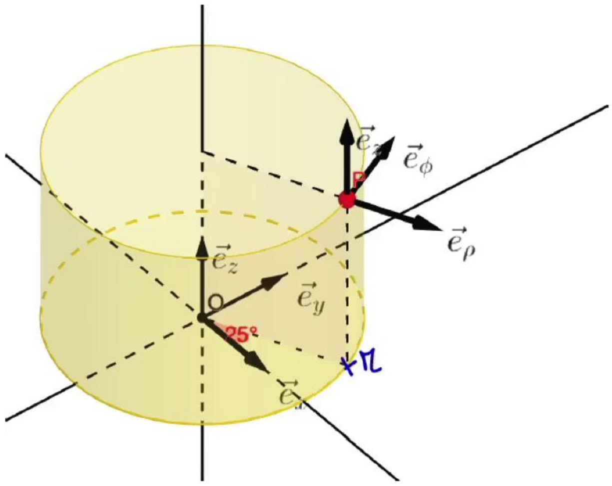
Physique générale : mécanique



Coordonnées cylindriques

Prof. Cécile Hébert

Video

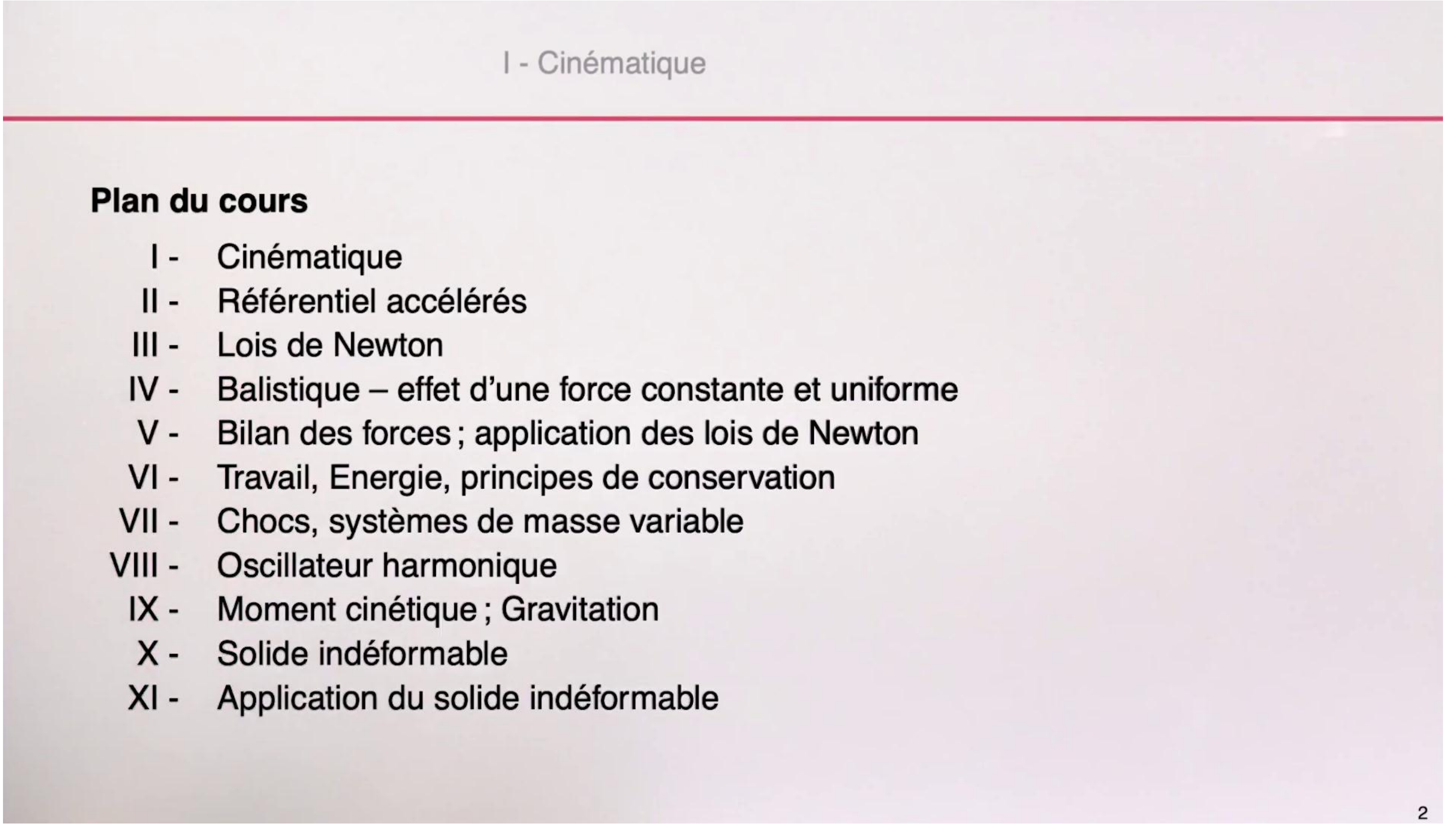
EPFL

Les systèmes de coordonnées doivent être adaptés à la symétrie du problème. Cela explique qu'il y en ait beaucoup. Parmi les systèmes à trois dimensions dans lesquels le système suit l'objet, et les vecteurs de base dépendent de la position d'objet. Le plus simple sont les coordonnées cylindriques. Elles sont simples, car elles sont basées sur les coordonnées polaires pour le plan auquel on rajoute l'axe z. Nous nous appuierons sur la connaissance des coordonnées polaires pour développer les coordonnées cylindriques.

Notes

Summary

0m 05s



Nous sommes dans le chapitre 1 : cinématique.

Notes

Summary

0m 37s

I - Cinématique

Table des matières

3

Et nous allons voir les coordonnées cylindriques.

Notes

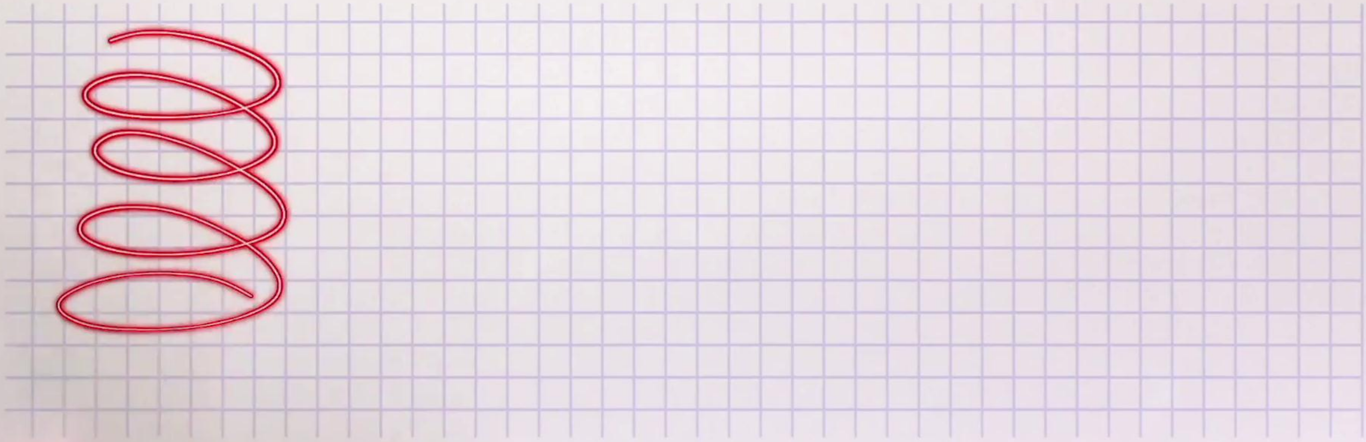
Summary

0m 41s

6 - Coordonnées cylindriques

Adaptées pour certains mouvements ou certaines symétries.

Coordonnées polaires pour (x, y) + axe z.



Comme toujours, nos coordonnées seront adaptées pour certains mouvements ou certaines symétries. Les coordonnées cylindriques, c'est tout simplement continuer avec les coordonnées polaires pour les axes (x,y) des cartésiennes et rajouter l'axe z des cartésiennes. Cela sera utile, par exemple, lorsqu'on a un mouvement de type hélicoïdal, donc sur une hélice.

Notes

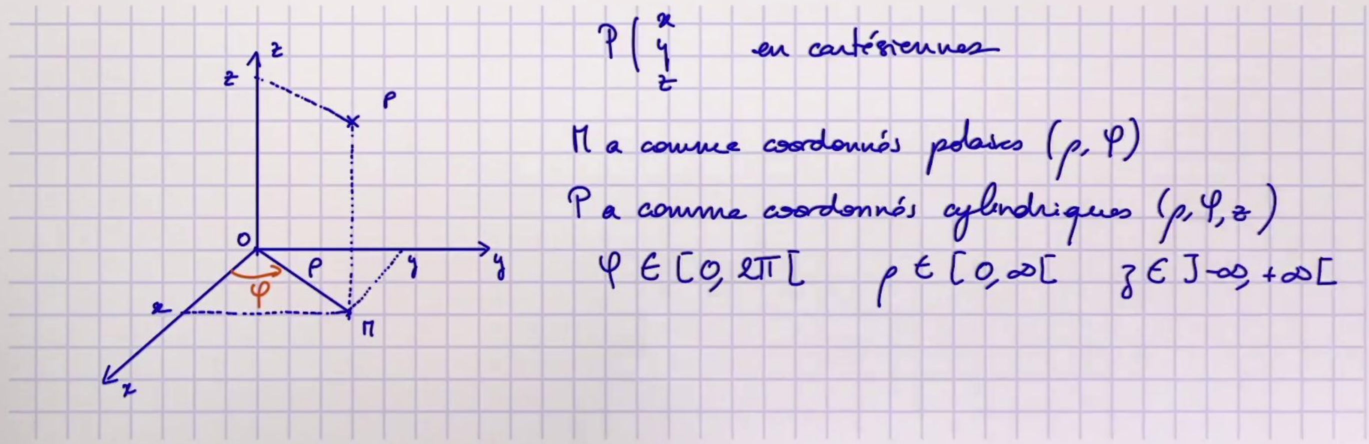
Summary

0m 47s

6 - Coordonnées cylindriques

Adaptées pour certains mouvements ou certaines symétries.

Coordonnées polaires pour (x, y) + axe z.



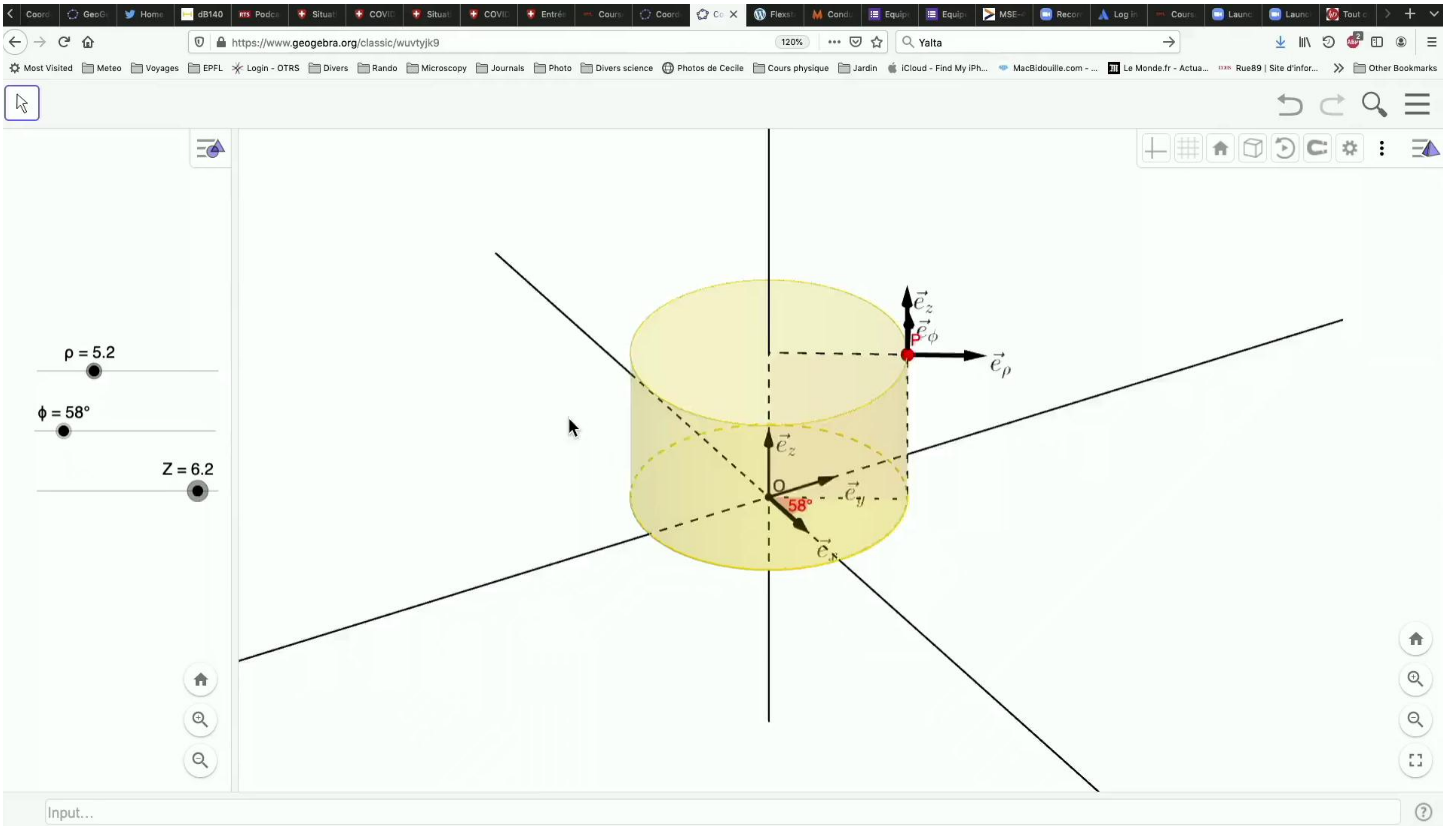
28

Nous allons faire le lien avec les coordonnées cartésiennes. Commençons par les représenter. Un point P dans l'espace peut être représenté par ses coordonnées x, y et z. Je commence par projeter P sur le plan Oxy. J'obtiens ici un point M que je projette lui-même sur l'axe Ox. Ce qui me donne la coordonnée x du point P sur l'axe Oy où je veux obtenir la coordonnée y. Et ensuite sur l'axe Oz. Pour le représenter, je vais prendre un segment colinéaire au segment MO. J'ai donc les coordonnées x, y et z M qui est dans le plan Oxy. Peut être représenté également en coordonnées polaires. Il s'agit de considérer le rayon OM qui a une longueur ρ ainsi que l'angle φ qui est l'angle entre Ox et OM. Je peux repérer le point P à l'aide de φ, de ρ. Il faut que je connaisse son altitude, donc, je vais rajouter la coordonnée z. P a comme coordonnées cylindriques ρ, φ et z. Afin de décrire le plan Oxy avec le point M, je dois faire varier φ entre zéro et 2π et ρ entre zéro et l'infini. Pour décrire maintenant l'espace, je vais en plus devoir faire varier z entre moins l'infini et plus l'infini. Je peux donc dire que φ appartient à zéro 2π, ρ appartient à zéro l'infini et z appartient à moins l'infini plus l'infini.

Notes

Summary

1m 09s

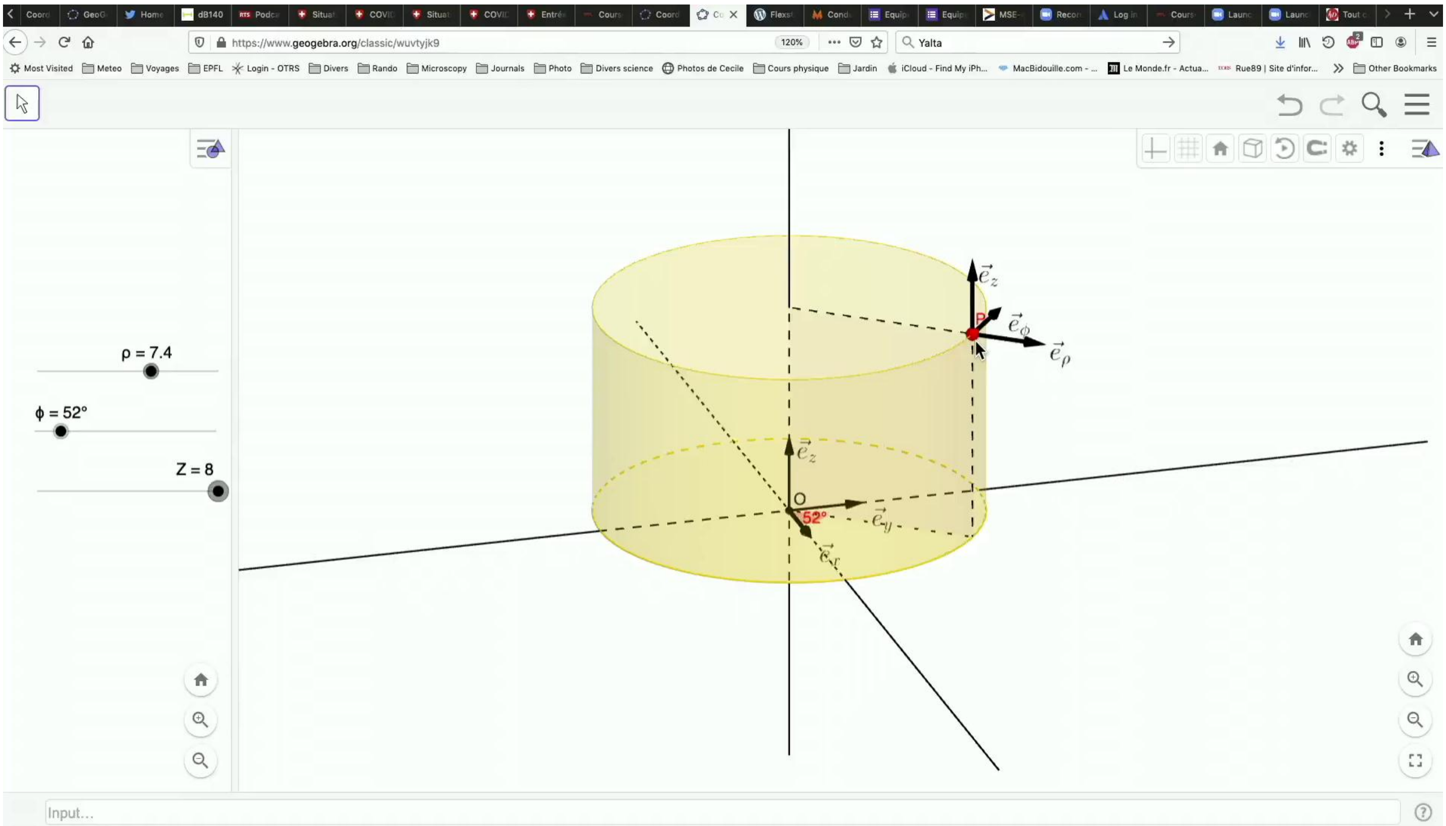


Regardons ce que cela donne dans une représentation à trois dimensions P est dans l'espace avec les coordonnées x, y et z. Pour repérer P en coordonnées cylindriques, je peux commencer par regarder le système de dessus. À ce moment-là, on voit le point O, l'axe Ox et l'axe Oy et P repéré en coordonnées polaires avec la distance entre O et la projection de P dans le plan et l'angle φ. Lorsque je varie ρ, si je l'augmente, P s'éloigne de l'axe Oz. Lorsque je fais varier φ, P tourne autour de l'axe Oz et afin de repérer l'objet en trois dimensions. J'ai tout simplement rajouté l'altitude de P qui est la coordonnée z. Regardez de dessus, je retrouve exactement les coordonnées polaires. J'ai donc les mêmes vecteurs de base de coordonnées polaires eρ et eφ. De la même manière qu'en coordonnées polaires. Lorsque je fais varier φ, on voit que ces vecteurs tournent autour de l'axe. Donc, ils ne sont pas constants. Par contre, si je fais varier la coordonnée ρ, les vecteurs eρ et eφ ne changent pas. En trois dimensions, il se passe la même chose une variation de φ fait changer eρ et eφ une variation de ρ et une variation de z ne fait changer aucun des trois vecteurs.

Notes

Summary

3m 08s

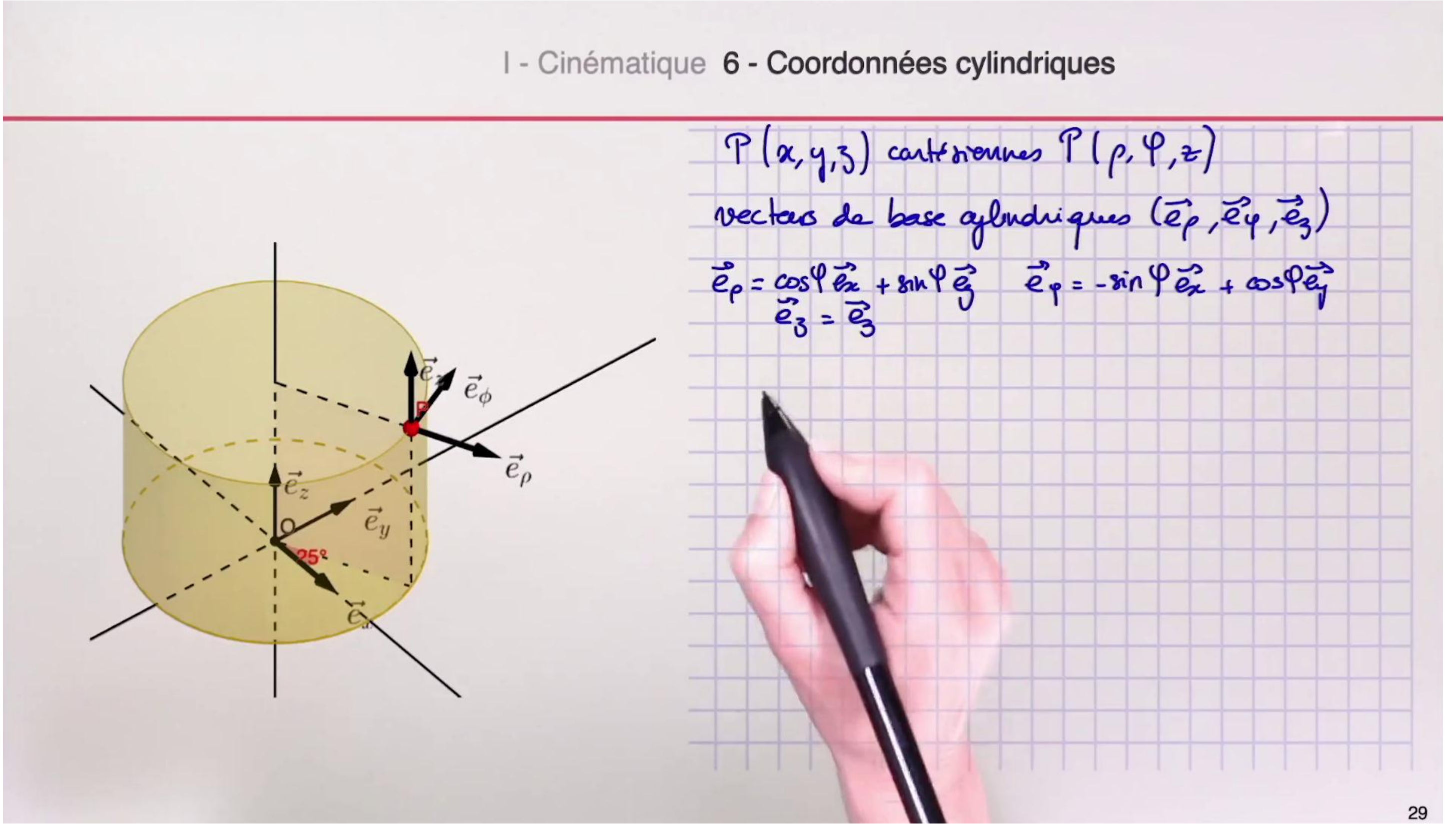


On appelle ces coordonnées, coordonnées cylindriques parce qu'on peut considérer que le point P se trouve sur la surface d'un cylindre de rayon ρ. Vous voyez ici, ce cylindre dont le rayon augmente. Afin de repérer angulairement la position de P, on peut imaginer qu'il est sur une sorte de porte verticale tournant autour de l'axe Oz. Une variation de φ fait tourner cette porte. La coordonnée z me permet de définir l'altitude de P sur la porte. Je peux aussi aller à des altitudes négatives. Ce sont des z négatives. Le but va maintenant être de faire le lien entre les vecteurs eρ, eφ, ez et les coordonnées cartésiennes, de déterminer les dérivées des vecteurs eρ, eφ et ez lorsque le point P varie, afin d'obtenir l'expression de la position, de la vitesse et de l'accélération de P en coordonnées cylindriques pour obtenir la position de P, on voit que le vecteur OP qui est le vecteur position, serait égal au vecteur OM plus le vecteur MP.

Notes

Summary

4m 50s

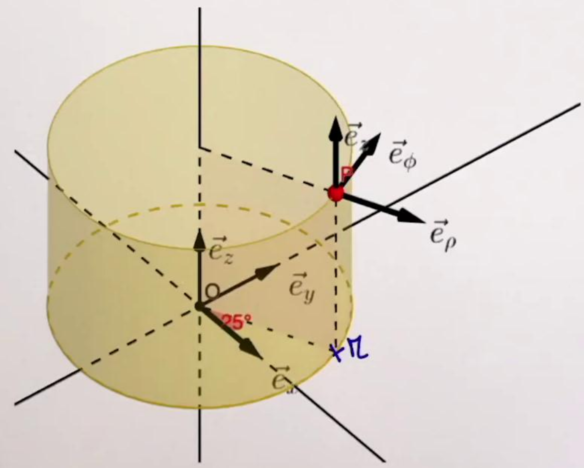


P a donc comme coordonnées x, y et z en cartésiennes. Les coordonnées cylindriques de P sont ρ, φ et z. Les vecteurs de base des coordonnées cartésiennes sont ex, ey, ez. Les vecteurs de base des coordonnées cylindriques sont pour le plan horizontal eρ et eφ. Les vecteurs de base des coordonnées polaires et liés à la coordonnée z, je retrouve le vecteur ez qui est tout simplement le même que celui des coordonnées cartésiennes représenté à la position du point P. Les vecteurs de base des coordonnées cylindriques sont donc eρ, eφ, ez, eρ et eφ étant les mêmes que ceux des coordonnées polaires. La conversion des vecteurs de base sera donc la même comme en coordonnées polaires. Je pourrais écrire : eρ est égal à cosφ ex plus sinφ ey. eφ est égal à moins sinφ ex plus cosφ ey. ez ne change pas, c'est le même en coordonnées cylindriques et en coordonnées cartésiennes. Le calcul de la dérivée de eρ par rapport au temps et la dérivée de eφ par rapport au temps lorsque φ varie se fera exactement de la même manière que pour les coordonnées polaires, ça sera la même chose. J'obtiendrai donc également eρ point égal φ point eφ et eφ point égal moins φ point eρ.

Notes

Summary

6m 09s



P(x, y, z) cartésiennes P(ρ, φ, z)

vecteurs de base cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$ $\quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y$

$\vec{e}_z = \vec{e}_z$

$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\, \vec{e}_\rho \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$

$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$

$= \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z$ $\qquad \vec{r} = \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z$

$\vec{v}$? $\qquad \vec{a}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left[\rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z\right]$

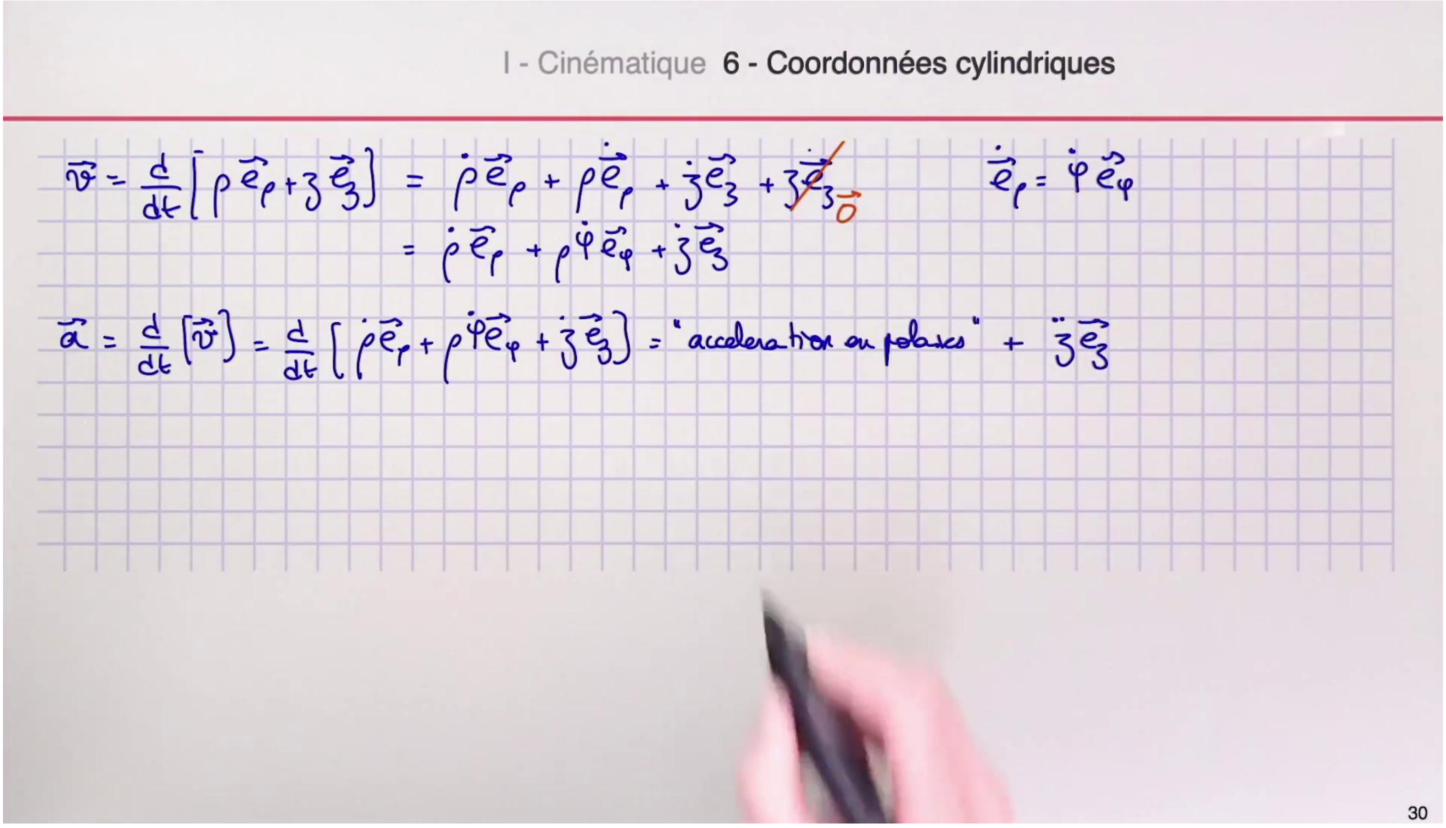
29

ez ne dépend d'aucune coordonnées qui peuvent varier au cours du temps. ez est constant, quelle que soit la façon dont P se déplace dans l'espace. ez lui, reste le même vecteur. Quoi qu'il arrive, ez point sera égal à zéro. Le but va maintenant être d'exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération à l'aide des coordonnées cylindriques ρ, φ et z et des vecteurs de base de ces coordonnées cylindriques eρ, eφ, ez. Pour obtenir le vecteur position, je vais utiliser le point intermédiaire M, projection du point P dans le plan Oxy. À ce moment-là, le vecteur OP qui est égal au vecteur r est tout simplement la somme OM plus MP. Vecteur OM s'obtient grâce aux coordonnées polaires. C'est la distance ρ, multipliée par le vecteur de base eρ. MP est un vecteur colinéaire à ez et de longueur z. C'est donc z ez. On voit que si z est positif, P est du côté Oz positif et si z est négatif, P se retrouve en dessous du plan oxy. J'ai déjà l'expression de mon vecteur position. Je vais maintenant chercher le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position. Je vais devoir dériver par rapport au temps, le vecteur que j'ai trouvé avant ρ eρ plus z ez.

Notes

Summary

8m 00s

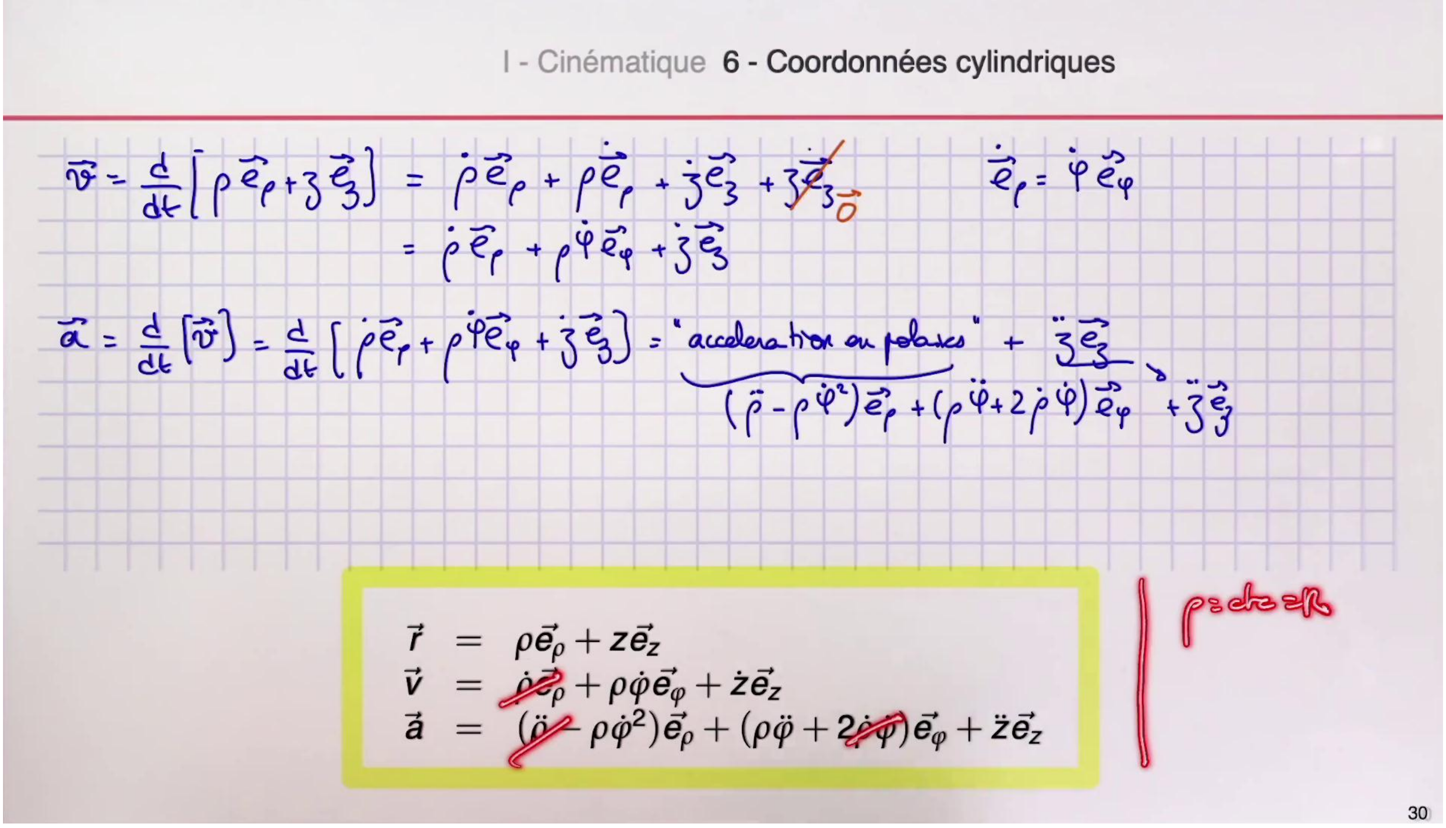


Premier terme, je dérive un produit, j'ai donc ρ point eρ plus ρ eρ point. Le deuxième terme, si je veux le faire complètement, z point ez plus z ez point. Or, nous avons dit que le vecteur ez est un vecteur constant et ne change pas, donc ez point vaut zéro. J'aurais aussi pu dire que comme je dérive le produit de quelque chose qui varie par quelque chose de constant, je n'ai qu'à conserver ici ez et je n'ai que z point ez. Là, c'est bon, c'est les coordonnées et leurs dérivées multiplié par un vecteur de base. Ici aussi. Il faut juste que je remplace ce terme-là. Nous avons vu que eρ point est égal à φ point eφ. J'obtiens donc pour la vitesse ρ point eρ plus ρ φ point eφ plus z point ez. Afin d'obtenir l'accélération, je dois dériver la vitesse. Si vous regardez bien ce qu'on fait, là, on dérive l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Je vais obtenir l'expression de l'accélération en coordonnées polaires. Plus le terme additionnel qui est la dérivée de z point ez, ez étant constant, c'est z deux points ez. Nous pouvons utiliser la formule trouvée dans l'accélération polaire ρ deux points moins ρ φ point carré eρ plus ρ φ deux points plus deux ρ point φ point eρ.

Notes

Summary

9m 48s

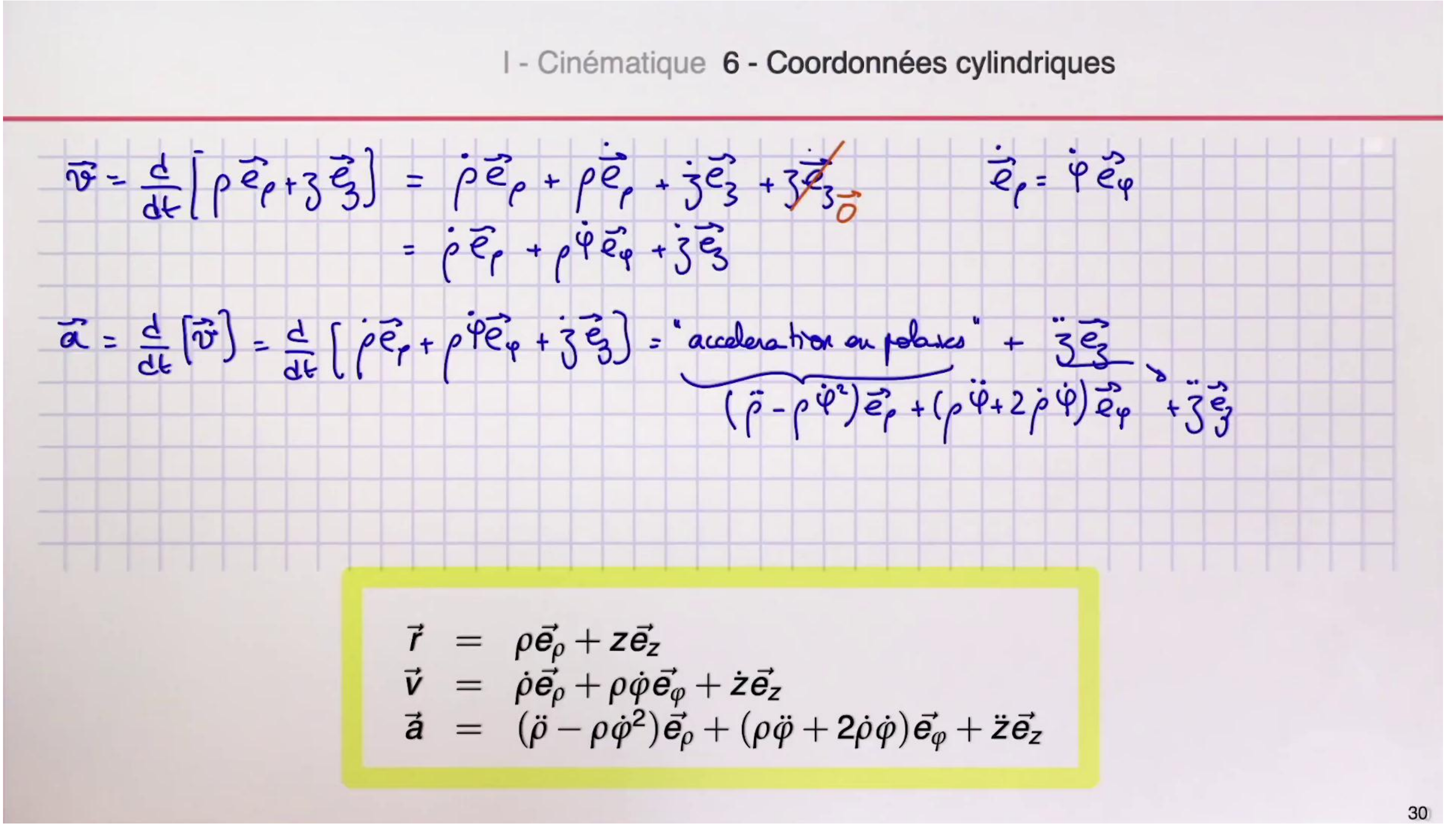


Et je dois ensuite rajouter z 2 point ez. J'ai donc exprimé les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques. En résumé, les formules que vous pouvez utiliser en coordonnées cylindriques sont ici et ce sont vraiment les formules les plus générales pour un mouvement quelconque. Bien évidemment, ce système de coordonnées devra être adapté au problème. Si par exemple ρ égale constante égale r, On voit que ρ point ρ 2 point se simplifiera.

Notes

Summary

11m 25s



Ce sera donc à vous de décider si le problème requiert les coordonnées cartésiennes, des coordonnées cylindriques ou un autre système.

Notes

Summary

12m 00s

Voilà, nous avons donc vu les coordonnées cylindriques. Ce ne sont peut-être pas les plus répandues, mais elles sont un peu plus simples que les coordonnées sphériques. D'une manière générale, comme pour tout, c'est l'entraînement qui vous permettra de maîtriser cet outil.

Notes

Summary

12m 07s