e_r, eΘ, eΦ, à l'aide des vecteurs cartésiens ex, ey, ez, de trouver les dérivées de ces vecteurs et de s'en servir pour exprimer la position, la vitesse et l'accélération en coordonnées sphériques.

Notes

Summary

4m 47s

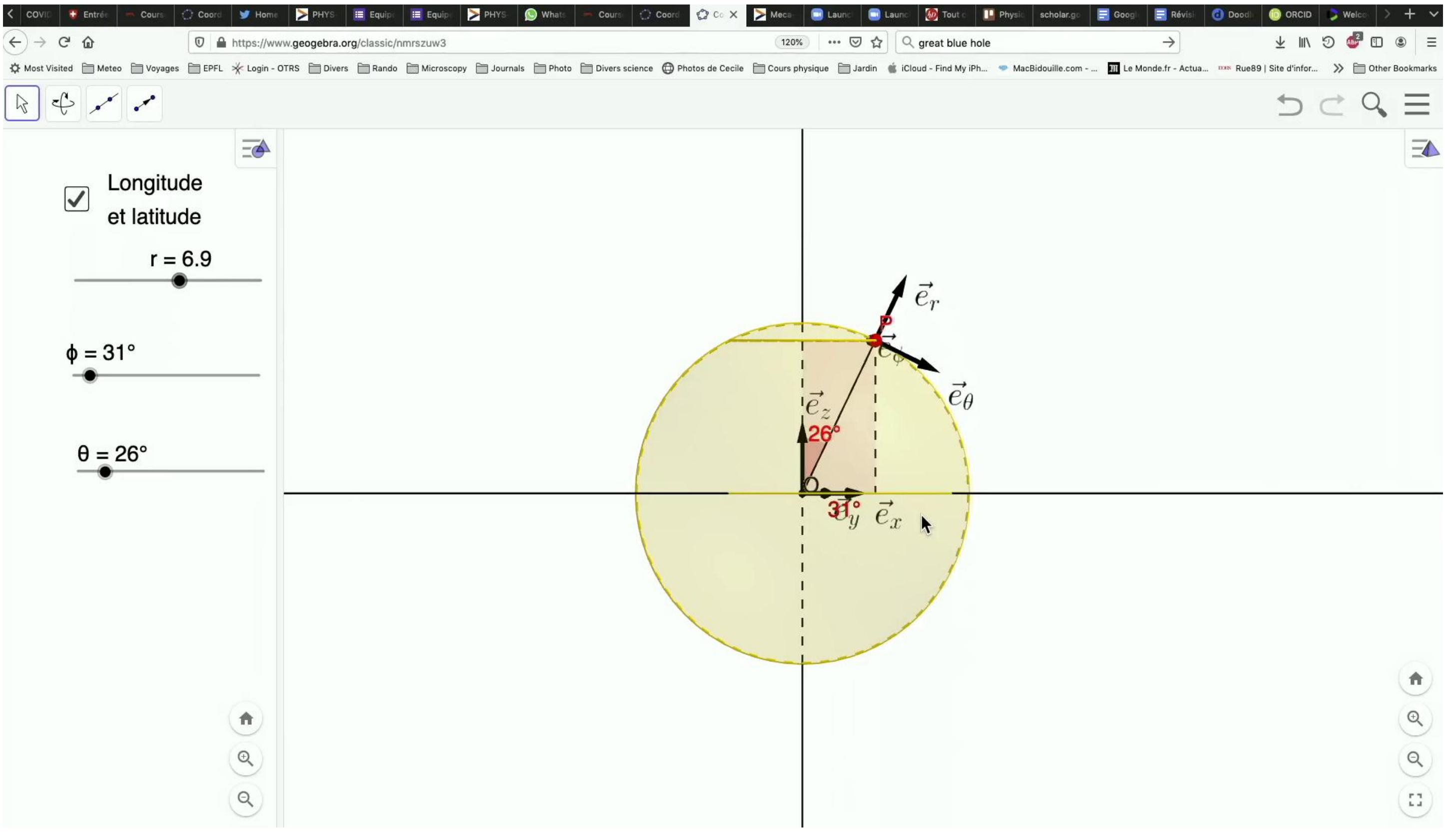


Nous avons donc le point P qui est en cartésienne, a comme coordonnées x, y et z et en sphérique, r, Θ et Φ. Le trièdre direct des coordonnées cartésiennes est ex, ey, ez. Le trièdre direct des coordonnées sphériques est e_r, eΘ, eΦ. Si vous regardez sur le schéma tel qu'il est projeté, vous pouvez enrouler les doigts de la main, er, eΘ et vous voyez eΦ qui pointe en diagonale vers l'intérieur de la feuille. C'est bien e_r, eΘ, eΦ, le trièdre direct. Afin d'explorer tout l'espace, nous devons avoir r entre 0 et l'infini, Θ entre 0 et π, et Φ entre 0 et 2π. Nous aurons besoin d'utiliser un axe intermédiaire. C'est l'axe que je vais appeler Ox'. Il est porté par un vecteur de base ex'. Cet axe se situe dans le plan de la porte dans lequel se trouve P. Sur le schéma, on voit que l'angle Φ est l'angle entre le vecteur ex et le vecteur ex', et que l'angle Θ est l'angle entre le vecteur ez et le vecteur e_r. La première chose à faire va être d'exprimer er, eΘ et eΦ en coordonnées cartésiennes. La projection de ces trois vecteurs n'est pas simple. Très honnêtement, elle est impossible à faire avec le schéma tel qu'il est fait là. Nous allons devoir la faire en utilisant des vues adaptées à cette projection, et nous allons aussi devoir utiliser l'axe intermédiaire Ox'.

Notes

Summary

6m 34s

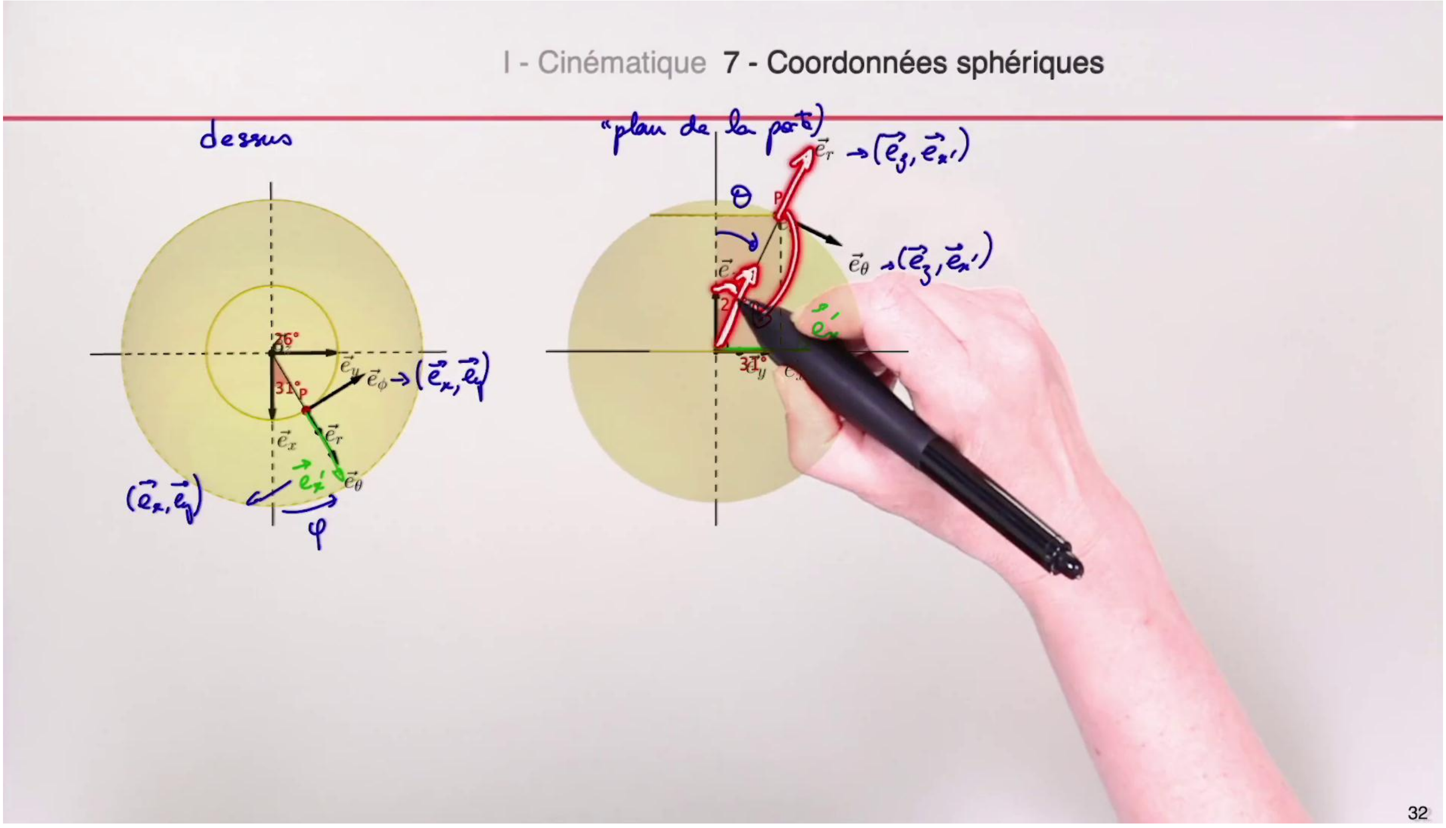


Les deux vues qui seront adaptées à cette projection seront d'une part une vue de dessus, dans laquelle l'axe z pointe vers l'extérieur de la feuille, et une vue dans laquelle le plan de la porte est dans le plan de la feuille.

Notes

Summary

8m 29s

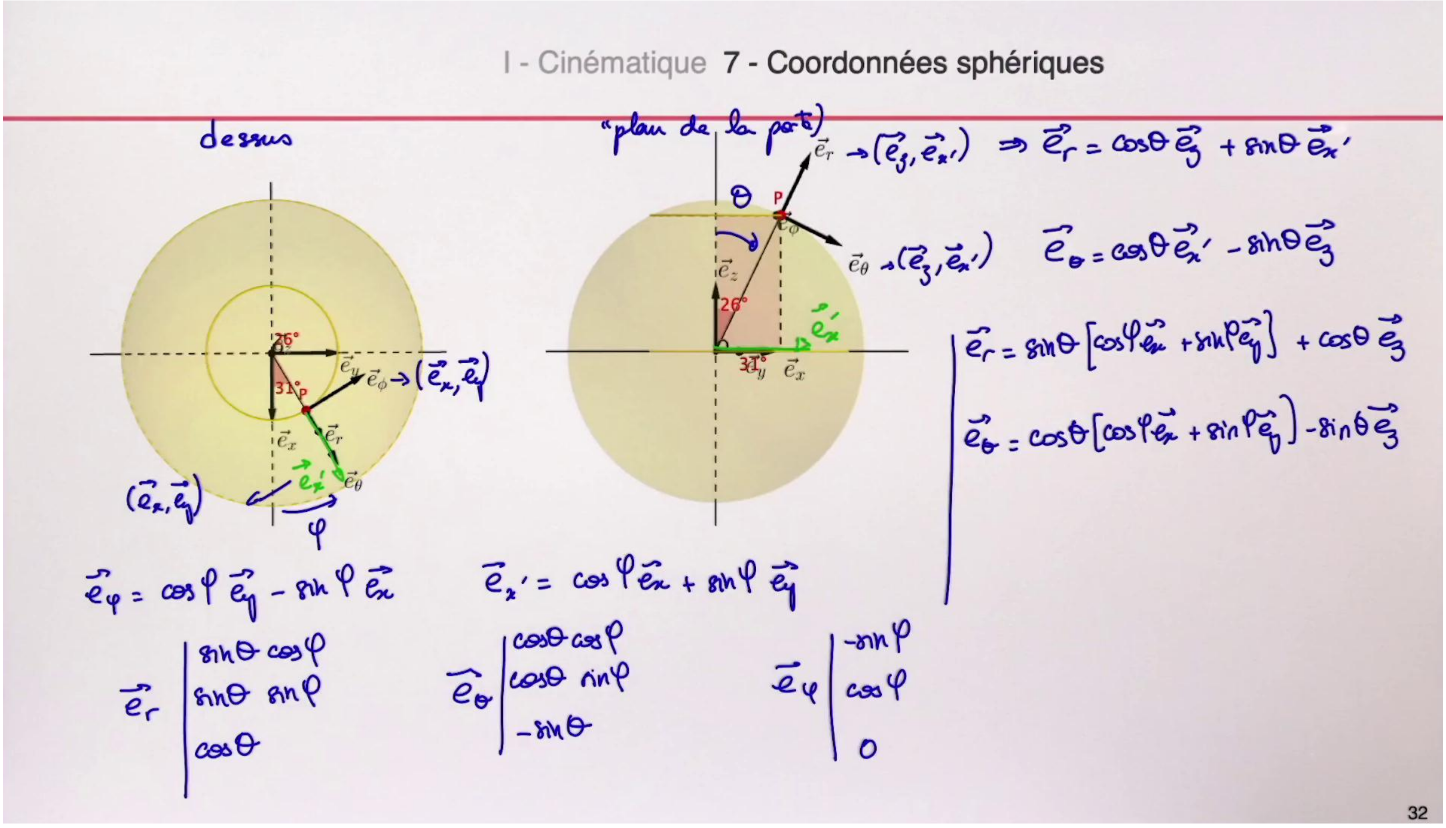


J'ai donc ici la vue de dessus et la vue dans le plan de la porte. Je ne pourrais faire des projections que si le vecteur que je cherche à projeter est dans le plan de ma représentation. C'est le cas ici du vecteur eΦ. Ça n'est ni le cas du vecteur e_r, ni le cas du vecteur eΘ. C'est pour ça que j'ai besoin du vecteur intermédiaire, ex', qui va être dans le plan de la représentation et situé dans le plan de la porte lui-même. Je reprends donc mon vecteur ex'. Je pourrais donc dans cette représentation projeter eΦ sur ex et ey, et je pourrais aussi projeter ex' sur ex et ey. Dans la représentation du plan de la porte, je pourrais m'intéresser à eΘ et e_r. Je pourrais les projeter en utilisant ez, mais malheureusement, ex et ey ne sont pas dans le plan de cette représentation. Par contre, j'ai le vecteur intermédiaire ex'. Je pourrais donc projeter ces deux vecteurs sur ez et ex'. er sera projeté sur ez et ex', et eΘ sera projeté sur ez et ex'. L'angle qui me servira à faire les projections est l'angle Θ. Allons-y pour les projections. Reprenons e_r, déplaçons-le vers le centre de la représentation. J'ai le vecteur e_r dans mon plan, l'angle Θ à cet endroit-là. Je retrouve cosΘ sur l'axe Oz sinΘ sur l'axe ex'.

Notes

Summary

8m 52s

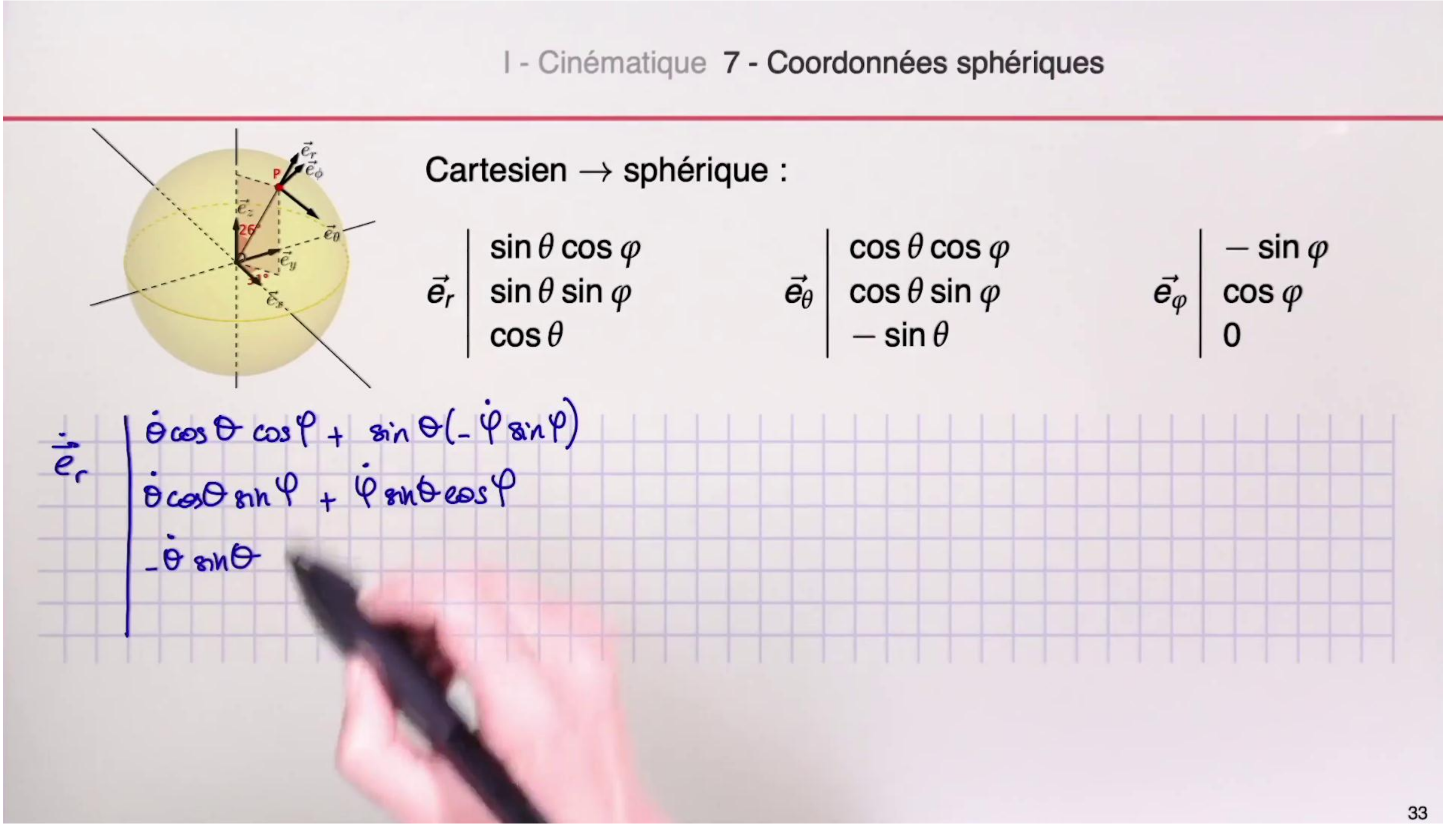


Le vecteur eΘ est perpendiculaire à e_r. Je peux le replacer vers le centre. Comme j'ai fait une représentation avec un Θ bien inférieur à 45 degrés, je vois tout de suite que je retrouve mon angle Θ à cet endroit-là. J'ai donc du cosΘ sur ex' et du moins sinΘ sur ez. Je vais maintenant projeter eΦ et ex' sur ex et ey en utilisant la représentation de dessus. Si je prends le vecteur de base eΦ, que je le place vers le centre, je le retrouve là avec l'angle Φ que je retrouve à cet endroit. J'ai donc une projection en cosΦ sur ey, et en moins sinΦ sur ex. Il me reste à projeter ex'. ex' va se projeter en cosΦ sur ex et sinΦ sur ey. J'ai donc déjà l'expression de eΦ à l'aide de cosΦ et des vecteurs de base des coordonnées cartésiennes. Par contre, pour e_r et eΘ, j'ai encore ce ex' qui traîne. Je vais utiliser cette expression de ex' que je viens d'obtenir pour la remplacer dans l'expression plus haut. er égale sinΘ ex', et ex' vaut cosΦ ex plus sinΦ ey, plus cosΘ ez. Et à la fin, eΘ qui vaut cosΘ ex', vaut cosΘ [cosΦ ex plus sinΦ ey] moins sinΘ ez. Je vais donc noter verticalement les composantes des vecteurs de base e_r, eΘ, eΦ. er, c'est sinΘ cosΦ sur ex, sinΘ sinΦ sur ey et cosΘ sur ez. eΘ. CosΘ cosΦ sur ex, cosΘ sinΦ sur ey et −sinΘ sur ez. eΦ, lui, n'a pas de composante sur ez, c'est −sinΦ sur ex, cosΦ sur ey.

Notes

Summary

10m 52s

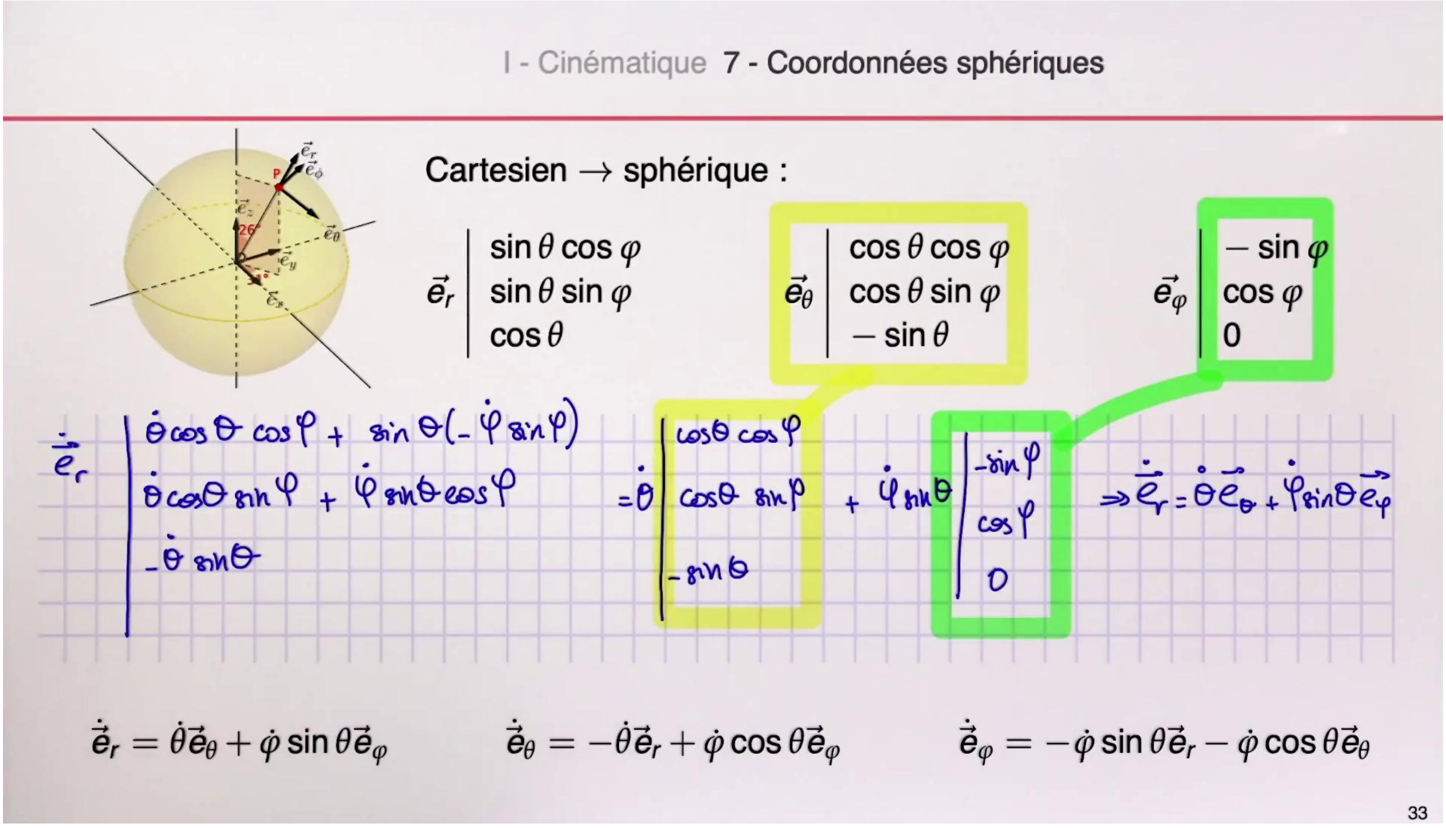


Nous avons donc maintenant la correspondance cartésienne sphérique avec l'expression des vecteurs de base des coordonnées sphériques dans les vecteurs de base cartésiens. Afin d'obtenir l'expression de la vitesse et de l'accélération, il nous faut maintenant dériver ces trois vecteurs de base. Je vais dériver e_r. C'est e_r. Je dois dériver composante par composante. J'ai ici la dérivée d'un produit, sinΘ, cosΦ, et Θ et Φ sont des fonctions du temps. Donc j'ai la dérivée d'un produit de composition. C'est sinΘ(t), cosΦ(t). Je combine les deux règles et j'obtiens donc la dérivée du sinΘ(t). La dérivée de sinus, c'est cosinus. La dérivée de Θ, c'est Θ point. Donc j'ai Θ point cosΘ, et je remultiplie par cosΦ, plus le deuxième morceau, je garde le sinus sans y toucher. La dérivée de cosinus, c'est moins sinus et la dérivée de Φ, c'est Φ point, −φ point sinΦ. La dérivée du deuxième terme me donnera du Θ point cosΘ sinΦ plus sin θ φ point cosΦ. Le troisième terme est plus simple. La dérivée de cosΘ, c'est −Θ point sinΘ. Je vais séparer les termes contenant un Θ point et les termes contenant du Φ point, donc écrire mon vecteur e_r point comme étant la somme de deux vecteurs, un multiplié par Θ point.

Notes

Summary

13m 59s

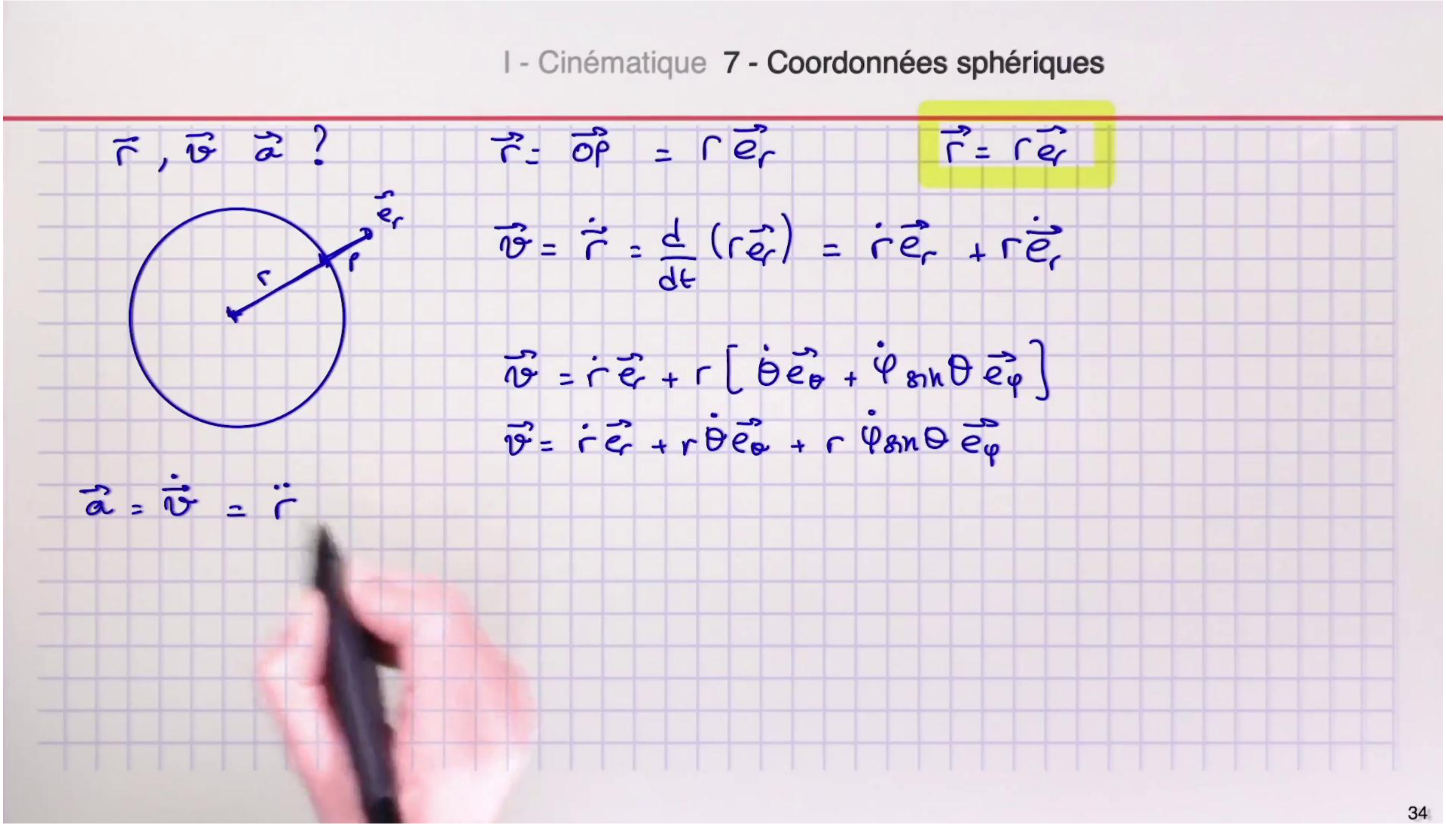


Celui qui est multiplié, c'est cosΘ cosΦ, cosΘ sinΦ et moins sinΘ. Pour le deuxième morceau, je vois que j'ai Φ point sinΘ. Φ point sinΘ dans les deux. Je vais donc sortir Φ point sinΘ, et il me reste −sinΦ, 0. On remarque ici que l'on retrouve très exactement eθ à cet endroit-là, et eΦ pour le deuxième morceau. Je peux donc écrire que e_r point est égal à θ point eΘ plus Φ point sinθ eΦ. Le calcul de la dérivée de eΘ et de eΦ se fait exactement de la manière. Je vous laisse le faire vous-mêmes et vous donne le résultat. Nous obtenons donc les dérivés des vecteurs de base e_r point, θ point eθ plus Φ point sinθ eΦ. eΘ point, moins Θ point e_r plus Θ point cosΘ eΦ, et eΦ point qui est égal à -Φ point sinΘ e_r moins Φ point cosΘ eΘ.

Notes

Summary

15m 49s

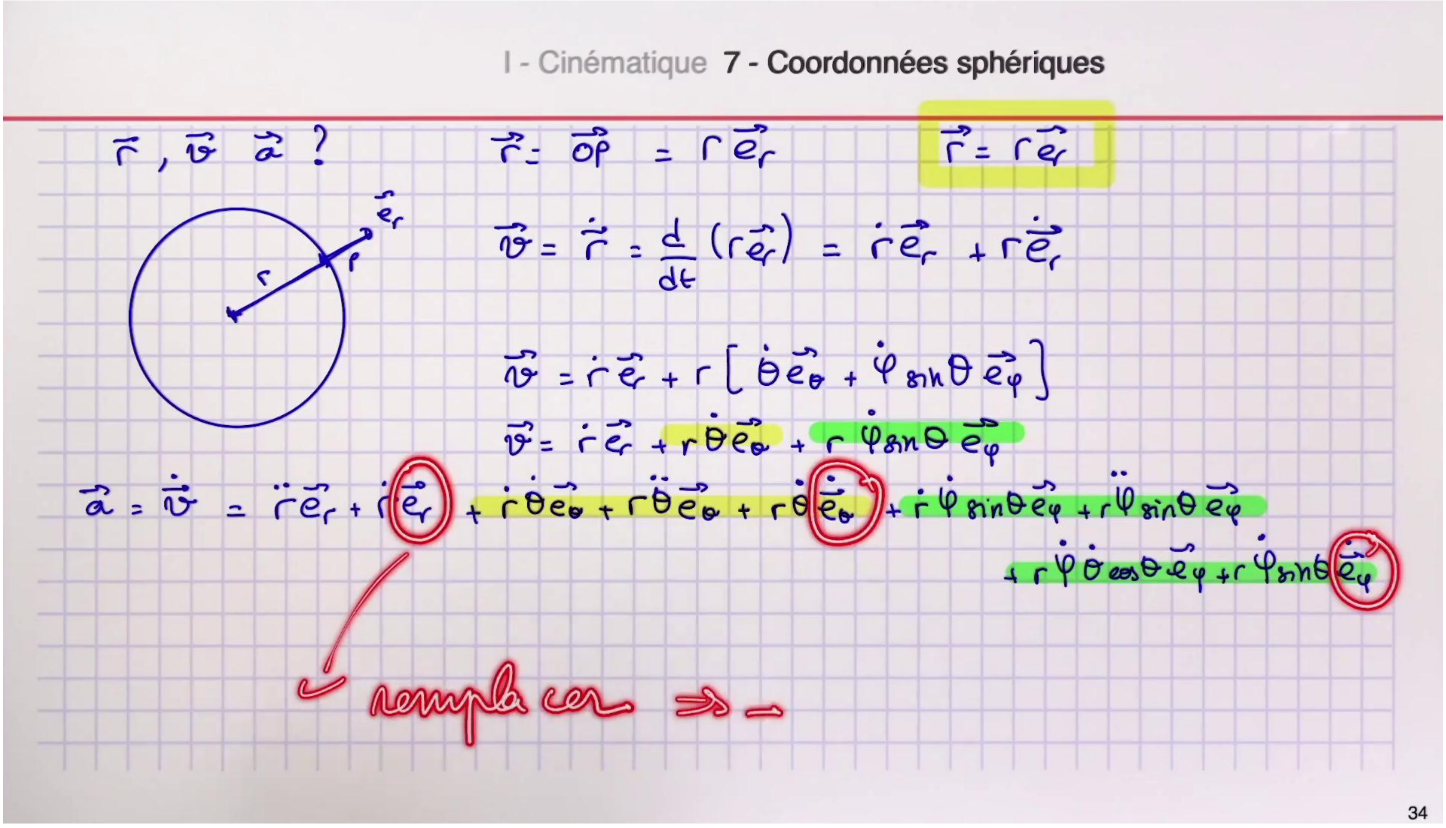


Nous avons maintenant tous les outils en place pour exprimer r, v et a. r est le vecteur OP. Or, le vecteur OP est colinéaire au vecteur de base e_r, et la norme de OP est tout simplement la coordonnée r des coordonnées sphériques. Donc, c'est r e_r. L'expression du vecteur position est extrêmement simple. en coordonnées sphériques. L'expression de la vitesse s'obtiendra en dérivant le vecteur position. C'est donc r point. C'est donc la dérivée par rapport au temps de r e_r. C'est la dérivée d'un produit. Je dois donc dériver le premier terme, c'est r point, sur le vecteur de base e_r plus r dérivée de e_r, donc e_r point. C'est là que ce que vais utiliser ce que j'ai trouvé tout à l'heure. L'expression de ma vitesse est donc r point e_r plus r e_r point. qui n'était autre que Θ point $e\Theta$ plus ϕ point sin θ $e\theta$. J'ai donc les trois composantes du vecteur vitesse sur les vecteurs de base des sphériques. V égale r point e_r plus r θ point $e\Theta$ plus r ϕ point sinθ $e\phi$. Pour obtenir l'accélération, je dois donc dériver la vitesse. Je dérive les trois termes correspondant à la vitesse. Le premier est un produit de deux termes. J'obtiens donc r deux points e_r plus r point e_r point.

Notes

Summary

17m 29s

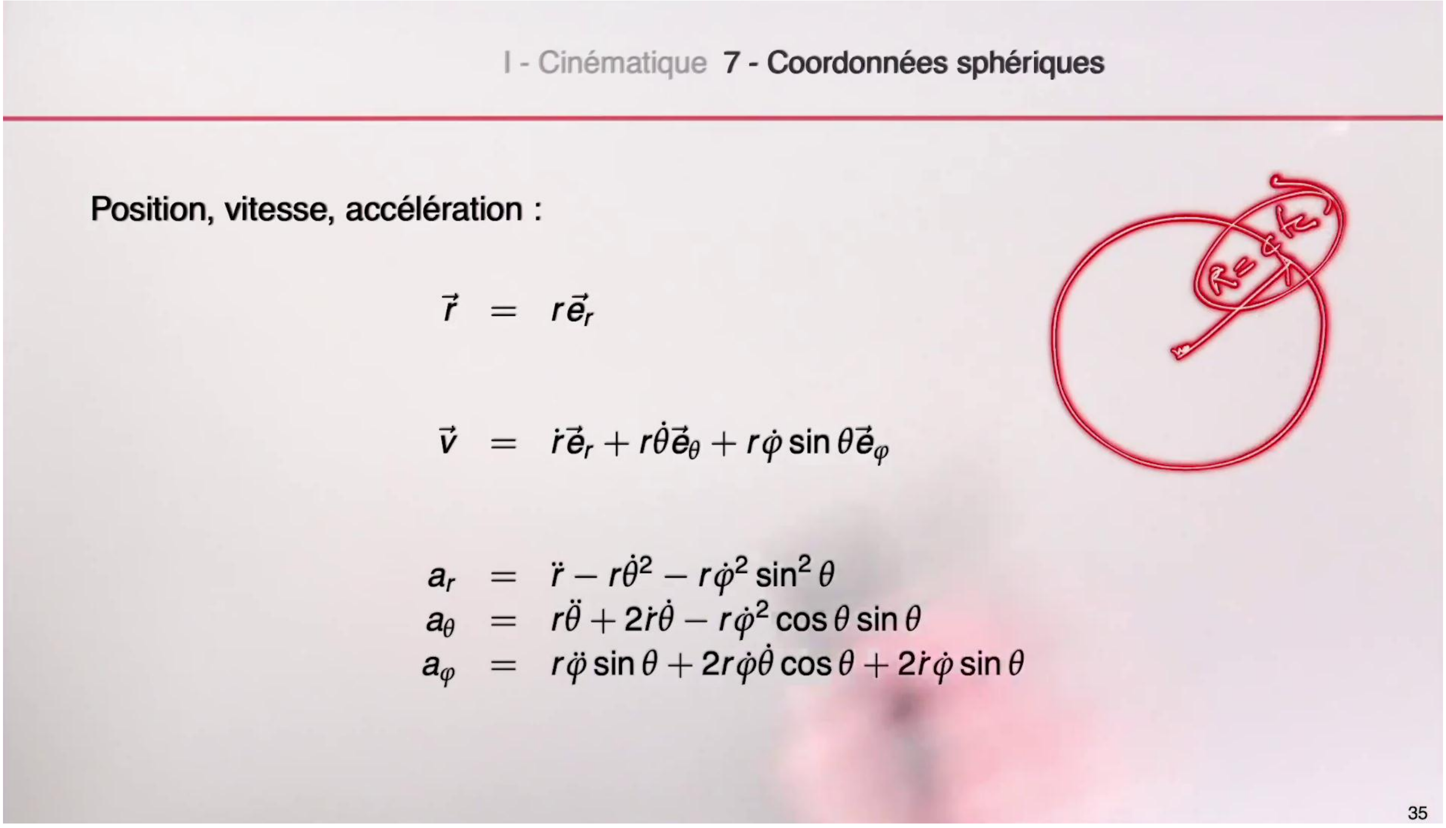


Le deuxième terme est un produit de trois. Donc r point Θ point eΘ plus r Θ deux points eΘ plus r Θ point eΘ point. C'est le deuxième terme. Le troisième est un produit de quatre termes. La logique est toujours la même. Plus r point ϕ point sinΘ eϕ plus r ϕ deux points sinΘ plus r ϕ point. La dérivée de sinus, c'est cosinus. Donc Θ point cosΘ eϕ. Enfin, r ϕ point sinΘ eϕ point. Ce morceau-là nous donne le quatrième terme. Il n me reste plus qu'à remplacer e_r point, eΘ point et eΦ point parce que nous avons trouvé précédemment. Je vous laisse faire le travail vous-mêmes, c'est juste du calcul.

Notes

Summary

19m 25s



Au final, nous obtenons l'expression de position, vitesse et accélération en coordonnées sphériques. Très simple pour le vecteur position. Un petit peu moins simple pour le vecteur vitesse, et franchement complexe, j'en conviens, pour le vecteur accélération. Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes à symétrie sphérique. Typiquement, c'est le cas dans lequel r égale constante.

Notes

Summary

20m 48s

Position, vitesse, accélération :

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \cancel{\dot{r}\vec{e}_r} + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
a_r &= \cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{r}}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta \\
a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\cancel{\dot{r}\dot{\varphi}}\sin\theta
\end{aligned}$$

35

Si r égale constante, je vais avoir r deux points et r point qui vont être égales à zéro. Cela va me permettre de simplifier un grand nombre de termes.

Notes

Summary

21m 22s

Voilà, pas facile ces coordonnées sphériques. N'hésitez pas à utiliser les outils annexes comme l'applet Geogebra et entraînez-vous à faire des projections dans l'espace à trois dimensions. Nous utiliserons ce système de coordonnés tout au long du cours.

Notes

Summary

21m 32s