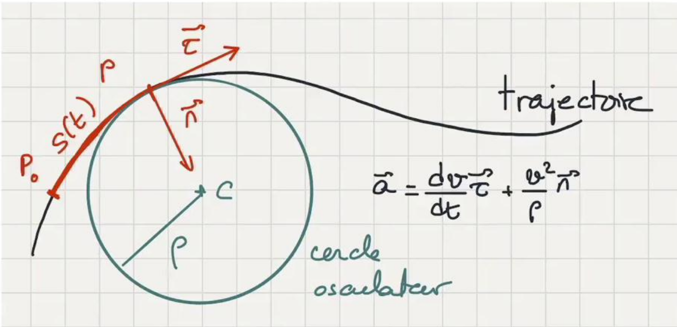
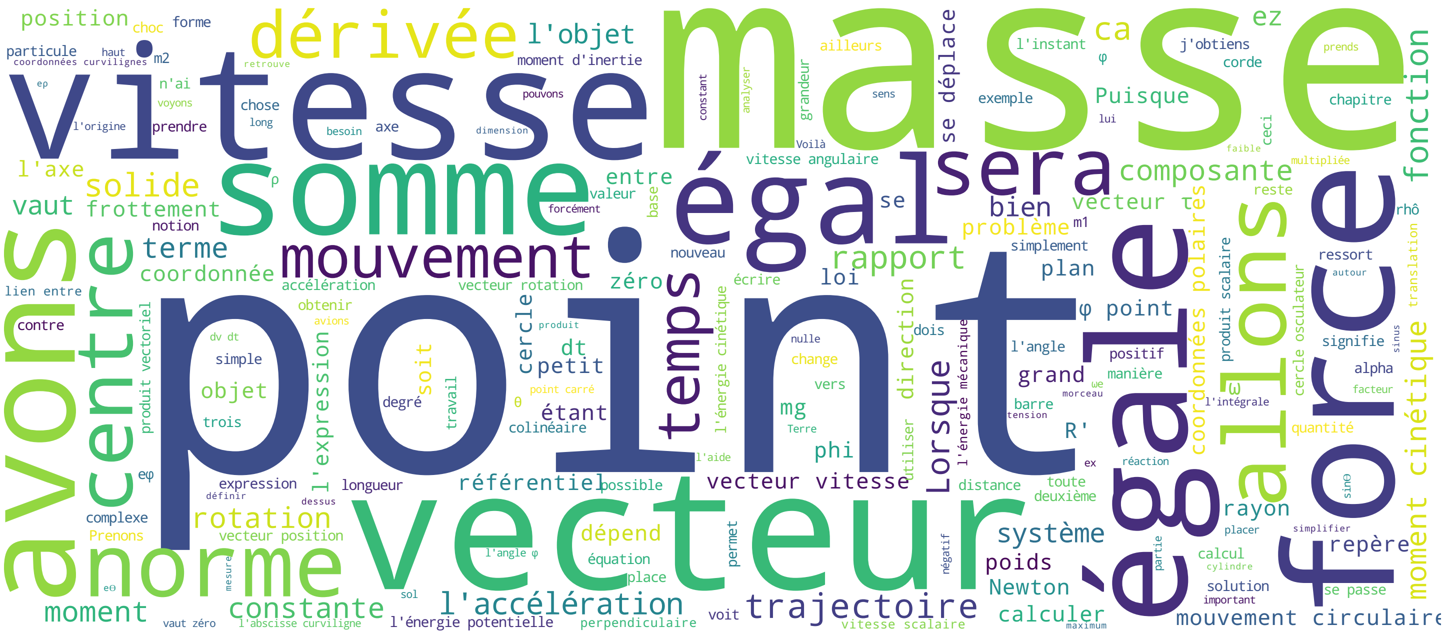
Physique générale : mécanique



Coordonnées curvilignes

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

Bonjour ! Dans cette vidéo, nous allons aborder une deuxième manière de repérer un objet dans le plan. C'est ce qu'on appelle les coordonnées curvilignes. Dans ce cas-là, on suit l'objet sur sa trajectoire. Ce système de coordonnées existe aussi à trois dimensions mais il est beaucoup plus complexe. Il demande un peu de calcul matriciel de produit vectoriel. Pour ce que nous voulons faire, deux dimensions nous suffiront.

Notes

Summary

0m 05s

I - Cinématique

Plan du cours

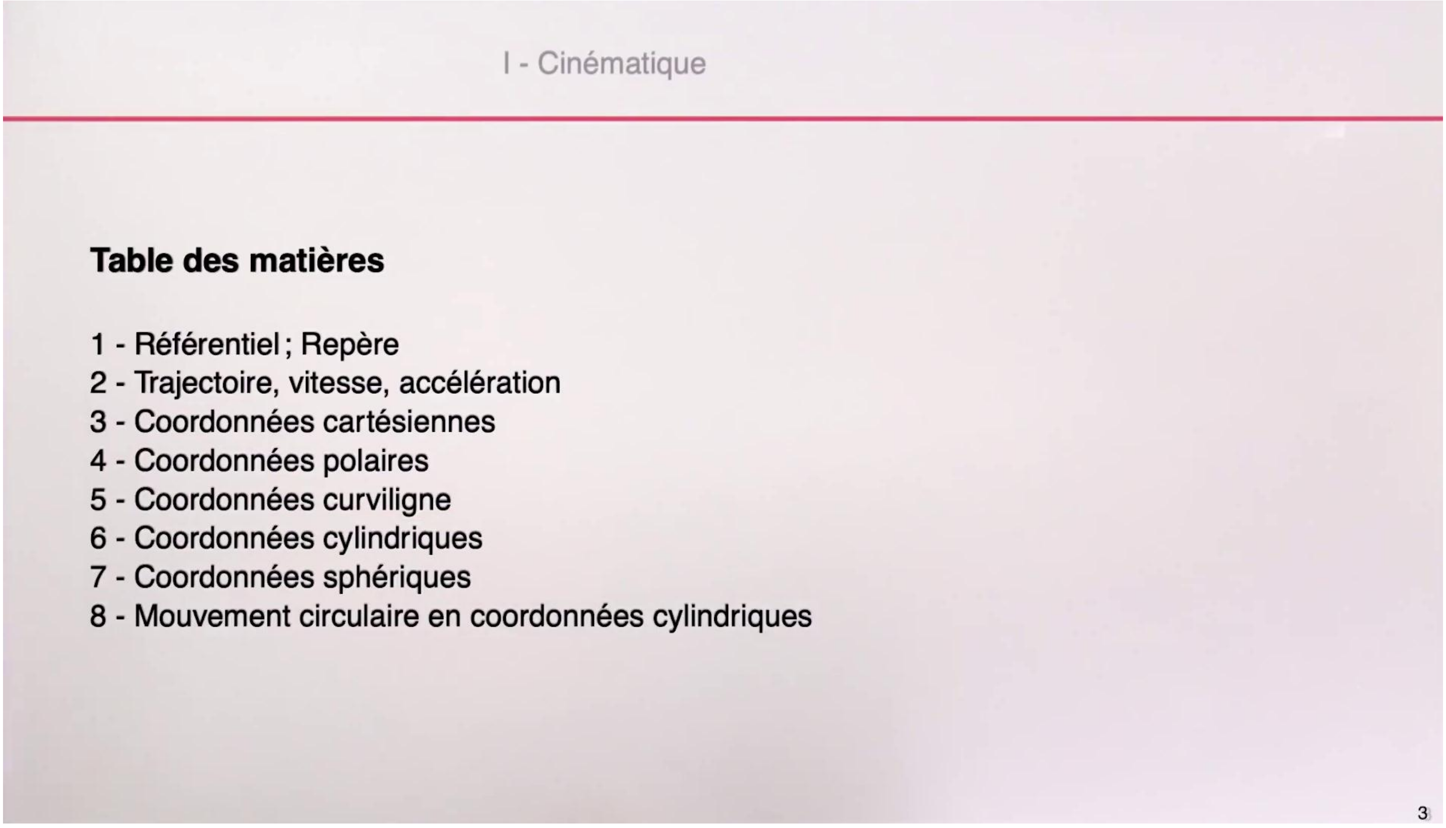
I - Cinématique
II - Référentiel accélérés
III - Lois de Newton
IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
V - Bilan des forces ; application des lois de Newton
VI - Travail, Energie, principes de conservation
VII - Chocs, systèmes de masse variable
VIII - Oscillateur harmonique
IX - Moment cinétique ; Gravitation
X - Solide indéformable
XI - Application du solide indéformable

2

Notes

Summary

0m 29s



Nous sommes dans le chapitre 1 sur la cinématique et nous allons voir les coordonnées curvilignes, aussi appelées : « Repères de Frenet ».

Notes

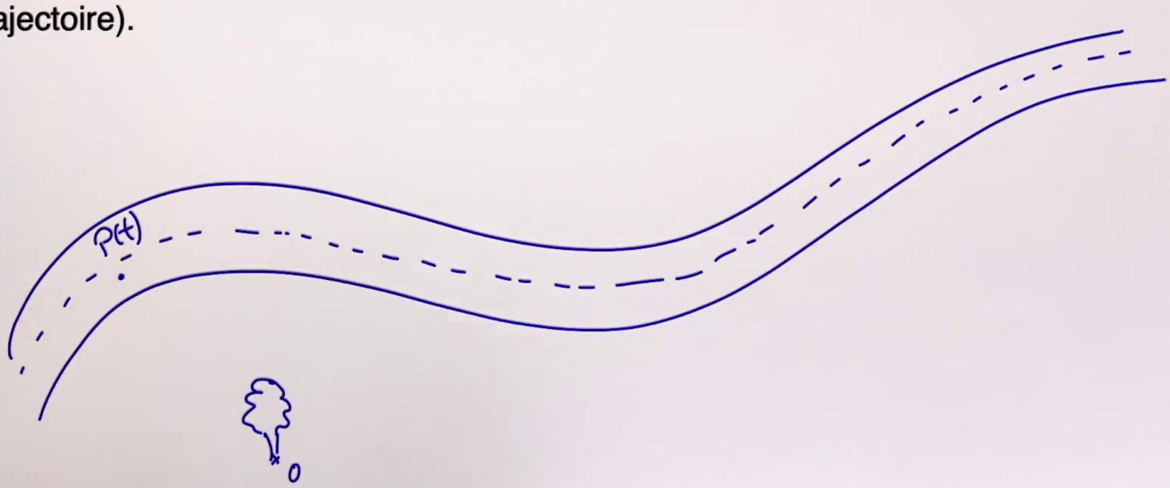
Summary

0m 30s

5 - Coordonnées curviligne (repère de Frenet)

Cas général Mouvement dans le plan.

Point de vue de l'automobiliste (point matériel) sur une route de plaine (trajectoire).

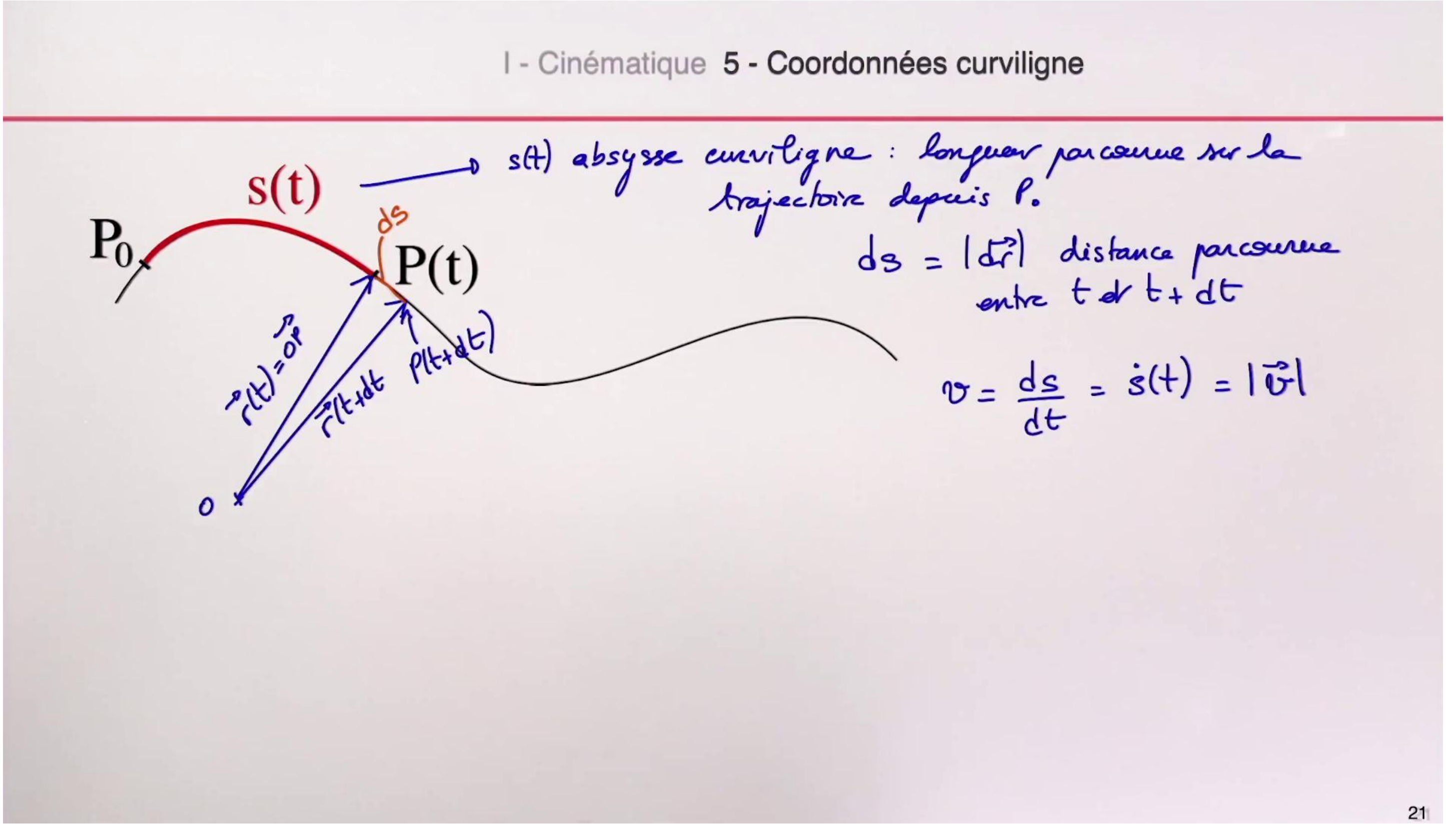


Commençons par nous placer dans le cas général ou presque, car le mouvement que nous allons étudier est dans le plan. Nous allons nous placer du point de vue de l'automobiliste considéré comme un point matériel sur une route de plaine, donc dans un plan et nous allons regarder le mouvement du point de vue de la trajectoire. Donc, imaginez la route vue de dessus. De toute façon, elle est dans un plan horizontal. Cette route matérialise la trajectoire de l'automobile. Nous conservons une origine du référentiel « O » par exemple matérialisée par un arbre. Nous allons prendre une origine des temps T = 0, ce qui nous mettra un point P0 d'où la voiture part et nous allons regarder vitesse et accélération sur la trajectoire et vraiment par rapport à cette trajectoire.

Notes

Summary

0m 39s

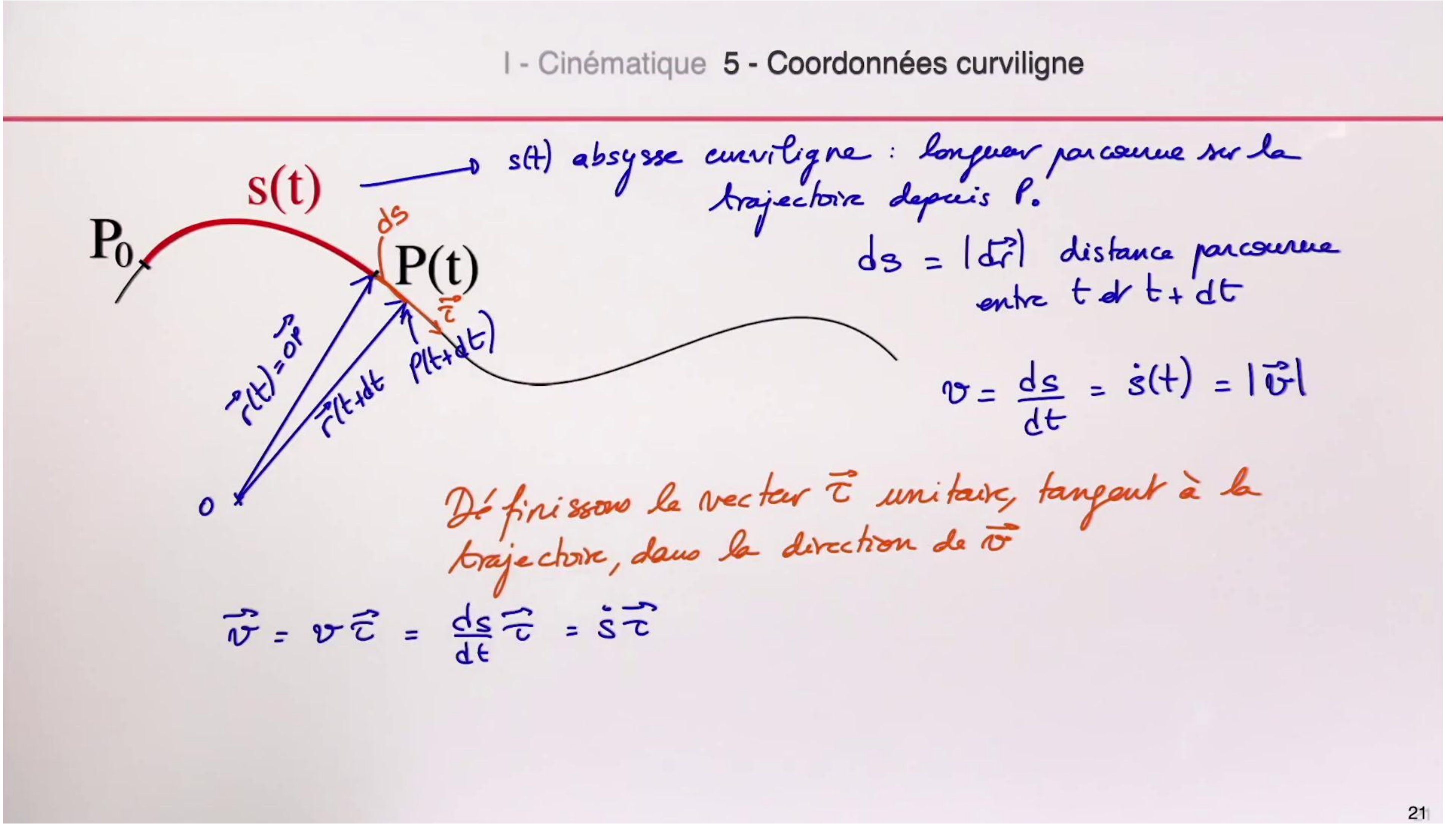


Sur un schéma symbolique, cela nous donne la trajectoire, le point pour T = 0, P0 et à l'instant T, l'automobiliste est en P(t). Entre T = 0 et T, il a parcouru sur la trajectoire une distance S(t). C'est vraiment la distance calculée le long de la trajectoire. C'est ce que vous indique votre voiture, le compteur kilométrique de la voiture. Imaginez que vous la mesurez avec un mètre souple que vous déroulez le long de la route. S(t) est appelé « l'abscisse curviligne ». C'est la longueur parcourue sur la trajectoire depuis P0. Si nous recollons les morceaux avec ce que nous avons déjà vu, nous avions l'origine du référentiel « O » et la mesure du vecteur position r(t) mesurée depuis O. C'est le vecteur OP. À t + dt, l'automobiliste est en P(t + dt) et le vecteur position r(t + dt). Il a parcouru le long de la trajectoire une distance « ds ». Si « dt » est petit, « ds » est presque une portion de droite. Donc « ds » est égal à la norme du vecteur déplacement infinitésimal « dr ». La vitesse scalaire est égale à ds/dt. On peut aussi la noter s point (t), la dérivée de l'abscisse curviligne. C'est la norme du vecteur vitesse. On voit donc qu'on obtient un lien entre la norme du vecteur vitesse et la dérivée de l'abscisse curviligne.

Notes

Summary

1m 36s

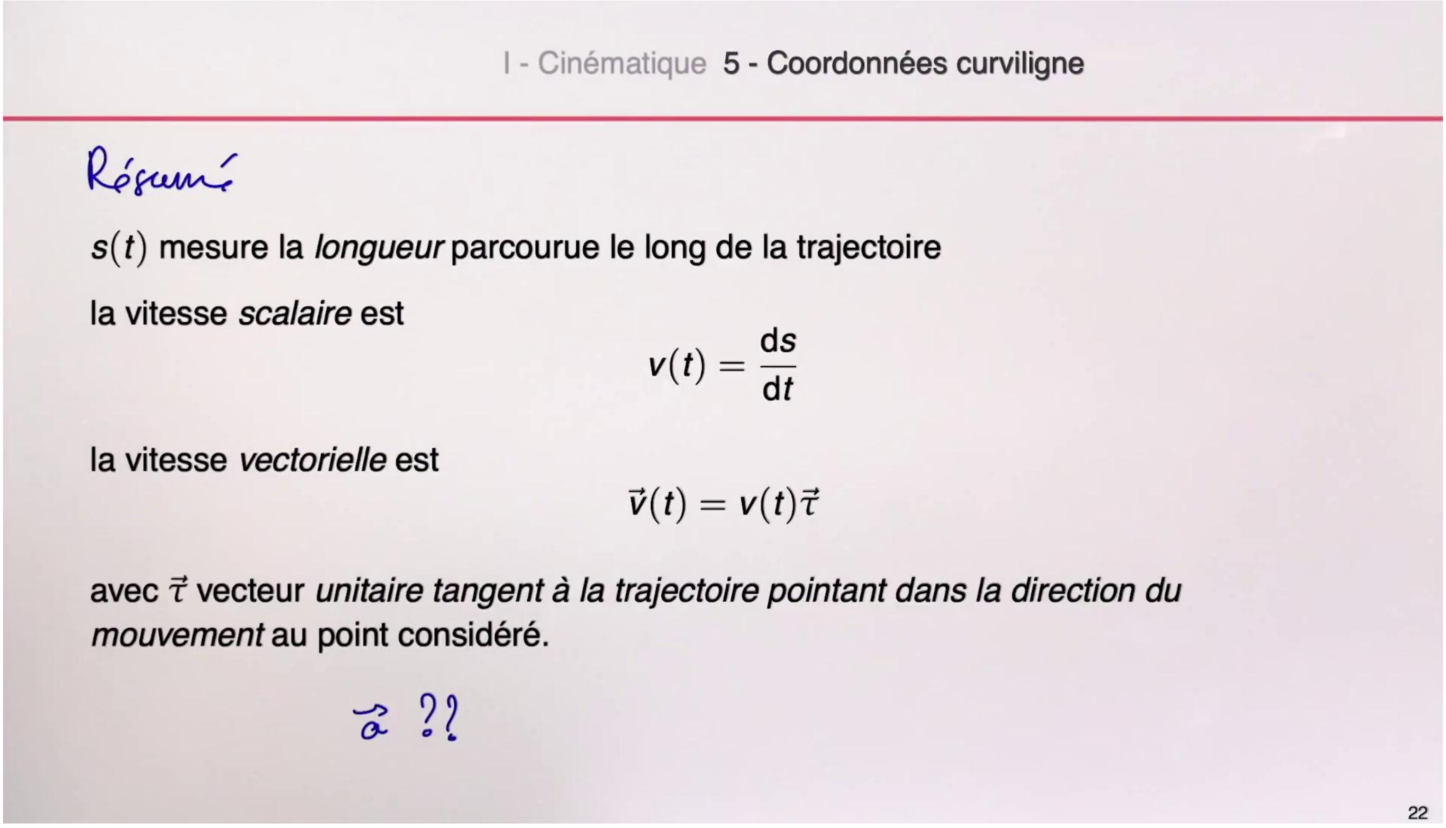


Mais ce que nous voulons, c'est le vecteur vitesse. Donc, il va falloir que je transforme ceci en un vecteur. J'ai la norme, mais il me manque la direction et le sens. Pour cela, je vais définir un nouveau vecteur τ. Il sera unitaire, tangent à la trajectoire dans la direction de v. Je peux donc représenter « τ » sur mon schéma et grâce à cette définition, je peux écrire que « le vecteur vitesse v = v τ soit ds/dt vecteur τ, ou bien S point multiplié par le vecteur τ ». J'ai donc exprimé mon vecteur vitesse en l'appuyant sur la trajectoire grâce à la définition d'un nouveau vecteur unitaire qui est ici le vecteur τ. On voit qu'au fur et à mesure que le point P se déplace sur la trajectoire, le vecteur τ change. Il reste unitaire, mais il change de direction. Si l'automobile fait demi-tour, le vecteur τ pointera dans l'autre sens.

Notes

Summary

3m 16s

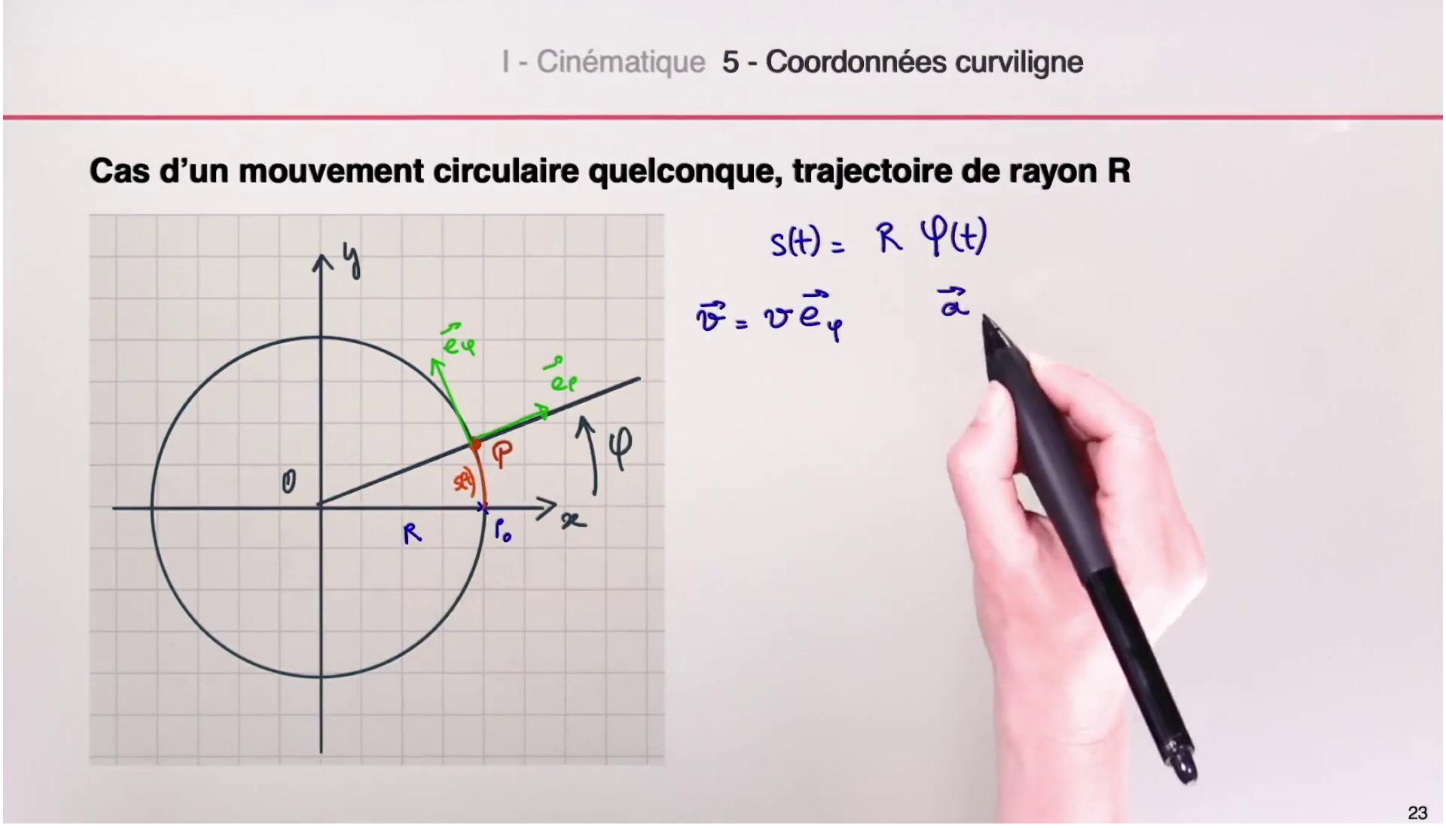


En résumé, jusqu'à présent, nous avons défini l'abscisse curviligne s(t) mesurant la longueur parcourue le long de la trajectoire, la vitesse scalaire est ds/dt ou s point. La vitesse vectorielle, elle, est v(t) en vecteur égale vitesse scalaire multipliée par τ avec τ défini comme « un vecteur unitaire tangent à la trajectoire, pointant dans la direction du mouvement au point considéré ». Nous avons la vitesse, mais il nous manque l'accélération. C'est ce que nous allons exprimer maintenant.

Notes

Summary

4m 22s

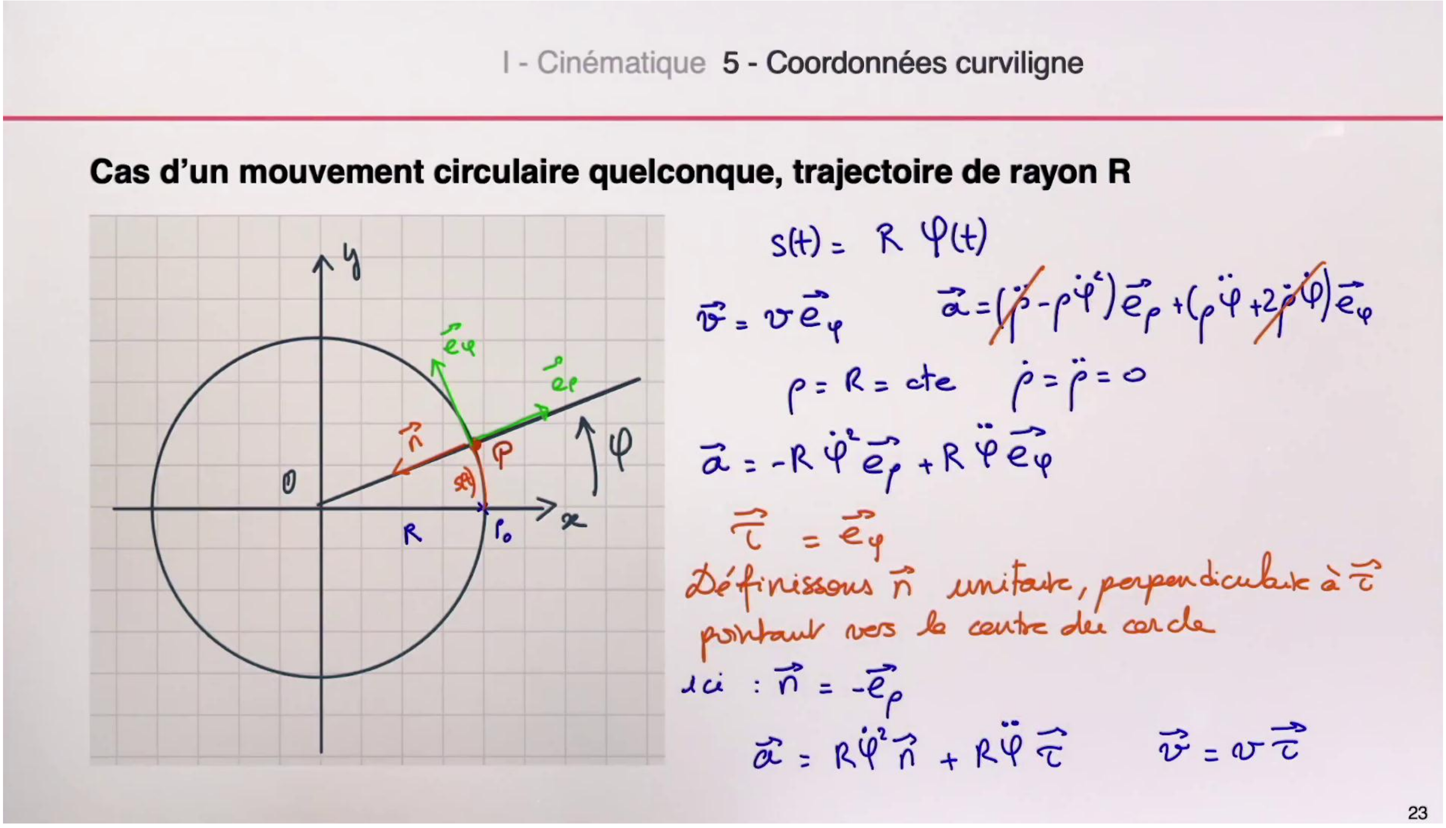


Nous allons commencer par simplifier un peu le problème et prendre le cas d'un mouvement circulaire et nous prendrons un mouvement circulaire quelconque, donc pas forcément uniforme et sur une trajectoire de rayon R. Nous sommes donc toujours dans le plan, ici « o, x, y », et le point P se déplace sur un cercle, mais pas forcément à vitesse constante. Il peut même faire demi-tour. Nous allons connecter les choses avec les coordonnées polaires en utilisant l'angle φ qui est l'angle ox, op ainsi que la distance OP qui est égale à ρ. Prenons comme origine des temps, lorsque le point P est sur l'axe ox. Nous appellerons ce point-là « P0 ». L'abscisse curviligne est donc la distance mesurée sur le cercle P0. P, c'est s(t). Si R est le rayon du cercle, nous avons donc s(t) = R φ et l'angle φ dépend du temps. En reprenant les coordonnées polaires, nous avions la vitesse vectorielle qui est égale à la norme de v multipliée par le vecteur de base eφ. Les vecteurs de base des coordonnées polaires étant ici eρ et eφ. Puisque nous cherchons l'accélération, commençons par l'accélération en coordonnées polaires. a = (ρ deux points - ρ φ point carré e ρ + ρ φ deux points + 2ρ point φ point) eφ.

Notes

Summary

4m 56s



$s(t) = R\,\varphi(t)$

$\vec{v} = v\,\vec{e}_\varphi \qquad \vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + \cancel{2\dot{\rho}\dot{\varphi}})\vec{e}_\varphi$

$\rho = R = cte \qquad \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi$

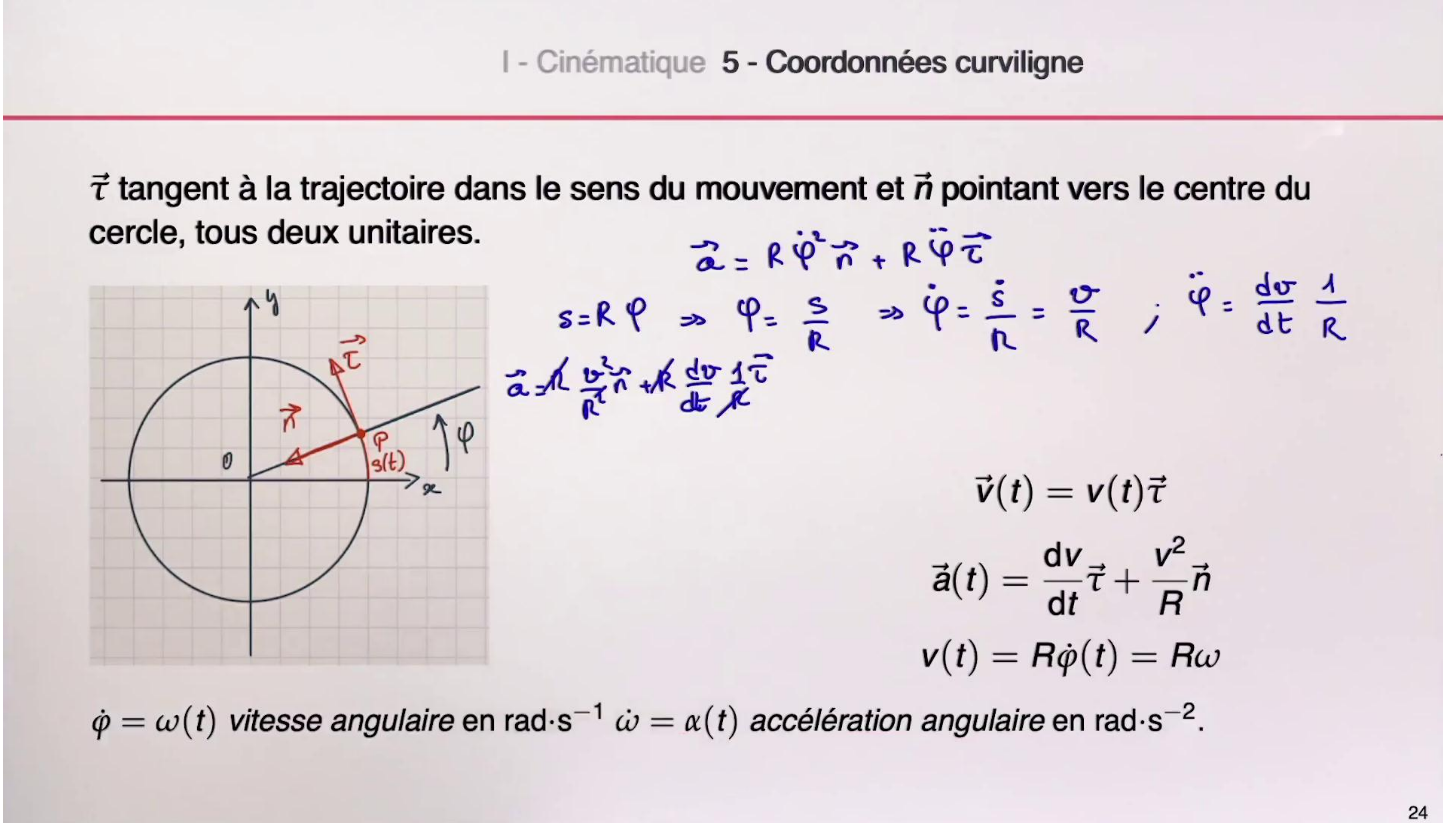
$\vec{a} = R\dot{\varphi}^2\vec{n} + R\ddot{\varphi}\vec{\tau} \qquad \vec{v} = v\vec{\tau}$

Puisque nous sommes sur un cercle, ρ = R = à une constante, donc ρ point = ρ deux points = 0. Cela va nous permettre de simplifier l'expression de a. Ce terme disparaît, celui-ci également. Et en remplaçant ρ par R, nous obtenons l'accélération qui est égale a= -R φ point carré eρ + Rφ deux points eφ. Le vecteur τ des coordonnées curvilignes est le vecteur qui au point P est tangent à la trajectoire et pointe dans la direction du vecteur vitesse. C'est donc aussi le vecteur eφ. J'ai τ = eφ, pour avoir un repère complet à deux dimensions, je vais avoir besoin d'un deuxième vecteur. Je vais donc définir un nouveau vecteur « n », unitaire perpendiculaire à τ pointant vers le centre du cercle. Dans le cadre de ce mouvement circulaire quelconque, j'ai donc le vecteur n qui est égal à moins le vecteur eρ. Je peux donc remplacer -eρ par n et eφ par τ. Cela va me donner l'expression de l'accélération « a = Rφ point carré vecteur n + Rφ deux points vecteur τ ». Et comme la vitesse est égale à v eφ, elle est également égale à v vecteur τ. J'ai donc exprimé ma vitesse à l'aide des coordonnées curvilignes et de la norme de la vitesse qui est égale à S point. L'accélération, par contre, a encore ce φ point carré et φ deux points.

Notes

Summary

6m 33s



Nous avons vu le lien entre l'abscisse curviligne et l'angle φ. S = R φ. φ étant égal à S/R, φ point va être égal à S point/R ce qui n'est autre chose que V/R. Et φ deux points va être égale à v point ou dv/dt, la dérivée de la norme de la vitesse par rapport au temps divisée par le rayon. En introduisant ceci dans l'accélération, je vais obtenir a = R v2/R2 vecteur n + R dv/dt. 1/R vecteur τ. Je peux simplifier « dr ». Et cela me permet au final d'avoir l'expression de la vitesse. Je l'avais déjà. V(t) = V(t) τ. Mais aussi l'expression de l'accélération qui est égale à dv/dt dérivée de la norme de la vitesse sur le vecteur τ + v2/R sur le vecteur n. On retrouve bien pour un mouvement circulaire la norme de V(t) = Rφ(t) = Rω, ω étant la vitesse angulaire. Puisque je n'ai pas forcément un mouvement circulaire uniforme, φ point qui est ω dépend du temps. C'est la vitesse angulaire en radians par seconde. La dérivée de ω par rapport au temps ω point est aussi notée α(t), accélération angulaire en rad. S-2 ».

Notes

Summary

8m 16s

I - Cinématique **5 - Coordonnées curviligne**

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \text{cte} \qquad \alpha = 0$$

25

Comme chaque fois qu'on a défini quelque chose de nouveau, il est important de vérifier qu'on peut reconnecter avec ce qu'on avait déjà vu. Nous avions un mouvement circulaire quelconque, mais que se passe-t-il si je prends un cas particulier de mouvement circulaire uniforme ? À ce moment-là, la vitesse scalaire est constante et la vitesse angulaire est constante. Cela signifie que la norme de la vitesse est constante. Attention, pour un mouvement circulaire, le vecteur vitesse n'est pas constant, mais sa norme est constante. Donc, la dérivée de la norme de la vitesse par rapport au temps vaut zéro. Introduit dans l'expression de la vitesse, cela ne change rien. V(t) = V(t) τ, mais par contre pour l'accélération, le terme sur τ disparaît et il ne me reste que le terme sur n. Et j'ai a(t) = v2/R vecteur n. Dans ce cas particulier, φ point qui est la vitesse angulaire qui est aussi égale à V/R est une constante. L'accélération angulaire α = 0.

Notes

Summary

10m 06s

I - Cinématique 5 - Coordonnées curviligne

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \text{cte}$$

ω *pulsation*. $\omega = 2\pi f$ avec f *fréquence* (en tours/s)

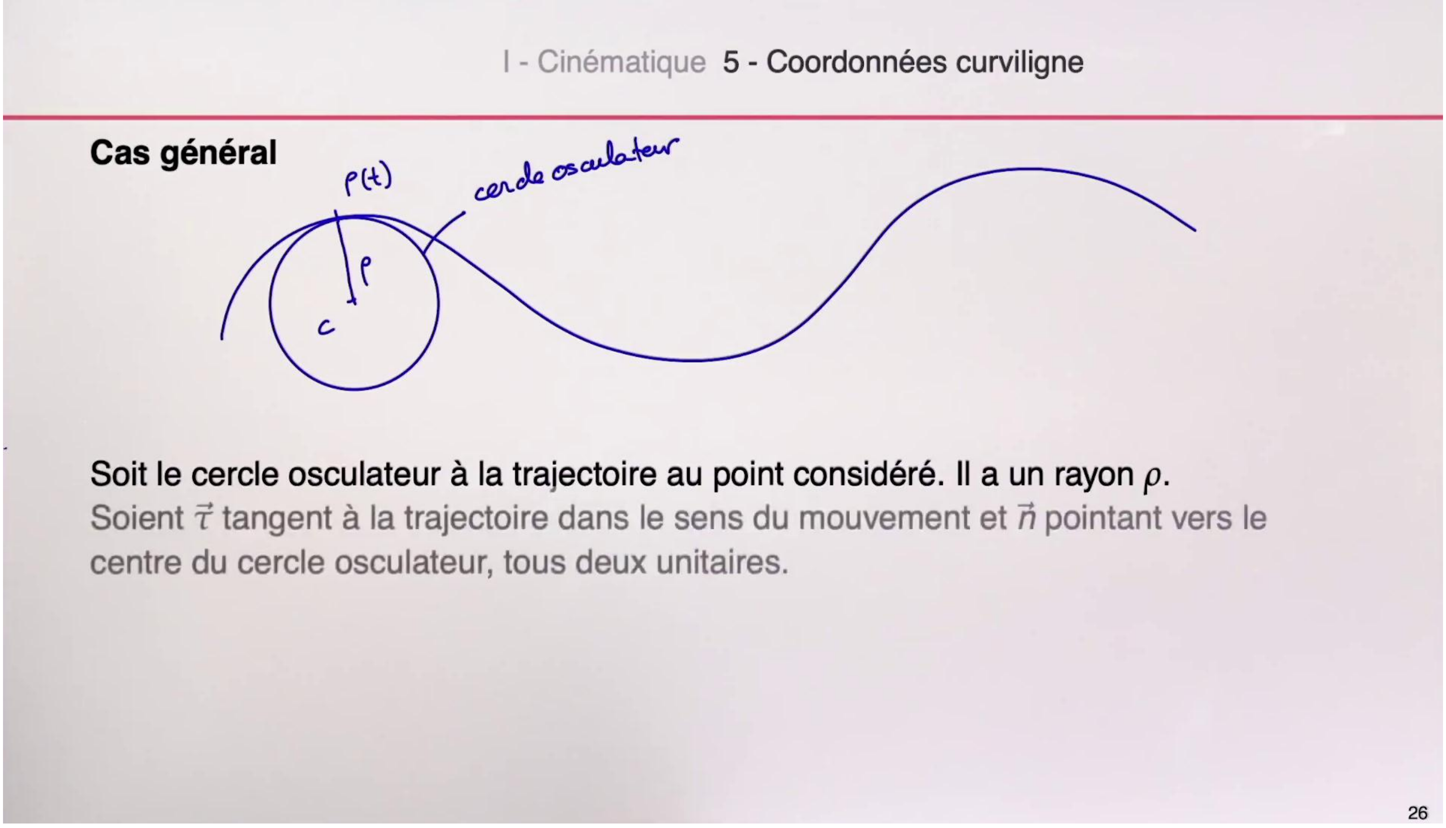
25

Et je rappelle qu'ω est appelé « la pulsation ». C'est égal à 2πf avec f la fréquence en tour par seconde ». On retrouve bien ce que nous avions vu à l'aide des coordonnées polaires.

Notes

Summary

11m 06s

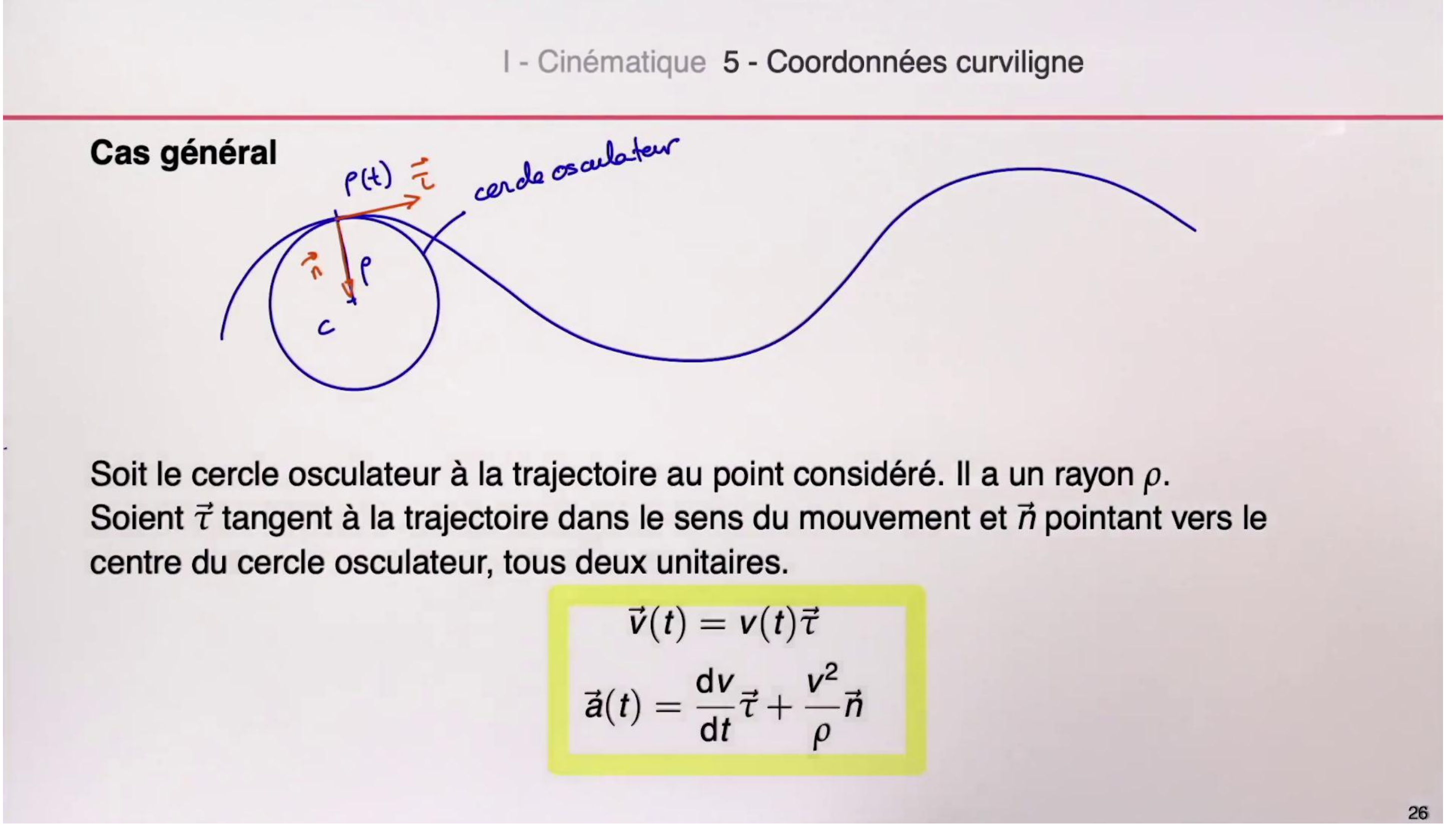


Vous allez me dire que : « C'est bien joli, mais finalement, on a trouvé quelque chose qui fait double emploi avec les coordonnées polaires ». C'est vrai pour un mouvement circulaire, qu'il soit uniforme ou pas. Et vous pourrez utiliser l'un ou l'autre des repères. Ce sera votre choix. Mais l'intérêt du repère de Frenet, c'est le cas général. Reprenons le cas général de mon objet P qui se déplace sur une route plane. À l'instant T, il est en P(t). Je n'ai pas un mouvement circulaire, mais je vais chercher à l'instant T le cercle qui se rapproche le plus possible de la trajectoire. Il s'appelle « le cercle osculateur ». Il a un centre « c » et un rayon qui, lui, dépend de l'endroit où se trouve le point P. Si je me place à un autre endroit de la trajectoire, on voit ici qu'on aura un cercle osculateur avec un rayon beaucoup plus grand. D'une façon générale, plus la trajectoire est plate, plus le rayon du cercle osculateur est grand. Son rayon est « ρ ». J'ai donc défini le cercle osculateur à la trajectoire, au point considéré et il a un rayon « ρ ». Je vais maintenant définir mes deux vecteurs, « soit τ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et n pointant vers le centre du cercle osculateur, tous deux unitaires ».

Notes

Summary

11m 19s

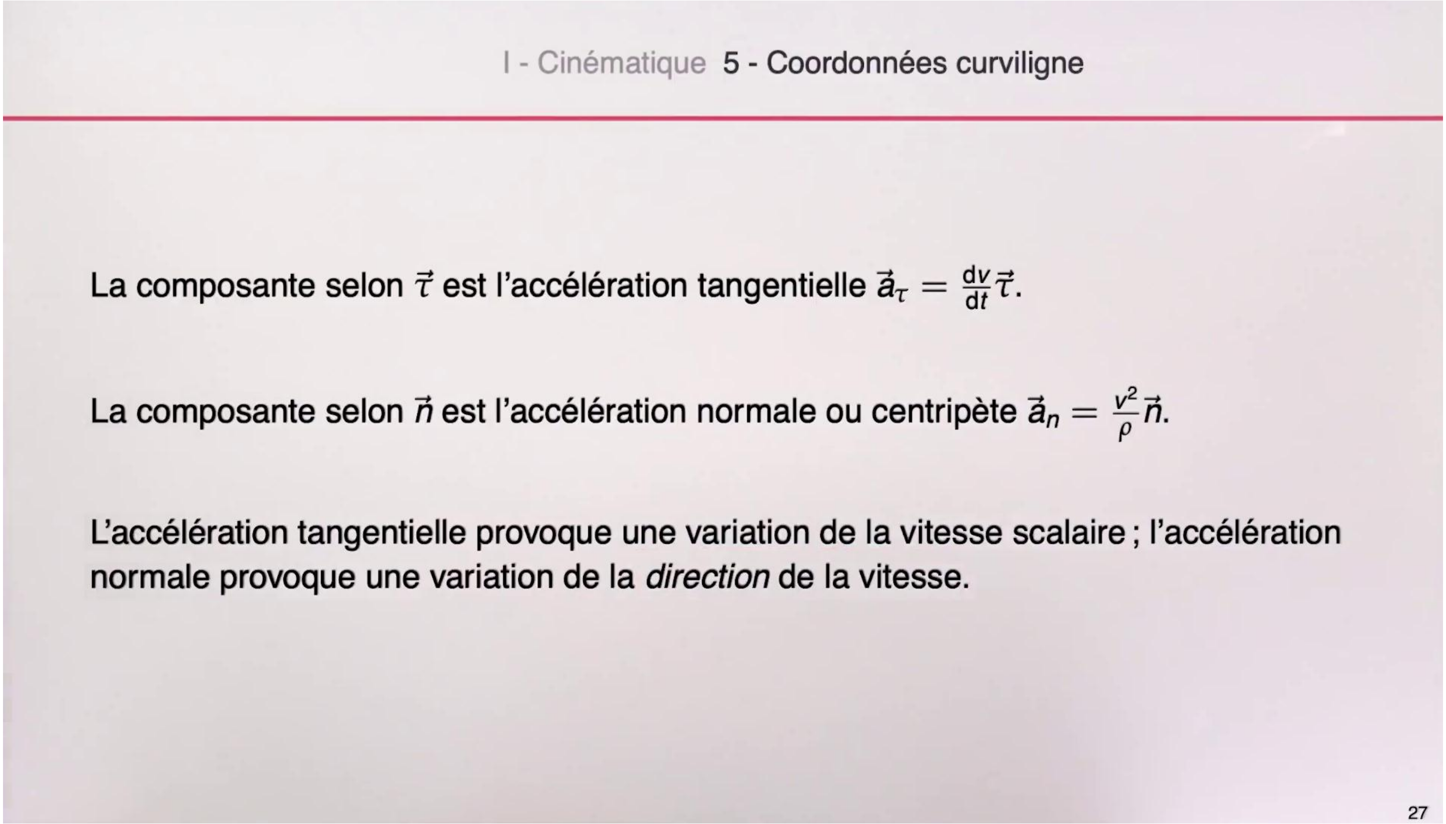


À ce moment-là, ce que j'avais trouvé avant pour un mouvement circulaire quelconque, reste valable, pour le point P à l'instant T à cet endroit-là, en prenant comme cercle le cercle osculateur. J'ai donc toujours vecteur v(t) = v(t) τ. Et cette fois, a(t) = dv/dt τ + V2/ρ vecteur n. J'ai donc remplacé le rayon du cercle par le rayon du cercle osculateur. C'est l'expression de la vitesse et de l'accélération dans nos coordonnées curvilignes ou repères de Frenet. Et nous les utilisons par exemple pour analyser la notion d'énergie cinétique.

Notes

Summary

12m 46s



La composante de l'accélération selon τ est appelée « l'accélération tangentielle ». On voit que son expression est liée à la dérivée de la norme de v. La composante selon n de l'accélération et ce qu'on appelle « l'accélération normale ou centripète ». Elle est égale à v2/ρ, elle ne dépend que de la norme de v2. Si la vitesse scalaire est constante, la norme de v est une constante. La norme de l'accélération normale ne dépend que du rayon de courbure. Et dans ce cas-là, l'accélération tangentielle est nulle. En fait, « l'accélération tangentielle provoque une variation de la vitesse scalaire et l'accélération normale provoque une variation de la direction de la vitesse ». Dans votre voiture, ça, c'est ce que vous provoquez avec l'accélérateur ou le frein. Et ceci, c'est ce que vous provoquez avec le volant.

Notes

Summary

13m 31s

Ce système de coordonnées peut paraître un peu redondant avec les coordonnées polaires dans le cas du mouvement circulaire. En fait, les deux sont adaptés. Nous verrons qu'il sera très utile pour l'analyse conceptuelle et nous en aurons besoin pour la notion d'énergie cinétique.

Notes

Summary

14m 39s