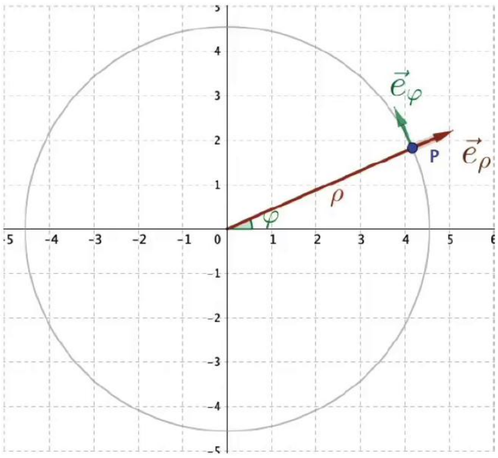
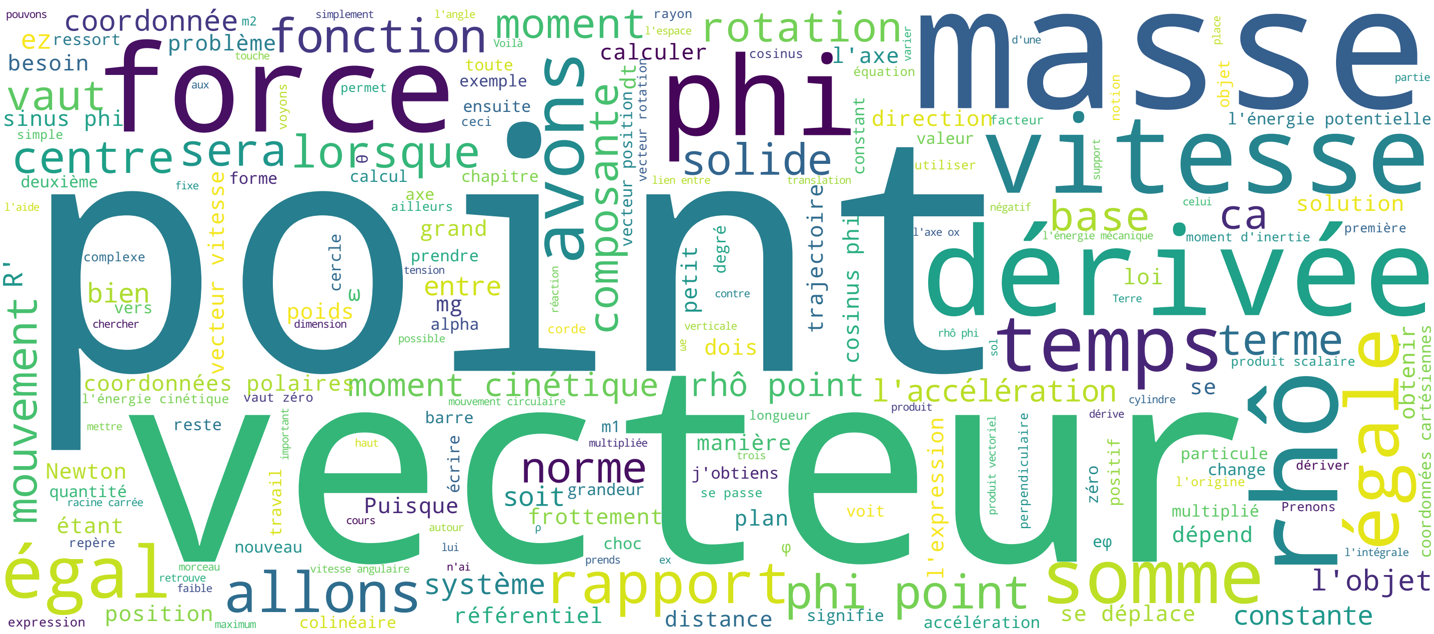
Physique générale : mécanique



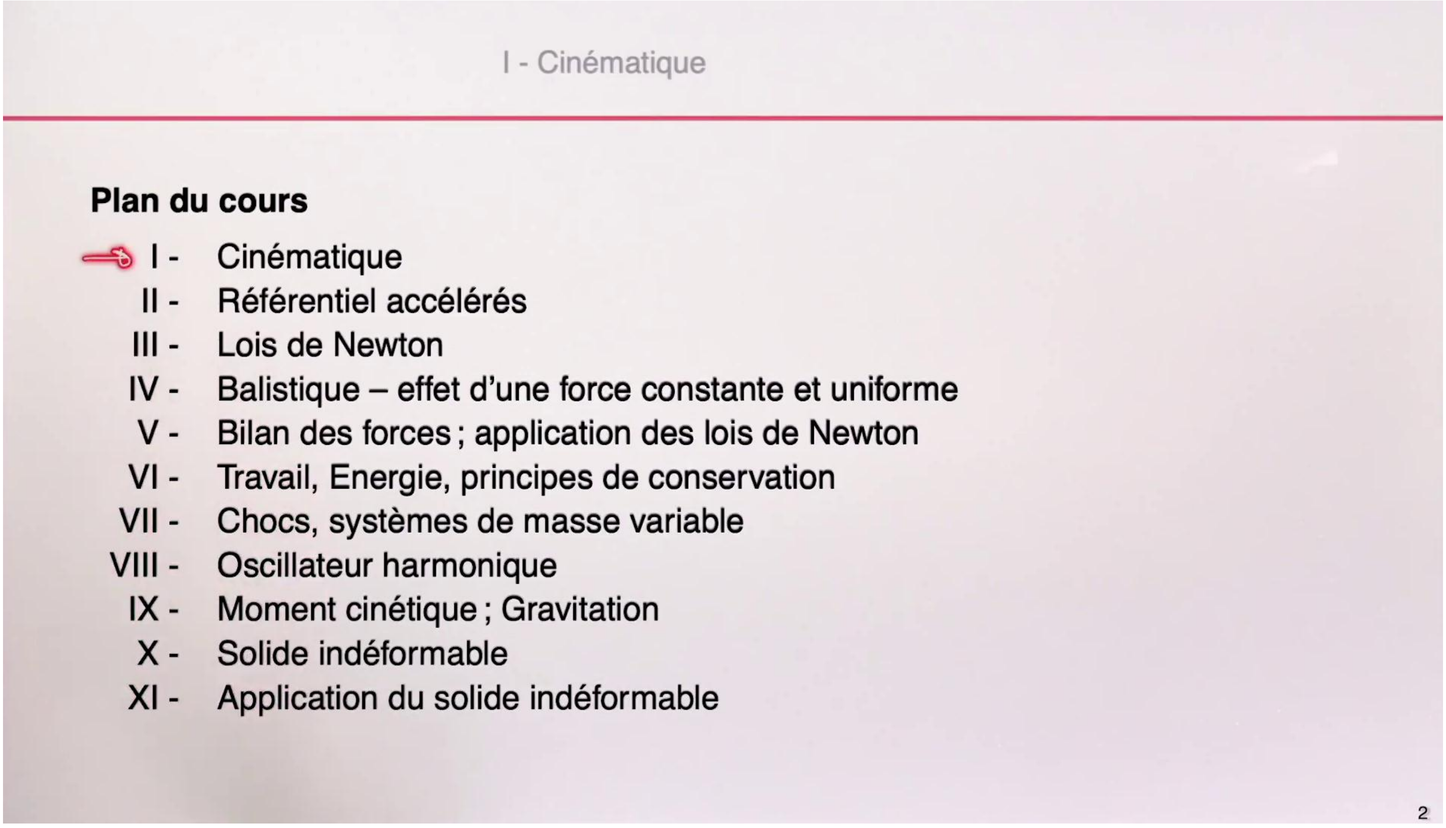
Coordonnées polaires

Partie 1

Prof. Cécile Hébert



[Video](#)

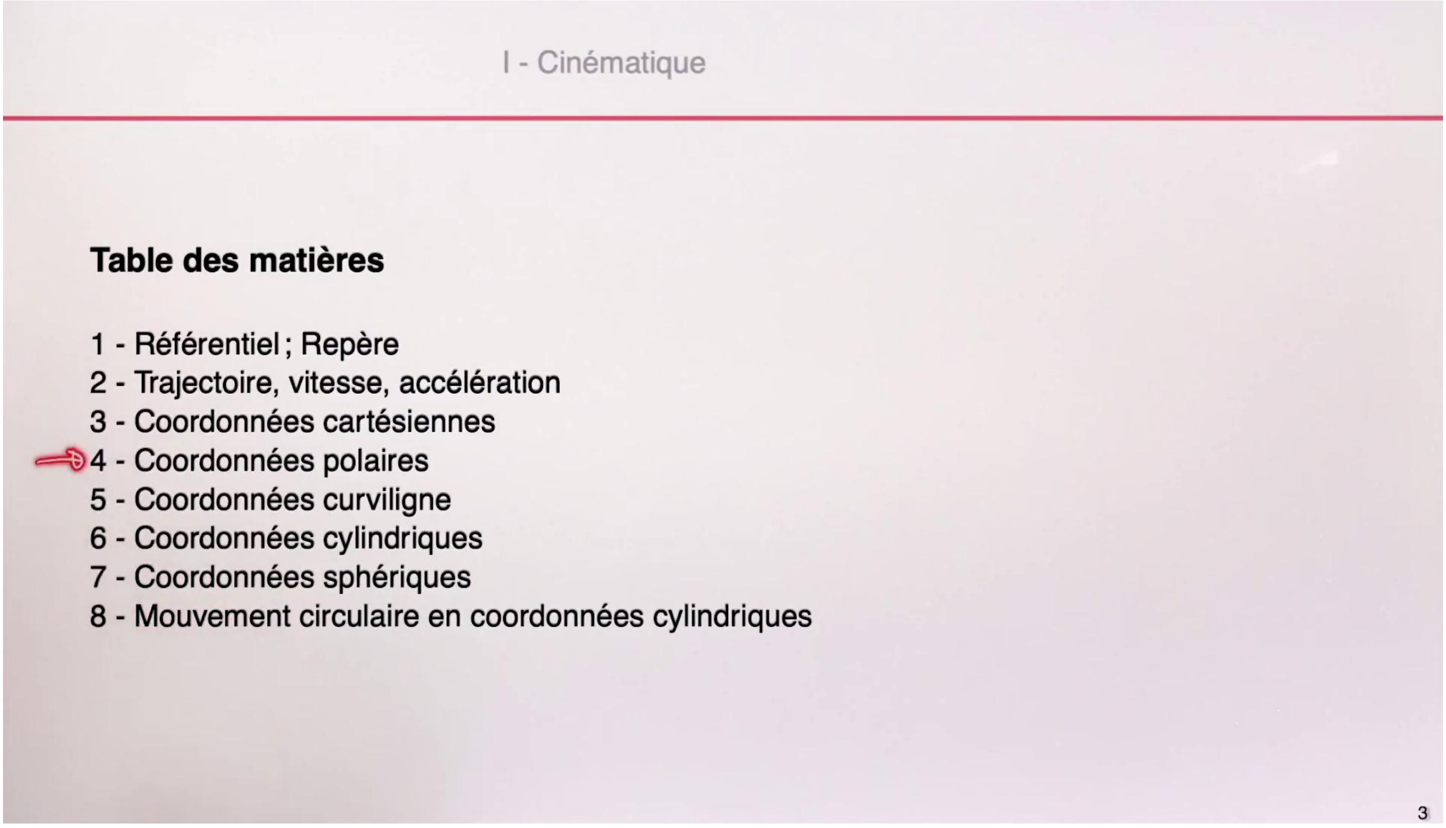


De nombreux systèmes de coordonnées sont liés aux points qu'on étudie, donc aux vecteurs positions OP ou bien r. Ils sont puissants, car ils permettent de tenir compte de la symétrie du problème, mais ils ont une complexité. C'est que les vecteurs de base vont se déplacer dans l'espace, donc, changer en fonction de la position de l'objet étudié. Nous allons commencer par les coordonnées polaires dont l'avantage est d'être un système à deux dimensions. Donc, on peut rester dans le plan de la feuille. Les dessins sont alors beaucoup plus faciles à faire. Nous sommes dans le chapitre un, cinématique.

Notes

Summary

0m 05s

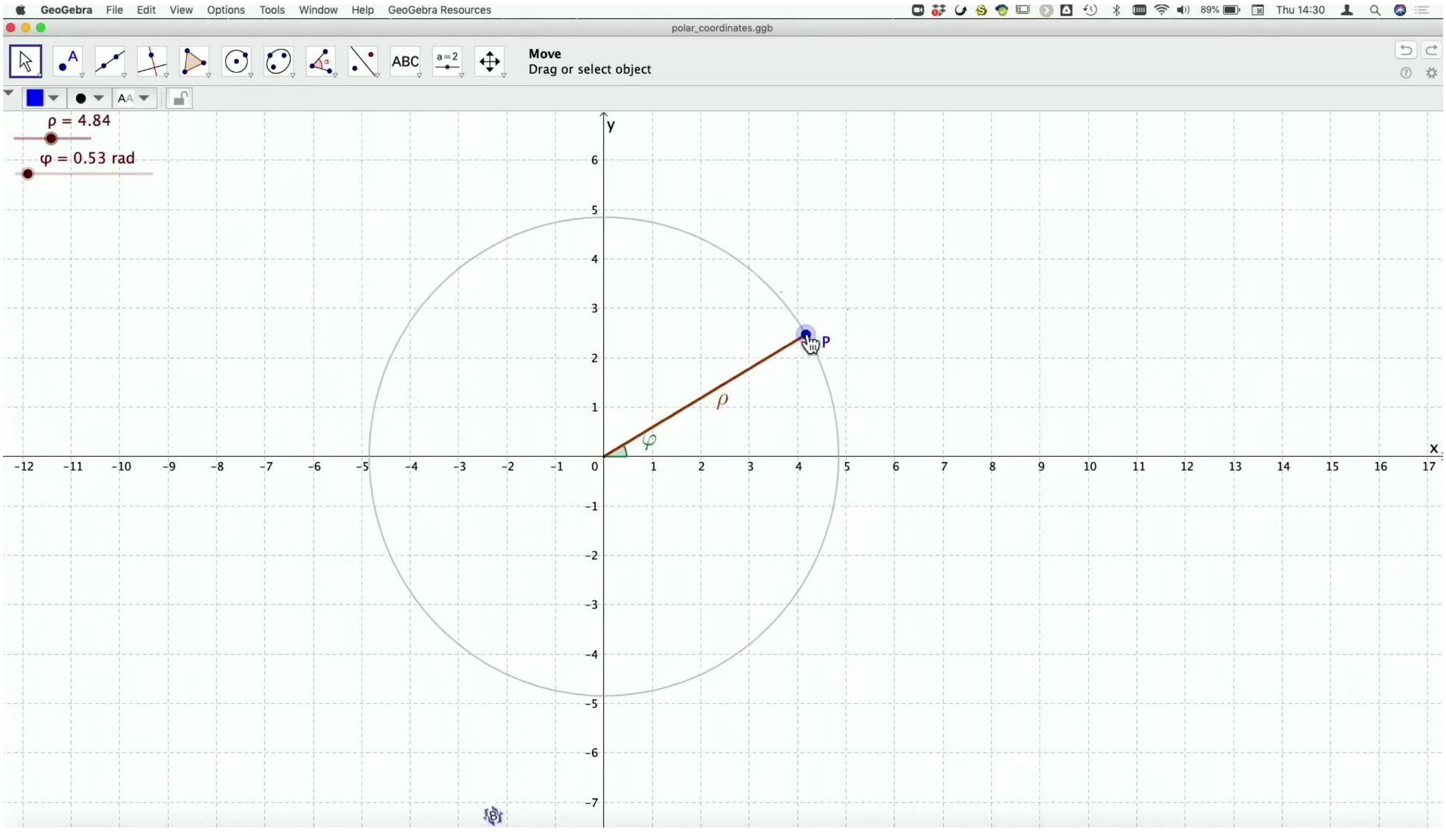


Coordonnées polaires.

Notes

Summary

0m 42s

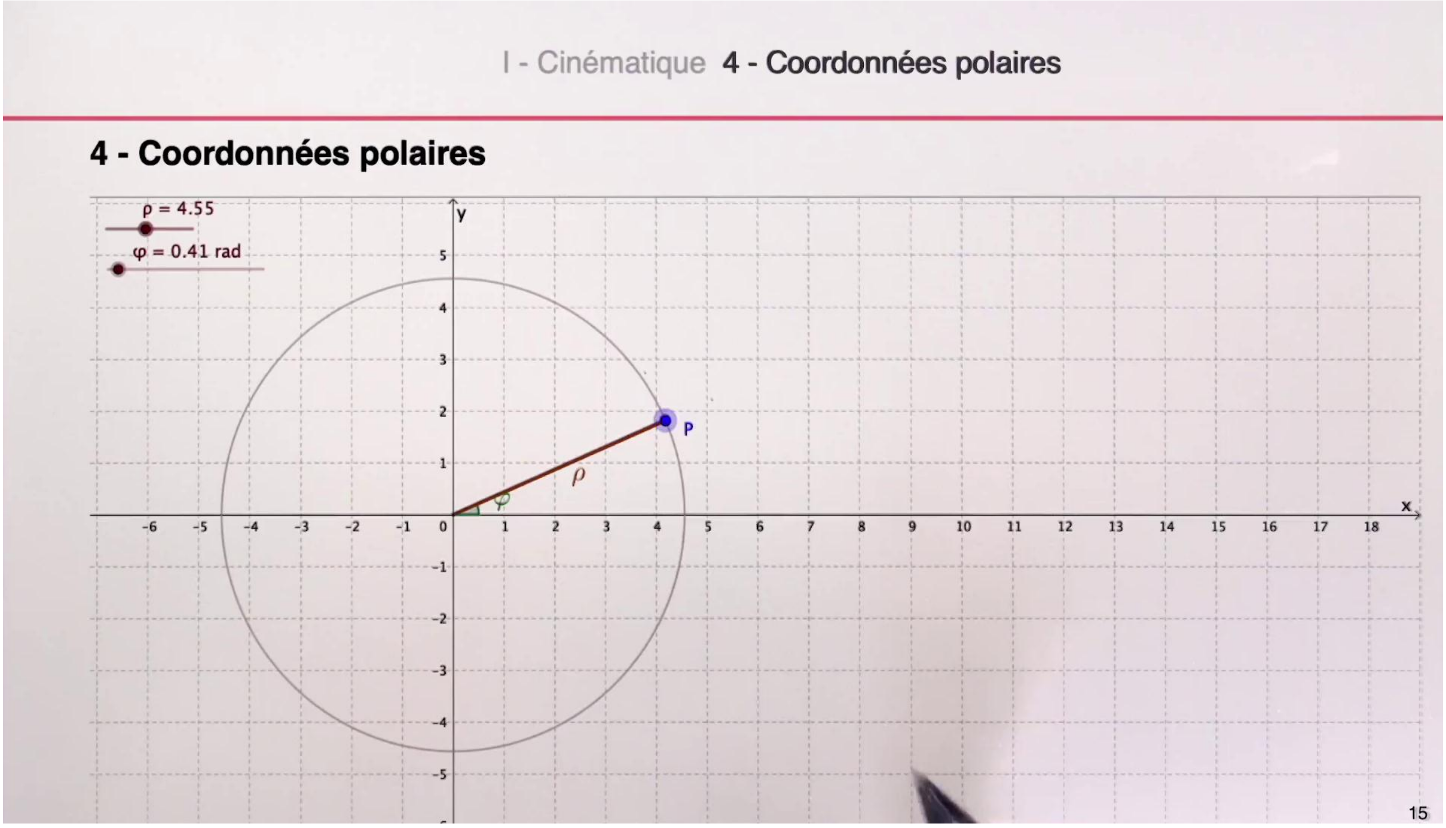


Les coordonnées polaires sont une autre manière de repérer un point dans un plan. Ce sont des coordonnées en deux dimensions, donc, elles correspondraient au plan cartésien x, y. Le point P est représenté par sa distance au point O, rhô, et par l'angle phi qui est fait entre l'axe ox et le vecteur op.

Notes

Summary

0m 45s

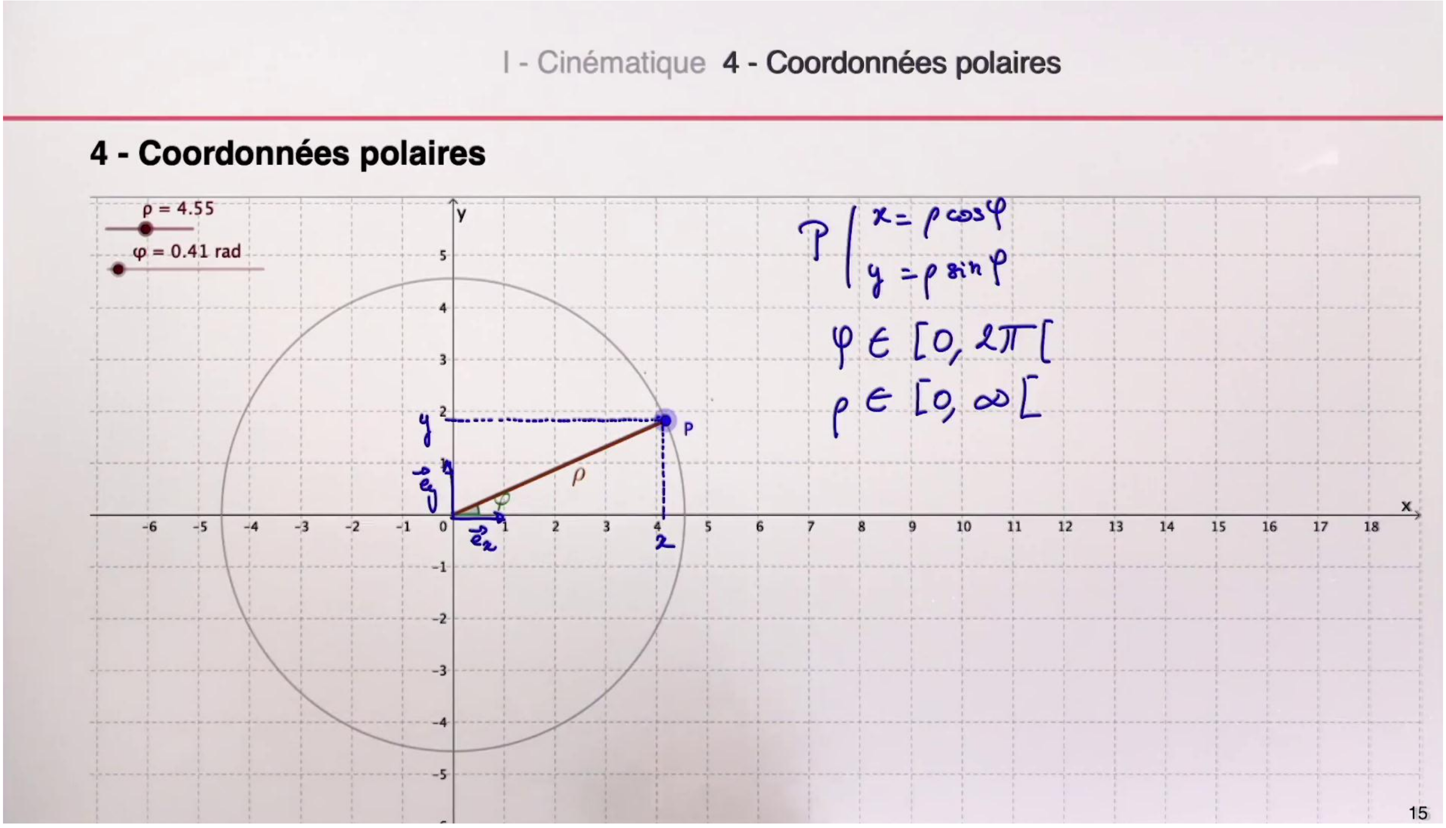


Si je déplace le point P dans le plan, je peux repérer sa position par de nouvelles valeurs de rhô et phi. Et lorsque je donne une valeur pour rhô et une valeur pour phi, cela permet de savoir où se trouve le point P.

Notes

Summary

1m 09s

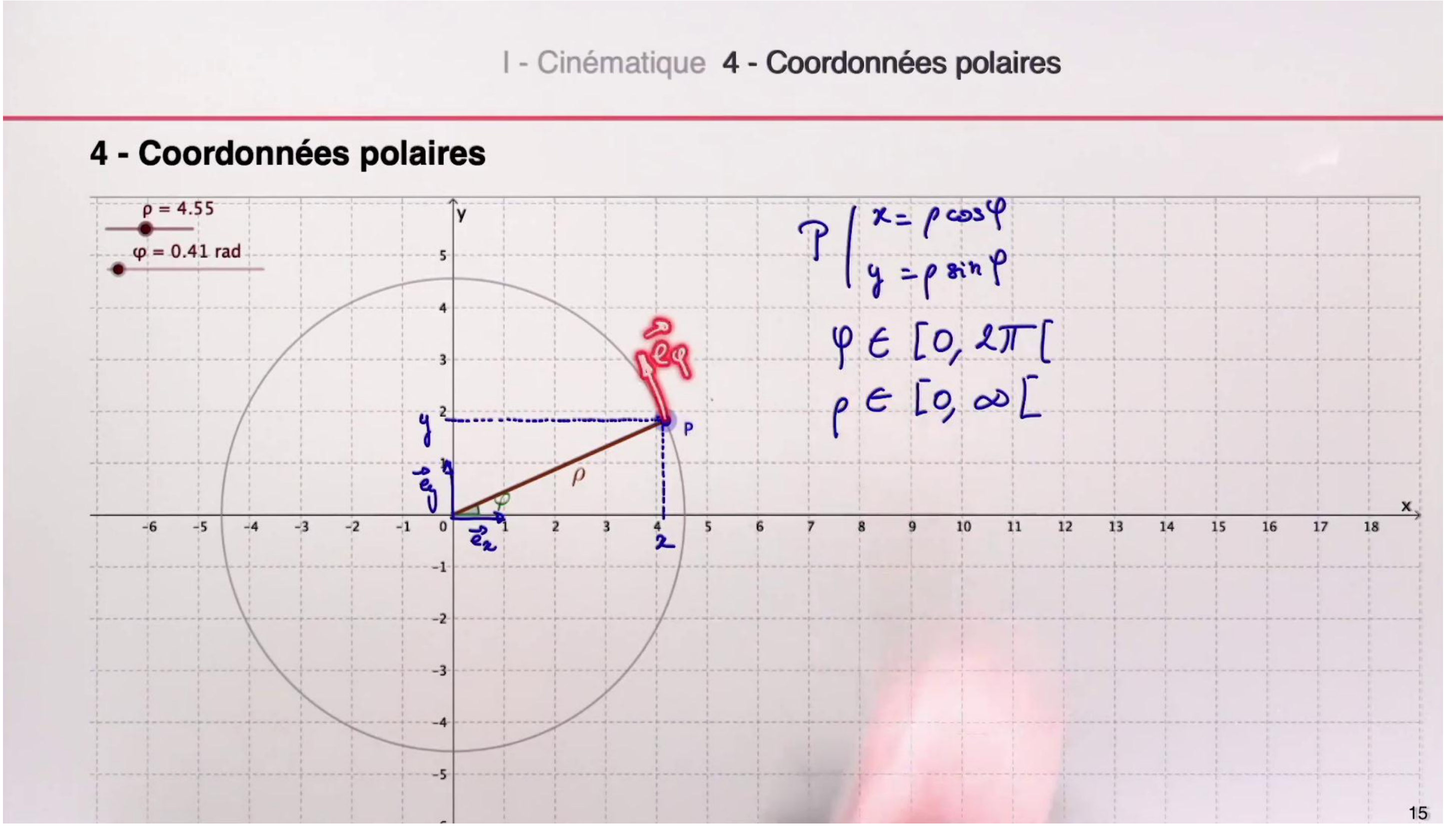


Il existe un lien entre les coordonnées rhô et phi du point P en polaire, et les coordonnées du point P en coordonnées cartésiennes. On voit que X vaut ici tout simplement rhô cosinus phi et y vaut rhô sinus phi. Mon point P a donc comme coordonnées cartésiennes, x égale rhô cosinus phi, y égale rhô sinus phi. Pour décrire l'ensemble du plan, je dois faire varier x entre moins infini et plus infini, et y entre moins infini et plus infini. En coordonnées polaires, j'ai besoin de pouvoir faire un tour complet. Donc faire varier phi entre zéro et deux pi. Et une fois que j'ai fixé l'angle phi, j'ai besoin de faire varier rhô entre zéro et l'infini. Pour exprimer les vecteurs en coordonnées cartésiennes, j'ai utilisé les vecteurs de base e x et e y. Le vecteur de base e x s'obtient en prenant la coordonnée x et en déplaçant p de manière à augmenter uniquement la coordonnée x et cela me donne la direction de e x. Ensuite, sa norme doit être de un. Pour e y, je prends le point P et j'augmente uniquement sa coordonnée Y. Cela me donne le vecteur de base e y, qui doit aussi être de norme un. Pour obtenir les vecteurs de base des coordonnées polaires rhô et phi, je vais maintenant imaginer que j'augmente la coordonnée rhô en laissant phi fixe.

Notes

Summary

1m 29s

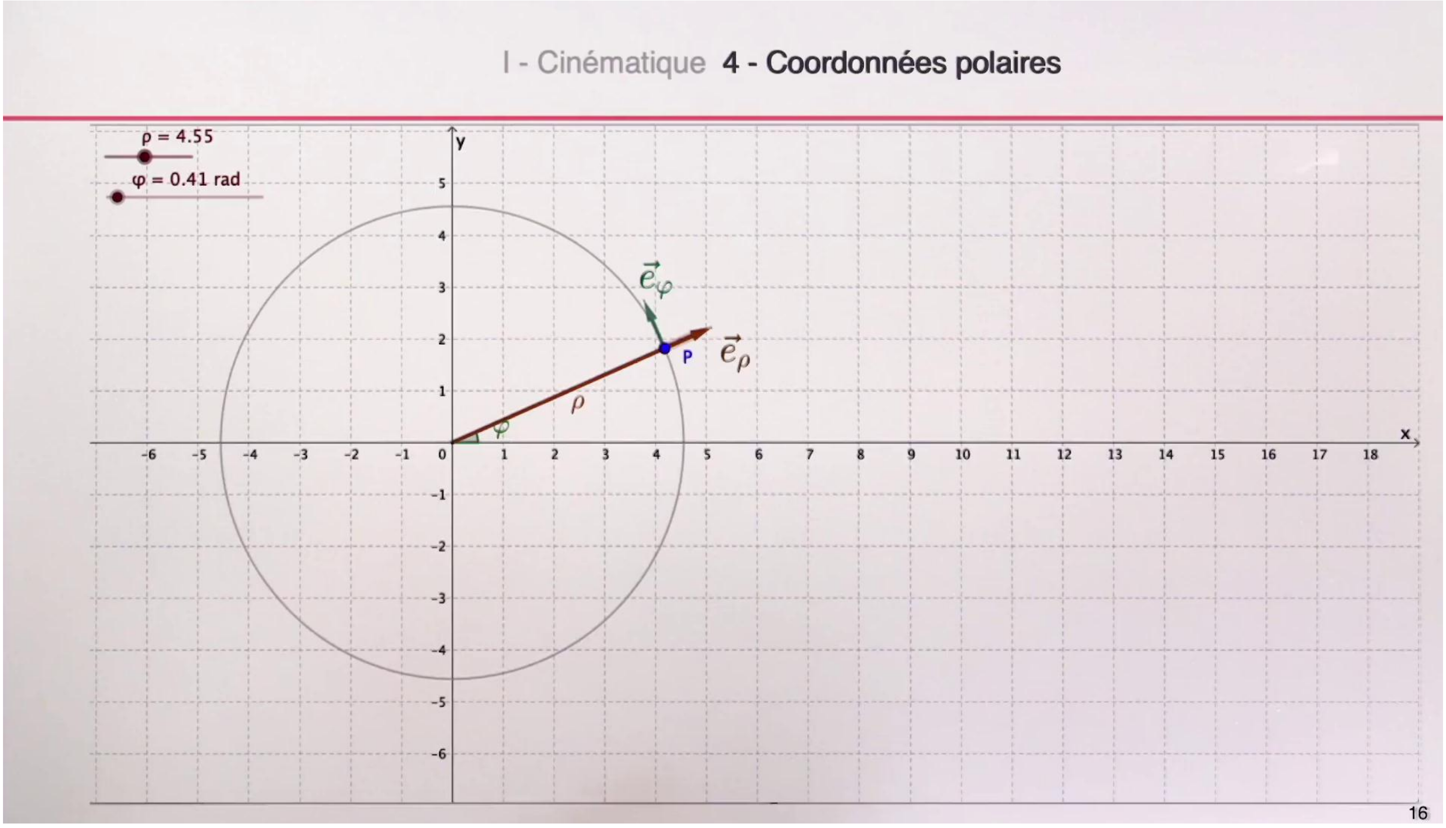


À ce moment-là, le point P se déplace le long d'un rayon en s'éloignant du centre. Cela me donne la direction du vecteur de base e-rhô qui va aussi être de norme un. Maintenant si je laisse Rhô constant, et que j'augmente phi, je vais voir P se déplacer le long du cercle. Donc, au moment du déplacement, il se déplace selon un vecteur tangent au cercle, et c'est le vecteur de base e-phi.

Notes

Summary

3m 23s

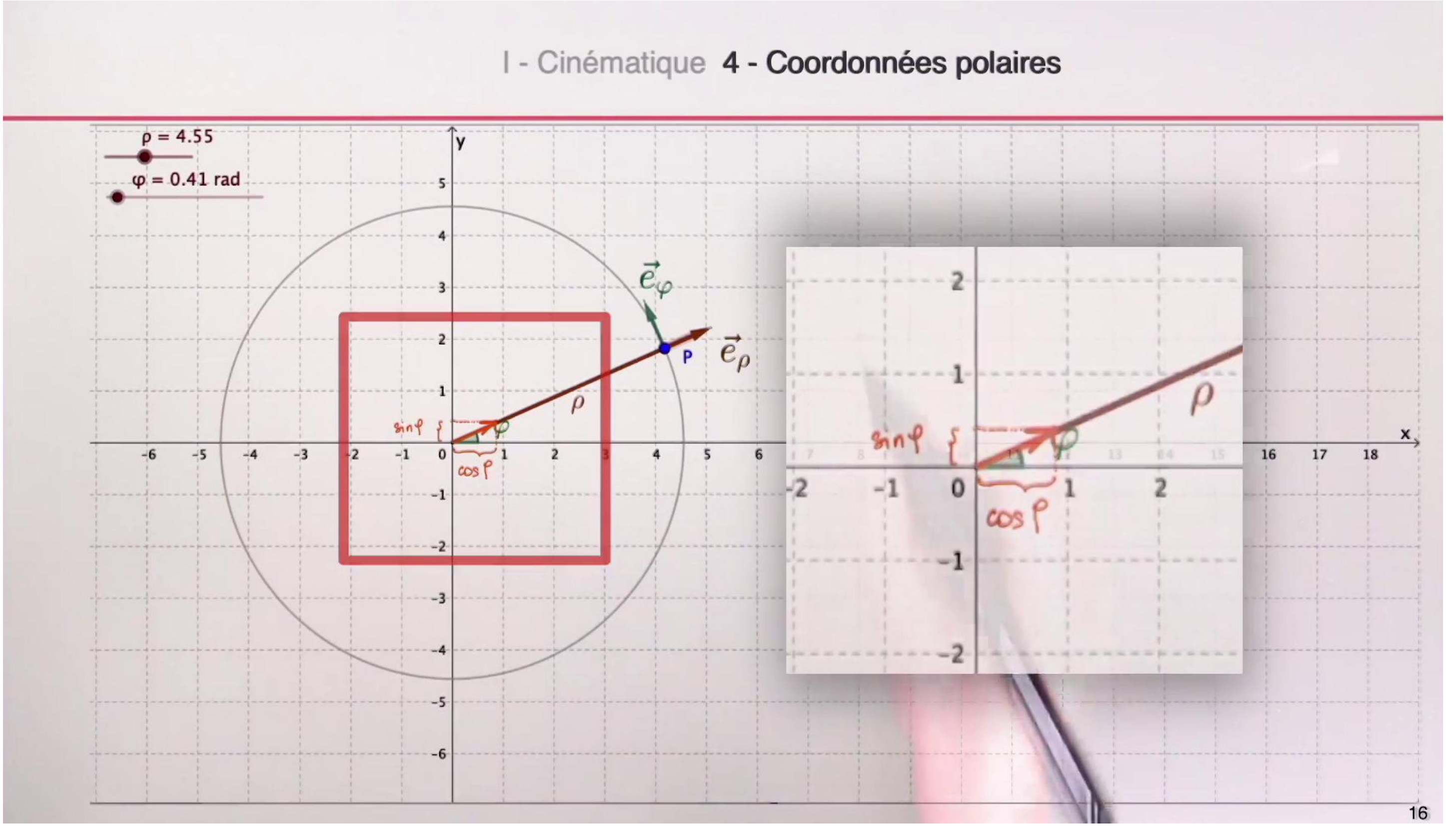


On voit donc lorsque j'augmente rhô, le point P qui se déplace colinéairement à e-rhô, et lorsque je garde rhô constant, et que j'augmente phi, le point P qui se déplace colinéairement à e-phi. Mais on remarque aussi que lorsque P se déplace dans le plan, e-rhô et e-phi changent de direction. Or, un vecteur est caractérisé par sa norme et sa direction. Les normes restent constantes. Elles valent un, mais les directions changent. Donc e-rhô et e-phi ne sont pas des vecteurs constants.

Notes

Summary

3m 55s

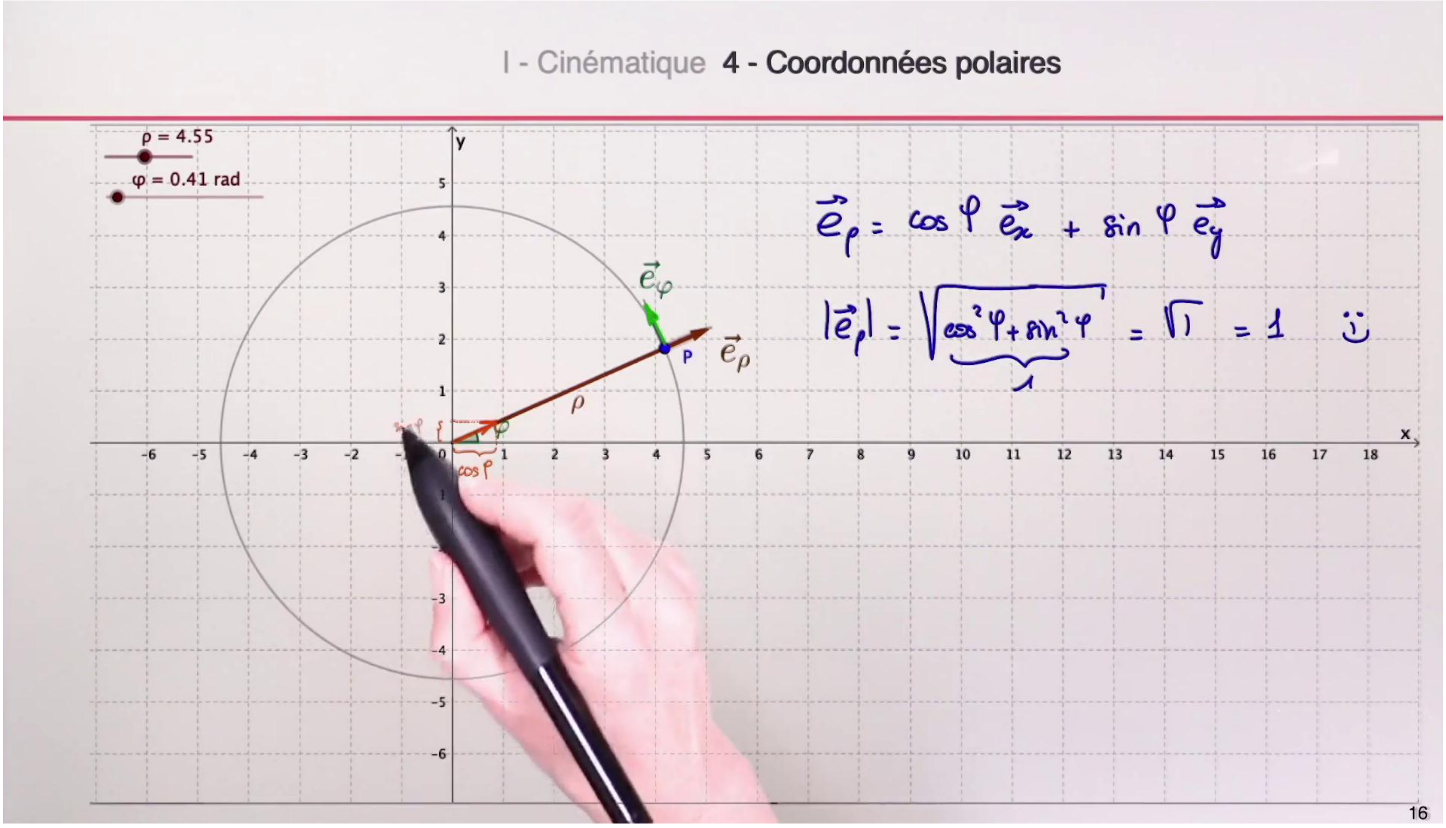


La prochaine étape va être d'exprimer e-rhô et e-phi, dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, et de voir comment s'expriment leurs dérivées lorsque P se déplace. Afin d'obtenir les composantes de e-rhô, je vais représenter le vecteur e-rhô, non pas depuis le point P, mais depuis l'origine du repère. Ensuite, je dois lire les composantes de e-rhô. Sur l'axe ox, c'est cosinus phi. Sur l'axe oy, c'est sinus phi.

Notes

Summary

4m 31s

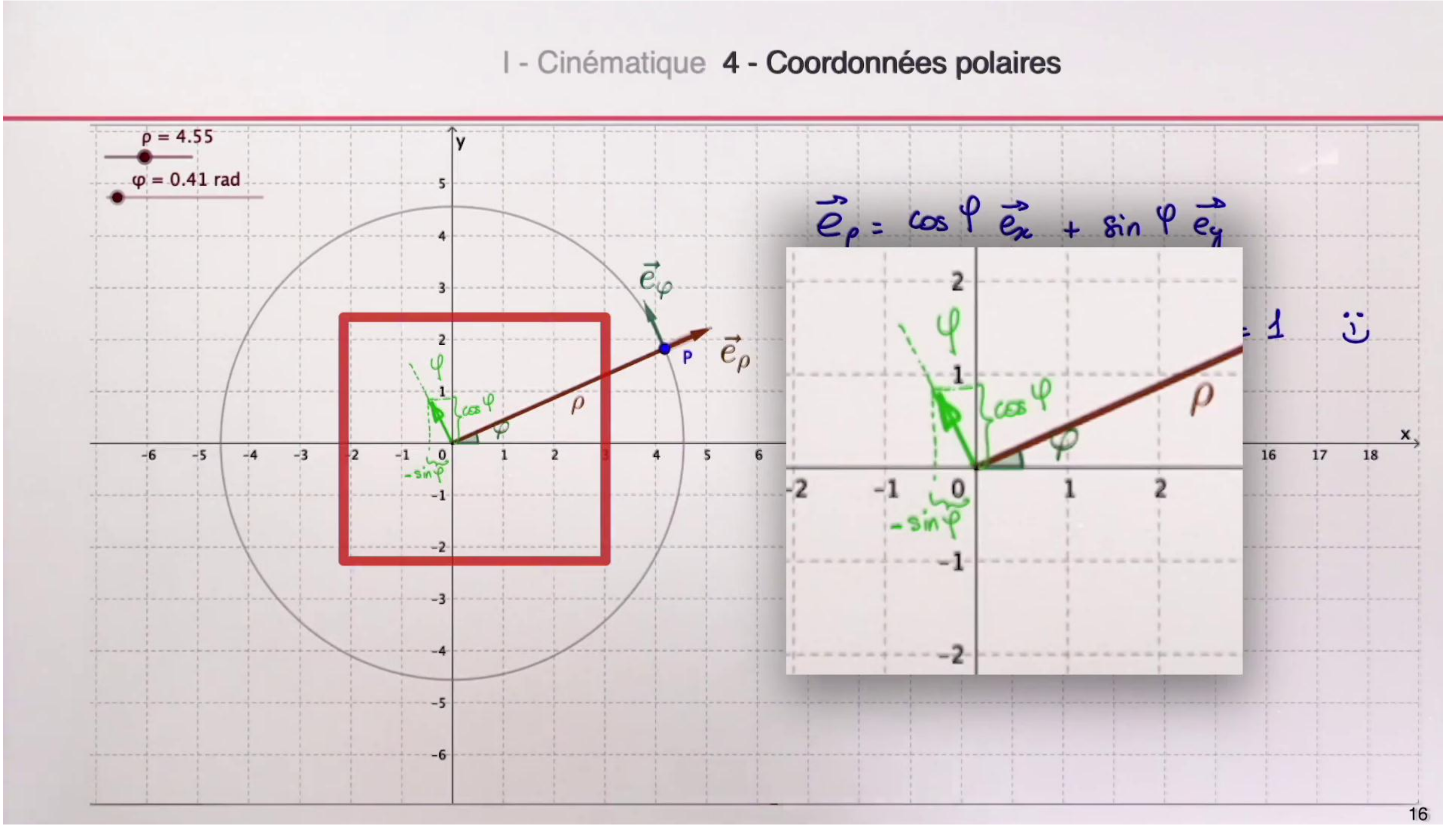


Mon vecteur e-rhô s'écrit donc : cosinus phi e x plus sinus phi e y. Au passage, on remarque que la norme de e-rhô qui est égale à la racine carrée de cosinus carré phi plus sinus carré phi. Il vaut donc, ceci valant un, la racine carrée de un, qui vaut un. Pour obtenir les coordonnées de e-phi, je vais appliquer la même recette.

Notes

Summary

5m 17s

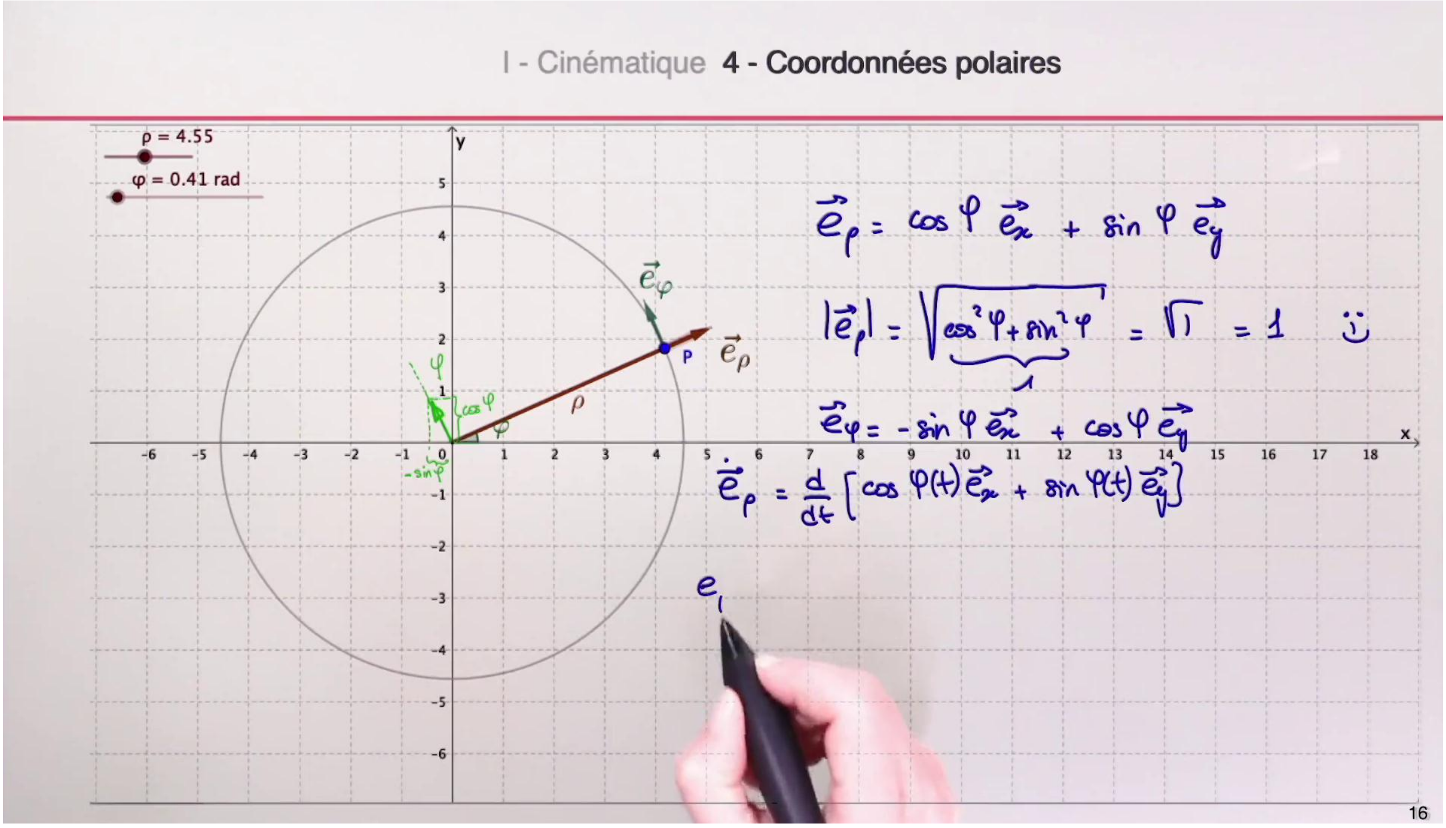


Phi étant tourné de 90 degrés par rapport à Rhô, nous retrouvons l'angle Phi à cet endroit-là. La trigonométrie nous dit donc que nous avons : cosinus phi sur l'axe vertical et sur l'axe horizontal sinus phi, mais comme c'est du côté négatif, c'est moins sinus phi.

Notes

Summary

6m 01s

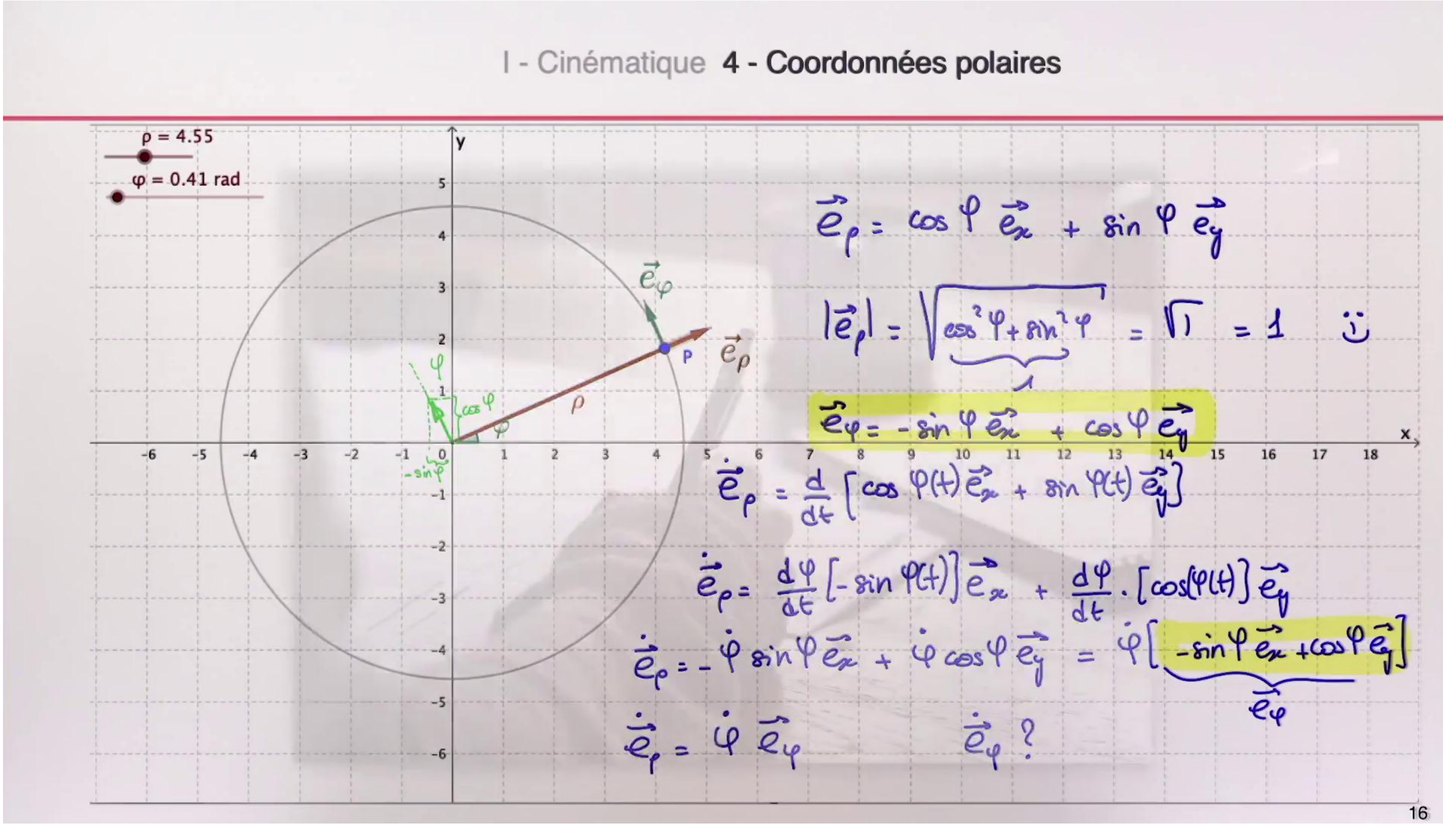


Le vecteur e-phi s'écrira donc : moins sinus phi e x plus cosinus phi e y. Nous avons donc déjà exprimé e-rhô et e-phi en coordonnées cartésiennes. Lorsque le point P se déplace, e-rhô change et e-phi change aussi. Nous allons donc chercher la dérivée de e-rhô par rapport au temps, lorsque P change, donc lorsque rhô et phi sont des fonctions du temps. Cette dérivée par rapport au temps s'écrit : e-rhô point. Et c'est donc la dérivée par rapport au temps de cosinus phi. Mais phi peut être une fonction du temps phi(t) e x plus sinus de phi(t) fois e y. Pour commencer, j'exprime bien ce phi(t). C'est quelque chose que nous en mettrons facilement par la suite. Cette dérivée est un peu compliquée. J'ai la dérivée de la somme de deux termes. C'est la somme des dérivées de ce terme et ce terme. Et ensuite ici, j'ai un produit cosinus phi fois e x. Heureusement, ce terme est constant, donc, je n'ai pas besoin de le dériver. Il me faudra donc dériver uniquement cosinus de phi(t). Mais là, c'est une composition. C'est f de g de t, avec f qui vaut cosinus et g qui est phi. Allons-y lentement pour cette première fois. E-rhô point est donc la dérivée par rapport au temps de ce terme qui est la dérivée par rapport au temps de cosinus de phi(t).

Notes

Summary

6m 29s

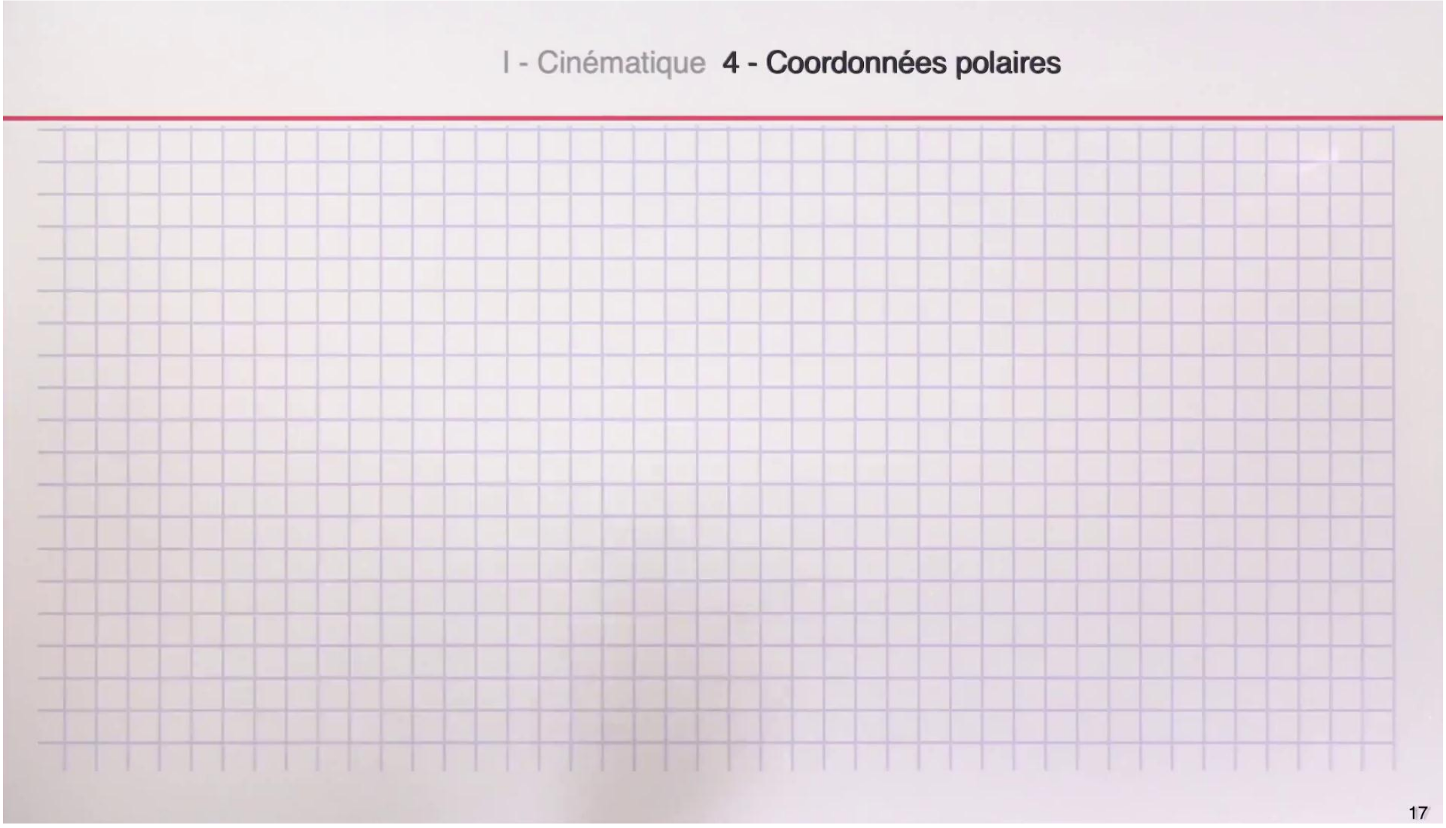


C'est la dérivée de phi(t) multipliée par la dérivée de cosinus. C'est moins sinus appliqué à phi(t). Et ensuite, je multiplie par le vecteur e x qui est constant. Je vais maintenant dériver ce second morceau. J'ai à nouveau la dérivé de l'intérieur d-phi sur dt, multipliée par la dérivée de sinus, c'est cosinus de phi(t), multiplié par e y. Ce terme-là va s'écrire tout simplement phi point, de même que celui-ci. Je peux donc écrire e-rhô point égale moins phi point sinus phi. Cette fois, j'oublie le t, e x, plus phi point cosinus phi e y. Je peux mettre phi point en facteur. C'est donc phi point facteur de moins sinus phi e x plus cosinus phi e y. Nous remarquons tout de suite que ce terme-là est le même que celui-ci. Et donc ici, e-phi et mon e-rhô point s'exprime simplement phi point e-phi. Il va maintenant falloir calculer e-phi point. Prenez un papier et un crayon et essayez de le faire vous-même.

Notes

Summary

8m 11s

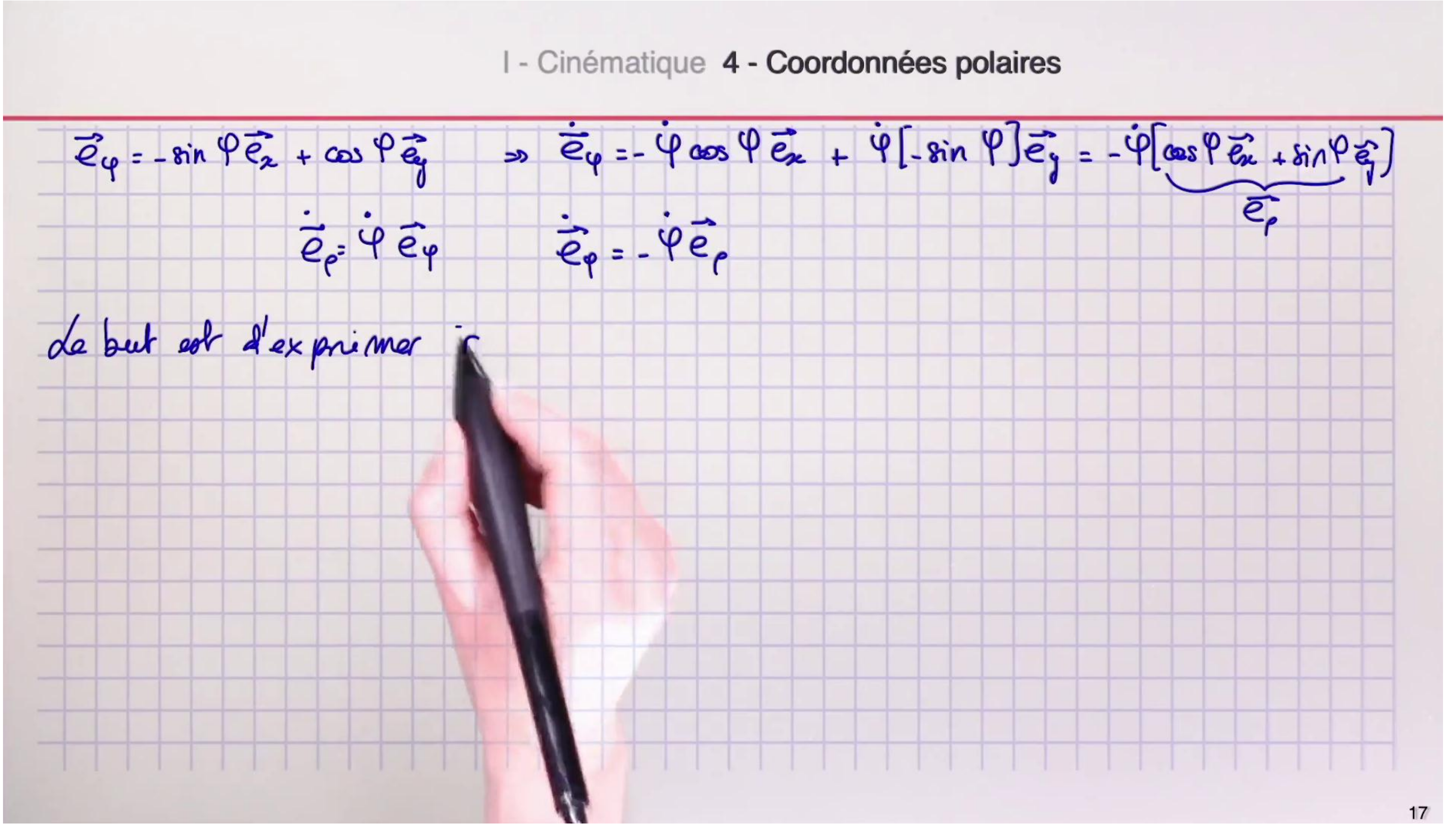


Ok, j'espère que vous y êtes arrivé tout seul. Je vais vous donner la solution.

Notes

Summary

9m 53s

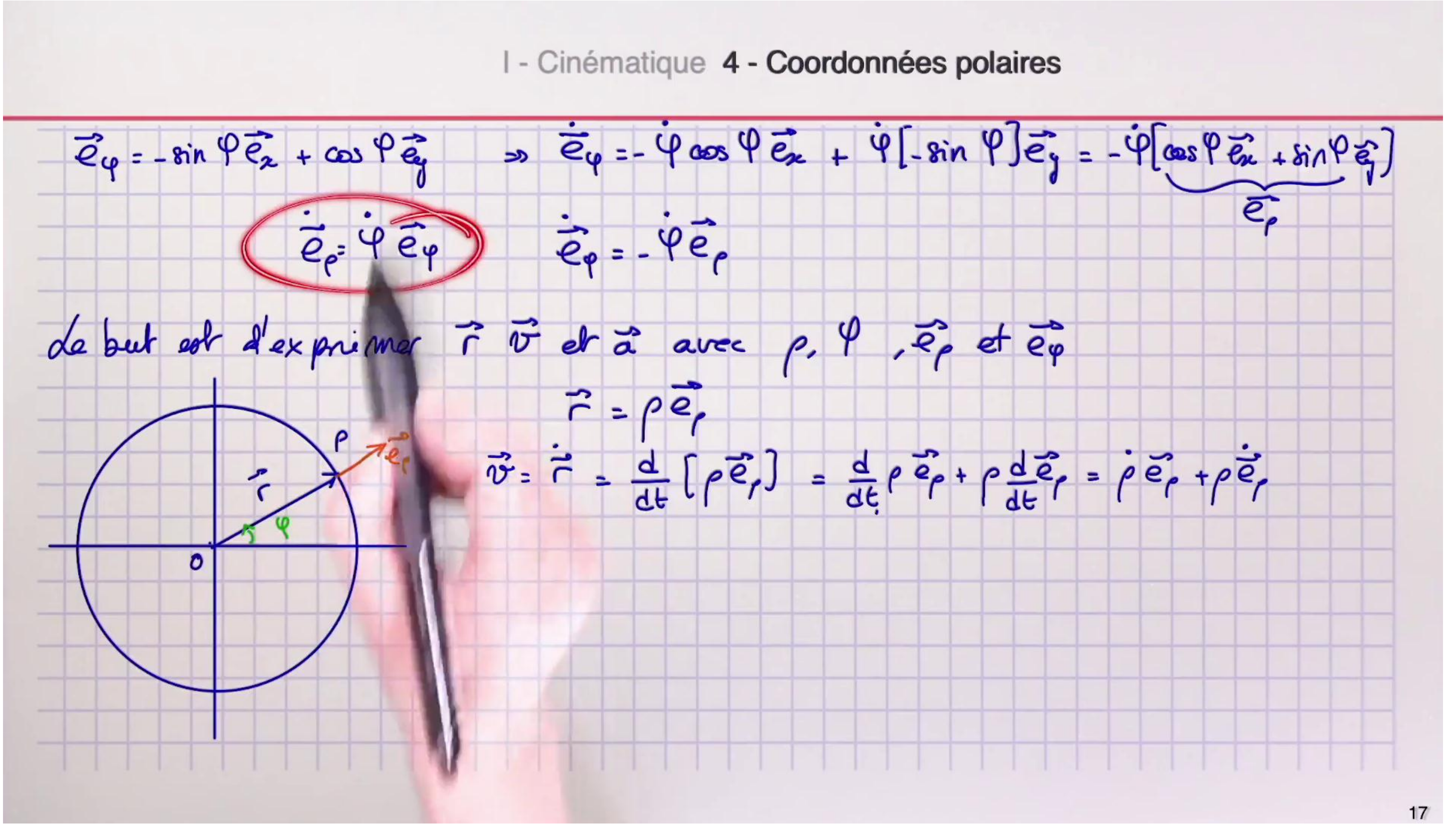


e-phi est moins sinus phi e x plus cosinus phi e y. e-phi point va donc être la dérivée du premier terme. C'est moins phi point. La dérivée de sinus, c'est cosinus phi, et e x est une constante. Plus la dérivée du deuxième terme. La dérivée de phi à nouveau phi point. La dérivée de cosinus, c'est moins sinus appliqué à phi, multiplié par e y. En mettant moins phi point en facteur, j'obtiens moins phi point cosinus phi e x plus sinus phi y grec. Ceci est égal à e-rhô. Cela me donne donc e-phi point est égale à moins phi point e-rhô. Et nous avions du transparent précédent, e-rhô point qui valait phi point e-phi. Nous voyons que seule une variation de phi implique une variation des vecteurs de base. Si rhô change, mais que phi est constant, la dérivée de e-rhô vaut zéro, et la dérivée de e-phi vaut zéro. Puisque Phi point vaut zéro si phi est constant. Par contre, si Phi est une fonction du temps et change au cours du temps, alors la dérivée de e-rhô et la dérivée de e-phi sont non nulles. Cela signifie que e-rhô et e-phi bougent. Le but est d'arriver à la cinématique avec toutes les coordonnées polaires. Nous allons donc chercher à exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération, avec les coordonnées rhô et phi, et les vecteurs de base e-rhô et e-phi.

Notes

Summary

10m 02s



Refaisons un dessin, c'est toujours la première chose à faire. Le point P est à la distance rhô du point O. Le vecteur op, c'est le vecteur position r a comme norme rhô. Sa direction est donnée par le vecteur de base e-rhô. Le vecteur r s'écrit donc rhô e-rhô. Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position. C'est r point. Je vais donc devoir dériver par rapport au temps rhô e-rhô. Cette fois, le problème, c'est que e-rhô est une fonction du temps, donc, je vais devoir la dériver aussi, ça ne sera pas un vecteur constant. Je vais donc avoir la dérivée par rapport au temps de rhô multipliée par le vecteur e-rhô plus rhô multiplié par la dérivée par rapport au temps de e-rhô. Ce que l'on écrira plus simplement : rhô point e-rhô plus rhô e-rhô point. Toutes ces grandeurs sont des fonctions du temps, mais je l'ai omis. Nous voulons exprimer le vecteur vitesse à l'aide des coordonnées polaires et de leurs dérivées, et uniquement des vecteurs de base des coordonnées polaires. Ici, j'ai la dérivée de rhô, ça va e-rhô. Il va juste falloir que je remplace mon e-rhô point. Heureusement, je l'avais déjà calculé avant. Je vais donc pouvoir aller le chercher ici.

Notes

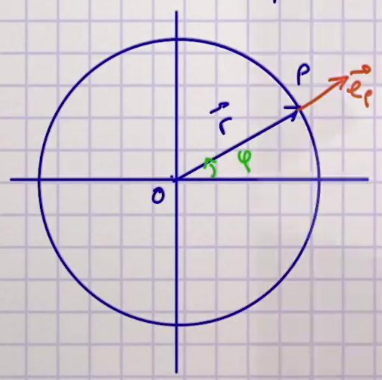
Summary

12m 01s

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}[-\sin\varphi]\vec{e}_y = -\dot{\varphi}[\underbrace{\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y}_{\vec{e}_\rho}]$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

Le but est d'exprimer $\vec{r}$ $\vec{v}$ et $\vec{a}$ avec ρ, φ, $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$



$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}[\rho\,\vec{e}_\rho] = \frac{d}{dt}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

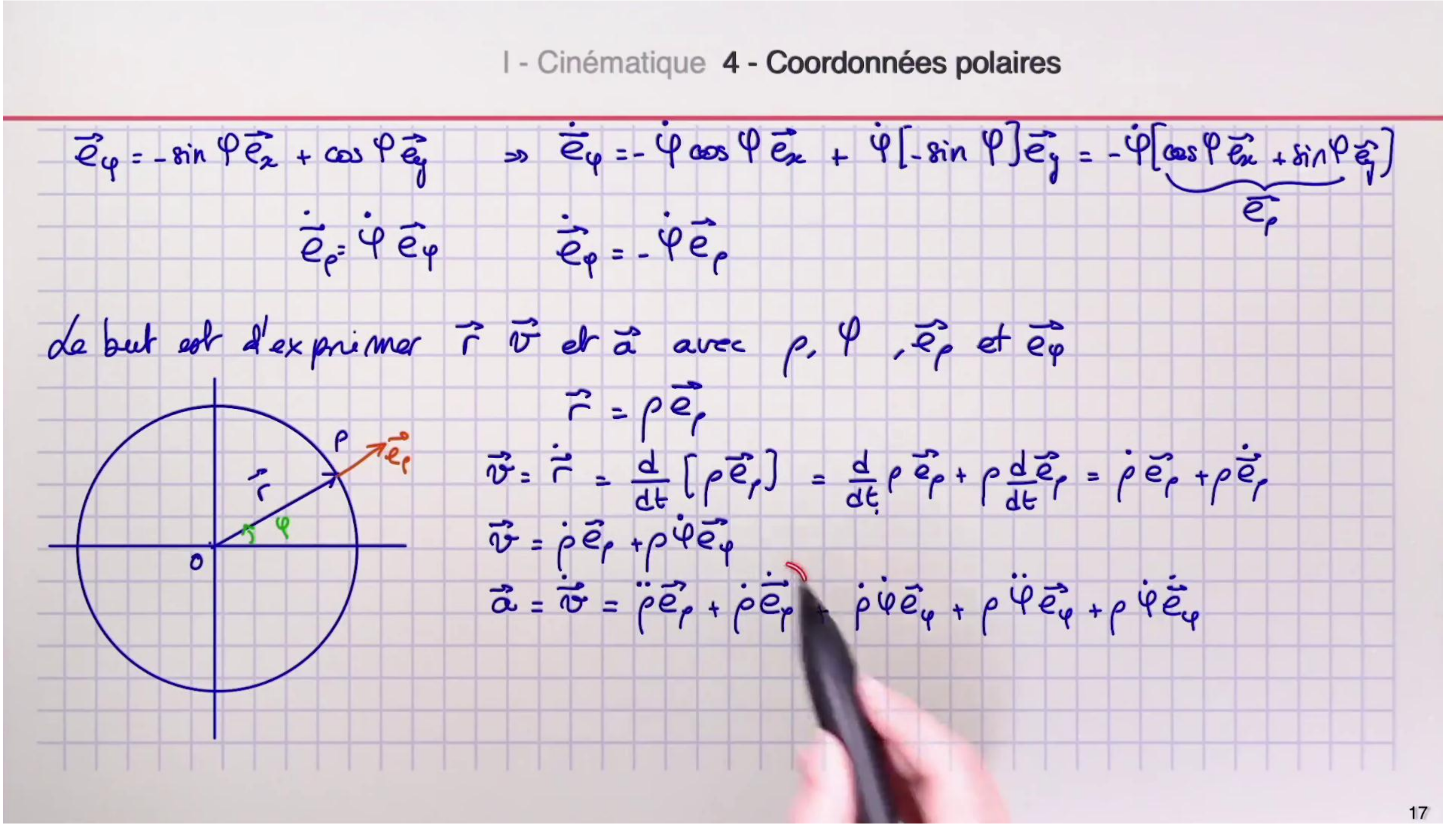
17

Donc le vecteur vitesse V est égal à rhô point e-rhô plus rhô phi point e-phi. La prochaine étape sera de calculer le vecteur accélération. C'est la dérivée du vecteur vitesse. Essayez de le faire vous-même. C'est la même démarche.

Notes

Summary

13m 44s

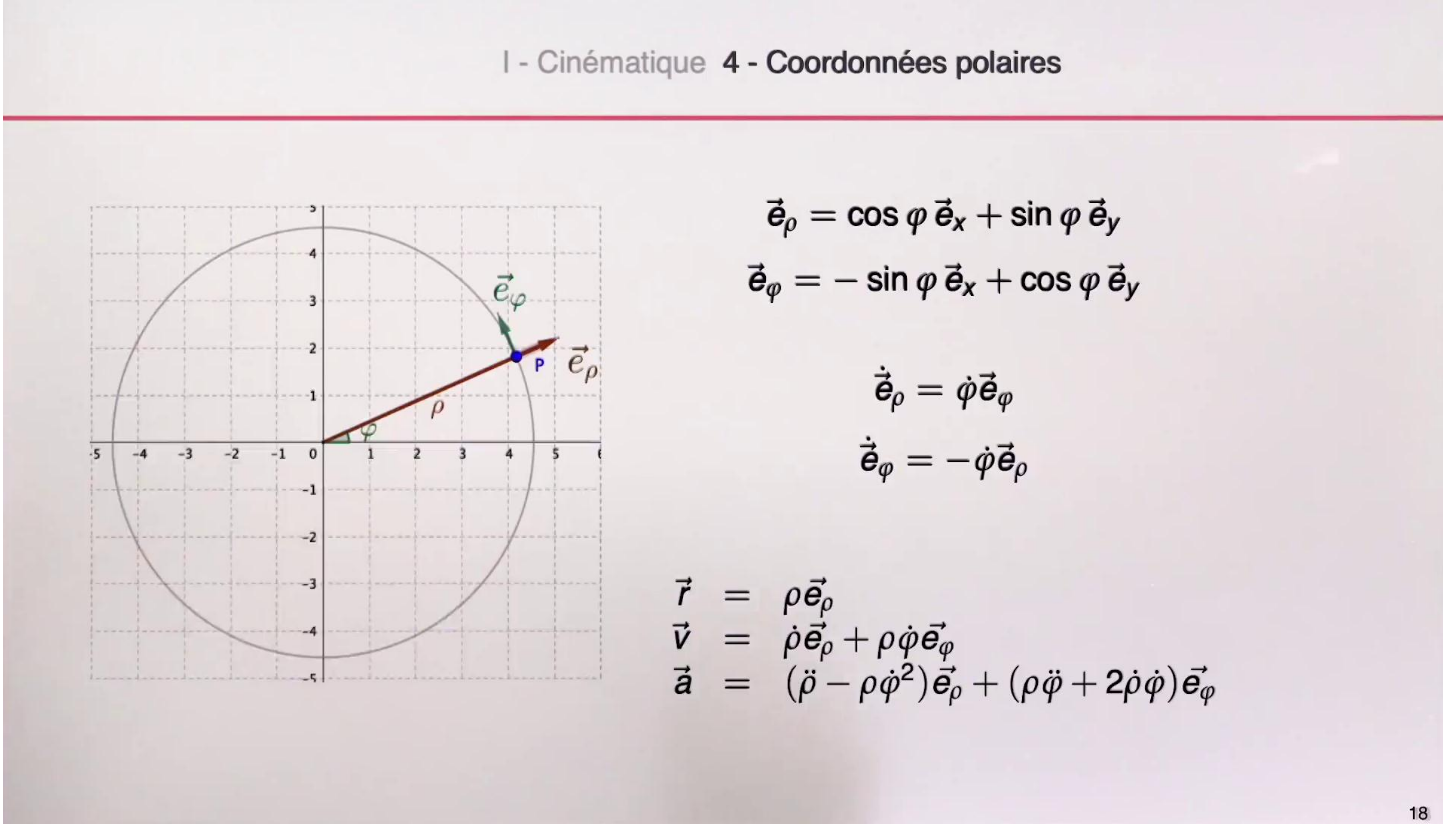


Ok, j'espère que vous y êtes arrivés. Allons-y, regardons la solution. Je dois d'abord dériver ce premier terme. C'est la dérivée d'un produit. Je dois donc dériver rhô point, c'est rhô deux points multiplié par e-rhô, plus —je ne dérive pas, je multiplie par la dérivée— rhô point e-rhô point. Que se passe-t-il avec ce deuxième terme ? J'ai trois fonctions f, g, h. La dérivée de ce produit de trois fonctions se fait de la même manière que la dérivée du produit des deux. À chaque fois, j'en dérive une et je garde les autres. J'en ai donc trois termes. Je dérive la première, et donc rhô qui devient rhô point, et ensuite, je ne touche pas aux deux suivantes, phi point et e-phi. Plus je ne touche pas à la première, je dérive la deuxième, c'était phi point. Ça devient phi deux points e-phi. Je ne touche à rien. Et ensuite le troisième terme, je ne touche pas au premier, je ne touche pas au deuxième, et je dérive le troisième. J'ai donc maintenant cinq termes. Un qui dépend de e-rhô point, que je vais aller chercher ici, et un qui dépend de e-phi point que je vais aller chercher à côté.

Notes

Summary

14m 18s



Je peux donc écrire a, comme rhô deux point e-rhô plus rhô point e-rhô point, c'est phi point e-phi, plus rhô point phi point e-phi, plus rhô phi deux points e-phi, plus rhô phi point e-phi point, c'est moins phi point e-rhô. Je vais regrouper les termes avec e-rhô, et les termes avec e-phi. Cela vous donne a égal rhô deux points pour le premier terme, ensuite, ici, j'ai moins rhô phi point phi point, c'est Phi point carré sur e-rhô, plus, rhô point phi point plus rhô point phi point, c'est deux rhô point phi point. Et enfin rhô phi deux point. e-phi. Petite astuce pour vérifier le calcul, l'accélération est la dérivée seconde par rapport au temps. Je dois donc avoir dans chaque terme deux dérivée par rapport au temps. Ici, j'ai deux points, c'est donc deux dérivée par rapport au temps. À cet endroit-là, j'ai une dérivée, mais au carré, donc ça correspond à deux fois la dérivée par rapport au temps. Ici, j'ai deux points et à cet endroit-là aussi. J'ai donc une chance d'avoir fait un calcul correct.

Notes

Summary

15m 33s

En résumé, pour les coordonnées polaires, ce sont des outils que vous pouvez utiliser dans les exercices. Vous n'avez pas besoin de les redémontrer à chaque fois. Mais il faut savoir d'où ils sortent. Nous avons l'expression des composantes des vecteurs de base e-rhô et e-phi en coordonnées cartésiennes. L'expression de la dérivée du vecteur de base e-rhô et du vecteur de base e-phi à l'aide de la dérivée de phi et de e-phi, et e-rhô, et l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération uniquement avec les coordonnées polaires. Voilà, nous avons pris notre temps dans ce système de coordonnées, afin de bien comprendre la logique. Bien entendu, vous n'aurez pas besoin de redévelopper tous les calculs, vous pourrez utiliser cet outil. Mais pour cela, il faudra de l'entrainement.

Notes

Summary

17m 11s