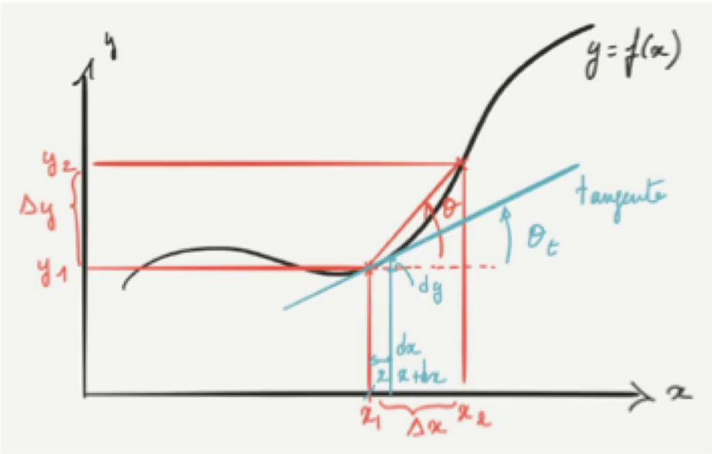
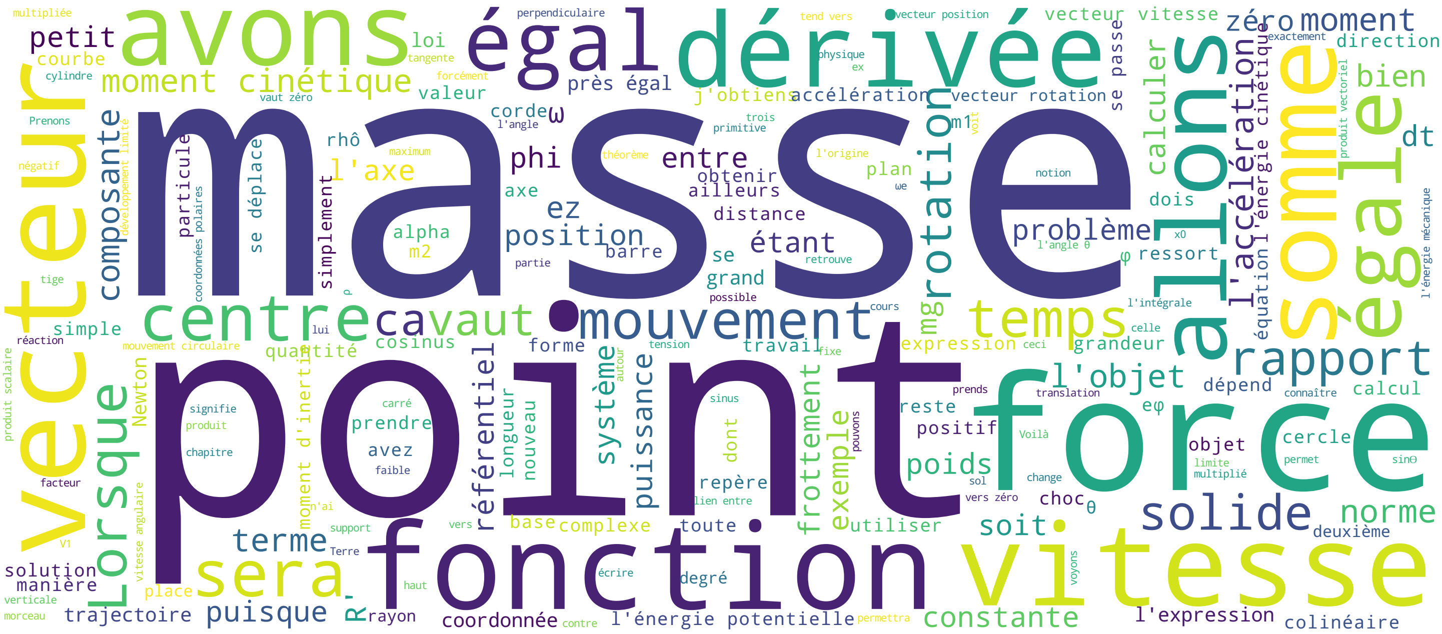


Fonctions

Prof. Cécile Hébert



Video

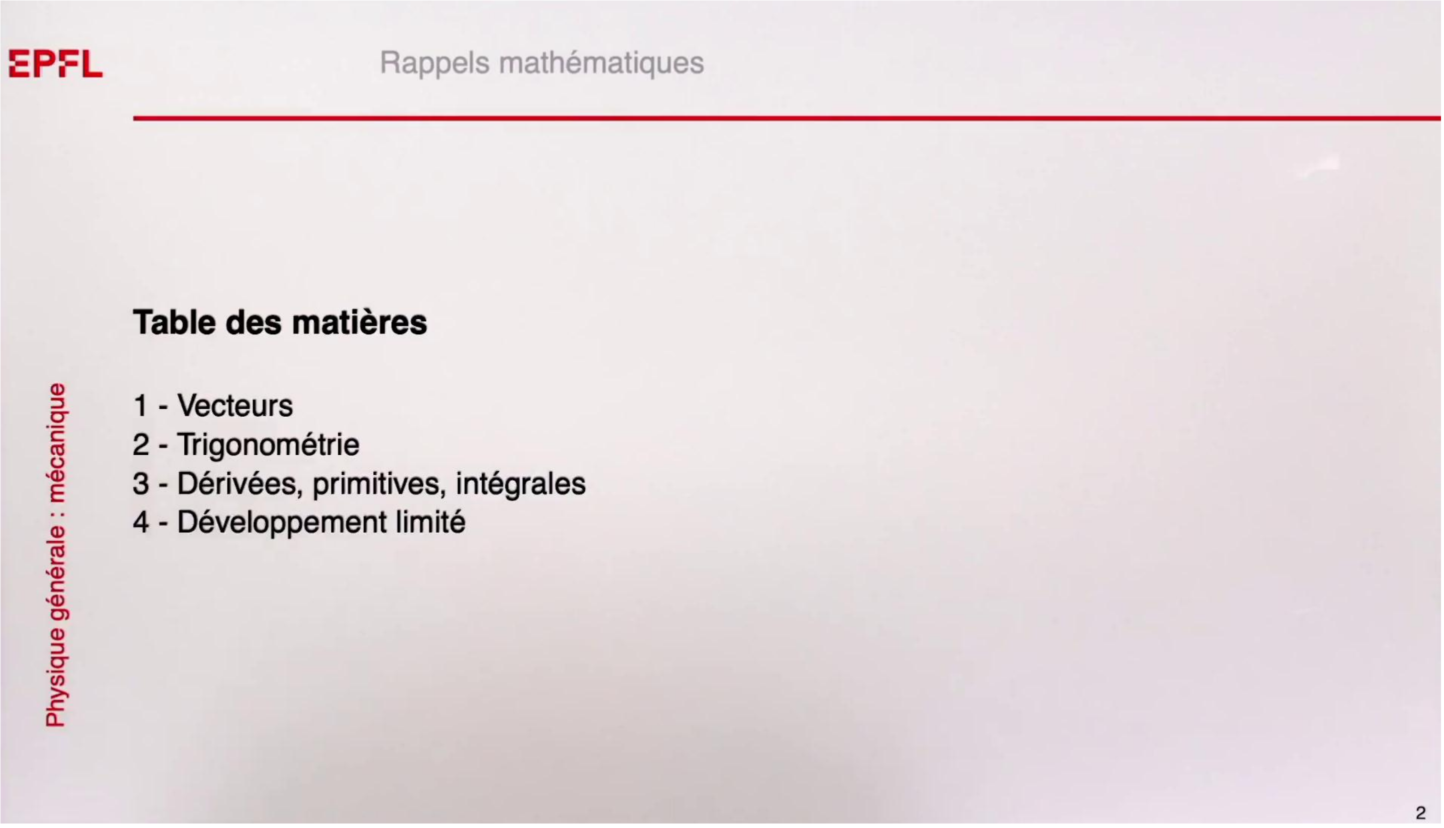
EPFL

Bonjour à tous. Pour le cours de physique, nous allons analyser des problèmes et nous allons chercher à faire des prédictions. Mais ces analyses se feront en fonction de quelque chose. En fonction, cela veut dire que nous allons avoir besoin d'analyser une fonction, deux variables. Analyser une fonction dit que nous aurons besoin d'utiliser : dérivée, primitive, intégrale et développement limité. C'est ce que nous allons voir dans cette vidéo.

Notes

Summary

0m 05s



Nous sommes dans le chapitre Rappels mathématiques et nous allons voir les dérivées primitives et intégrales ainsi que le développement limité.

Notes

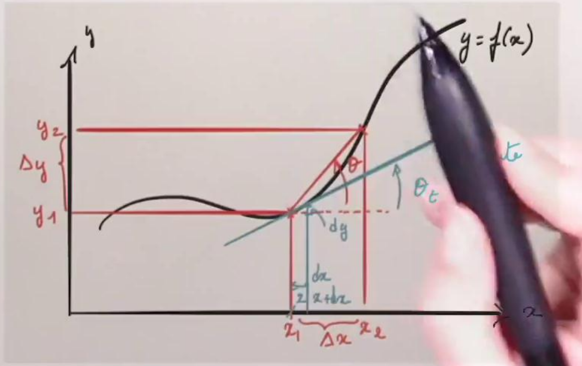
Summary

0m 33s

Physique générale : mécanique

La dérivée de la fonction f au point 1 est la limite de $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la *pente de la tangente à la courbe*.

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx}$$



En physique on utilisera souvent la variation infinitésimale de la fonction f

$$df = f(x + dx) - f(x)$$

pour une variation dx de x.

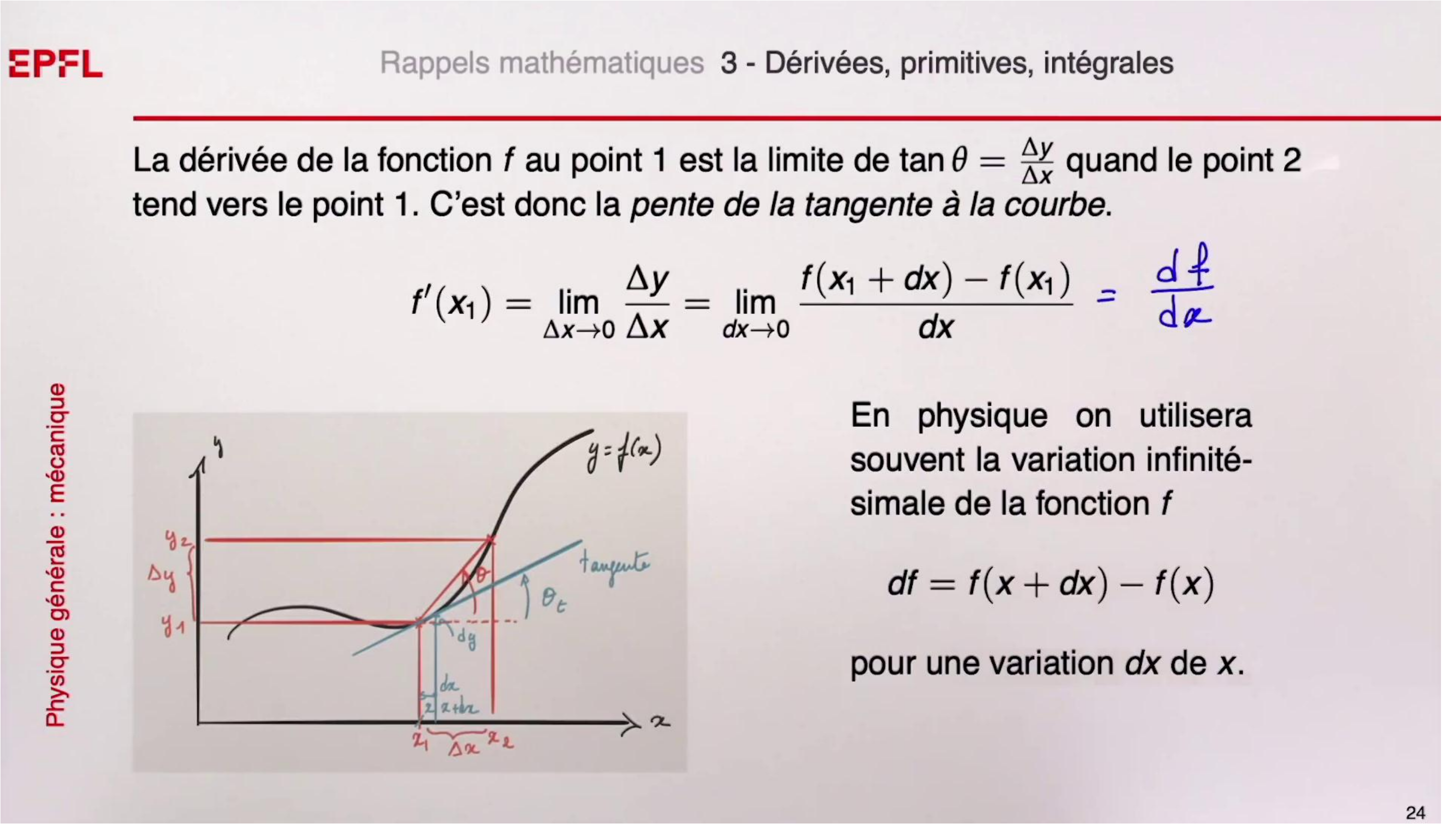
24

Tout d'abord les dérivés. Considérons une fonction y = f(x) représentée par sa courbe dans le plan (x; y). Je choisis deux points de coordonnées x1 et x2 et je trace la corde entre ces deux points. Cette corde a une certaine pente caractérisée par l'angle θ mesurée avec l'axe Ox. Le point 1 a comme coordonnées x1 et y1 qui est f(x1). Le point 2 a comme coordonnées x2 et y2 qui est f(x2). J'appelle Δx la différence x2-x1. Et Δy la différence y2-y1. À ce moment-là, je peux obtenir l'angle θ par sa tangente qui est côté opposé sur côté adjacent, soit Δy/Δx. Je vais maintenant regarder ce qui se passe si je rapproche x2 de x1. Je fais descendre x2 le long de la courbe et je vois que ma corde se rapproche de la tangente.

Notes

Summary

0m 42s

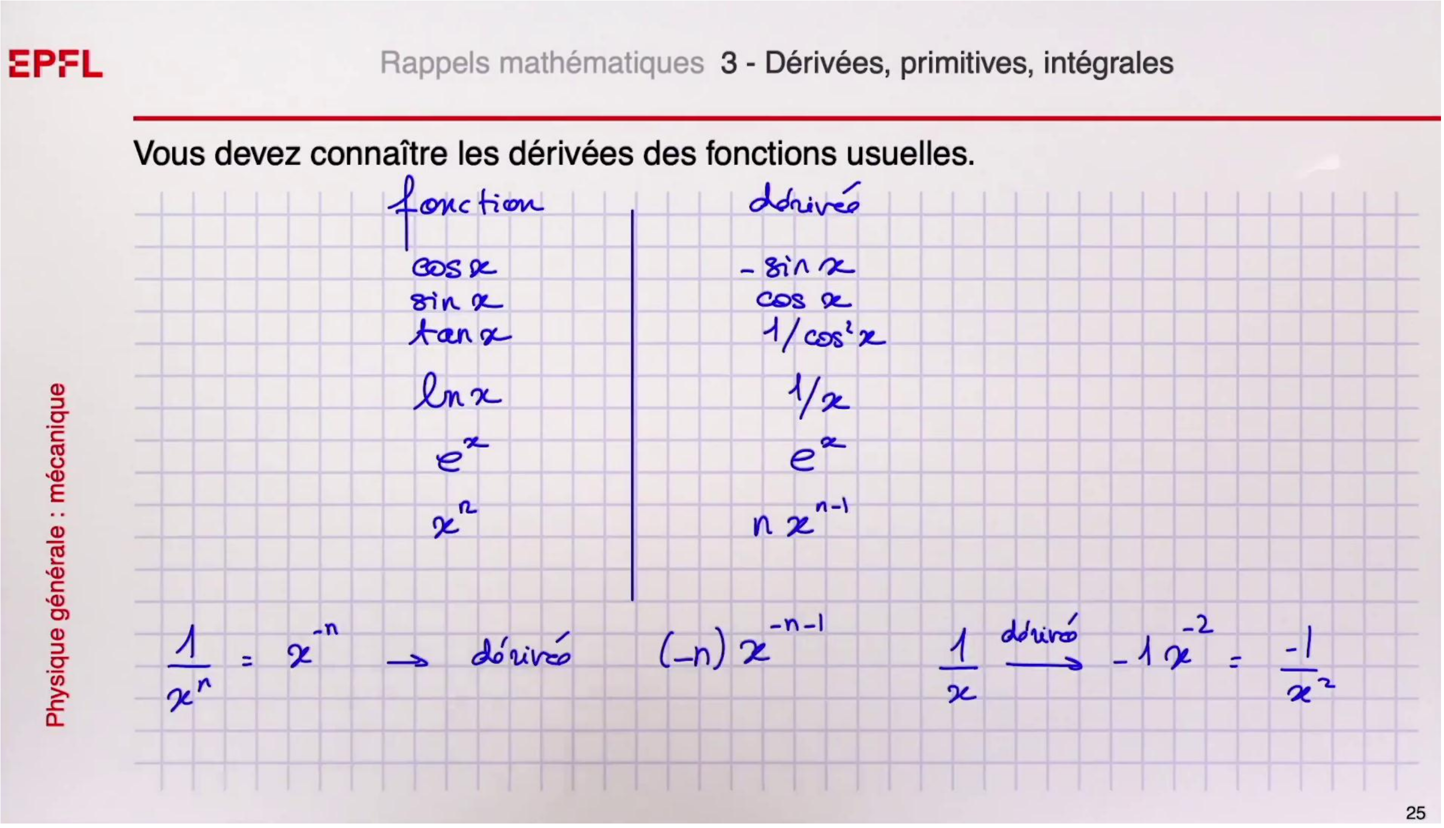


La dérivée de la fonction f au point 1 est obtenue comme la limite de ΔY/ΔX lorsque je fais tendre le point 2 vers le point 1. Cela revient à remplacer ΔX par un petit dx, ΔY par un petit dy et à faire la limite quand dx tend vers 0 de dy/dx C'est donc la pente de la tangente à la courbe, θt. Nous pouvons écrire la dérivée de f au point de coordonnées X1 f'(X1) et la limite quand Δx tend vers zéro de ΔY/ΔX ou bien la limite quand dx tend vers zéro de [f(X1+dX)- f(X1)], ceci serait mon X2, sur dX. En physique, nous utiliserons souvent la variation infinitésimale de la fonction f que nous appelons df qui est f(X+ dX)- f(X). Avec cette notation, je vais pouvoir écrire ici la dérivée vaut df/dx pris au point X1.

Notes

Summary

2m 13s

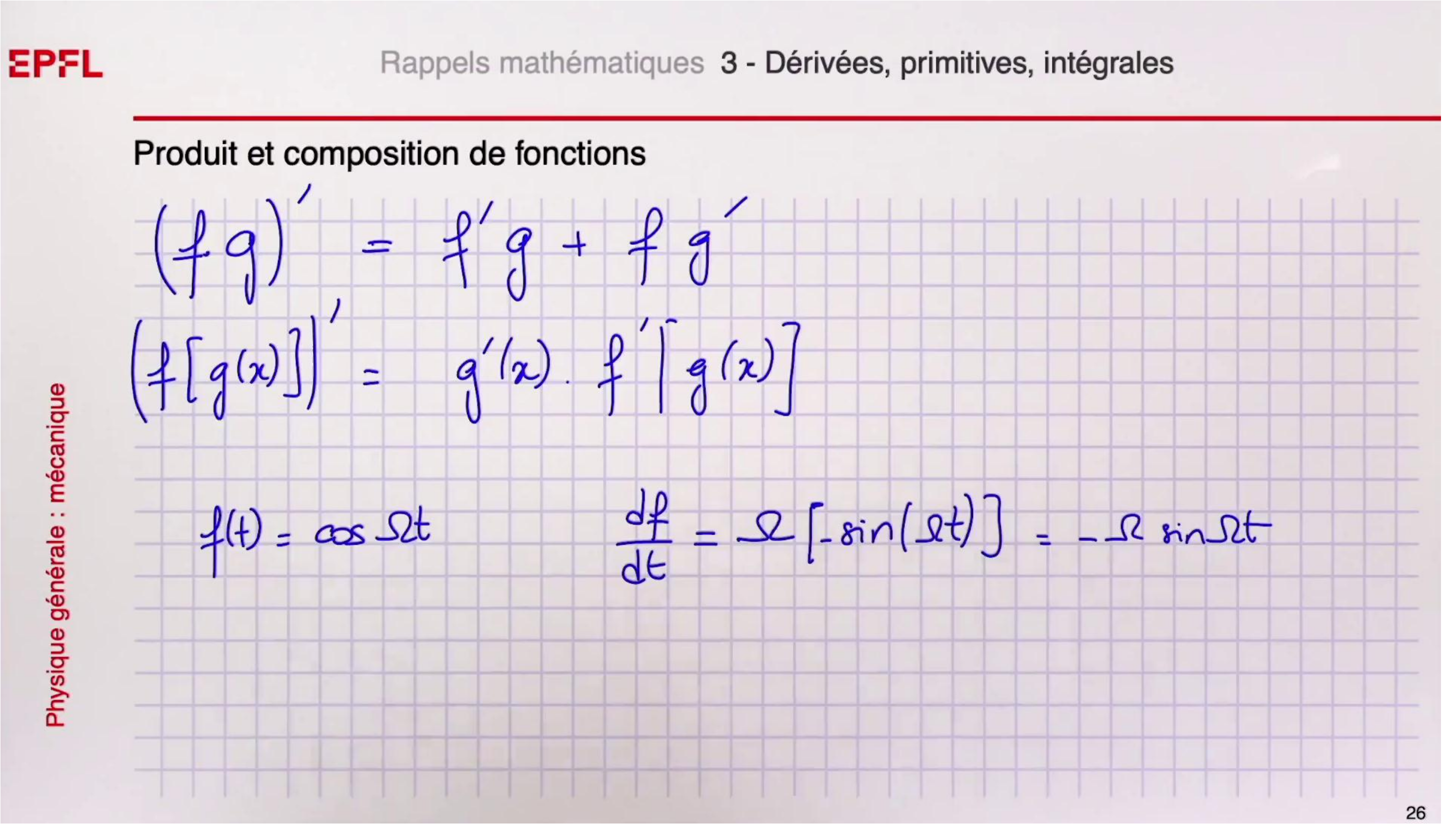


Vous aurez besoin de connaître les dérivées d'un certain nombre de fonctions usuelles. Nous utiliserons cosinus x dont la dérivée est -sinus x, sinus x dont la dérivée est cosinus x, tangente x dont la dérivée est 1/cosinus² x, ln x dont la dérivée est 1/x, exponentielle x dont la dérivée est exponentielle x. Et pour finir x puissance n dont la dérivée est nx puissance n-1. Cette dernière vous permettra de retrouver la dérivée de n'importe quel polynôme ou de 1/x puissance n. En effet, 1/x puissance n vaut tout simplement x puissance -n. Si vous calculez sa dérivée, vous obtenez (-n)x puissance -n -1. Donc 1/x a comme dérivée -1x puissance -2 soit -1/x².

Notes

Summary

3m 46s



Vous gérez des fonctions plus complexes en utilisant le produit et la composition de fonctions. Lorsque vous avez deux fonctions f et g, le produit (fg)' dérivé s'obtient avec f'g+fg'. Et pour la composition, si vous avez une fonction (f[g(x)])', sa dérivée s'obtient comme étant g'(x).f'[g(x)] Nos fonctions ne seront pas forcément des fonctions de x, nous pourrons avoir des fonctions du temps ou bien d'autres paramètres importants. Prenons un exemple. Si f(t)= cos Ωt. La dérivée de f par rapport au temps s'écrira : df/dt. C'est une composition, je dois dériver Ωt, la dérivée de Ωt est la constante Ω, multiplier par la dérivée de cosinus, c'est -sinus, appliqué à la fonction, g à l'intérieur donc Ωt. J'obtiens donc : -ΩSinusΩt.

Notes

Summary

5m 06s

Physique générale : mécanique

Primitive

Calculer la primitive de f(x), c'est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée.

C'est chercher la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Comme la dérivée d'une constante est 0, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc "la primitive de f est définie à une constante près".

$f(x) = \cos x \qquad F(x) = \sin x + A \qquad A$ constante

A : "constante d'intégration"

$F(x_0)$ connue $\quad F(x_0) = F_0 \Rightarrow F(x_0) = \sin x_0 + A = F_0 \Rightarrow A = F_0 - \sin x_0$

$F(x) = \sin x - \sin x_0 + F_0$

27

Vous aurez besoin de savoir calculer les primitives. Calculer la primitive de f, c'est en fait la manœuvre inverse d'un calcul de dérivée. C'est chercher une fonction F(X) telle que F'(X)=f(X) Et comme la dérivée d'une constante est zéro, on peut ajouter n'importe quelle constante à F cela ne changera rien. C'est pour ça qu'on dit que la primitive de f est définie à une constante près. Par exemple, si la fonction connue f(x)= cos x. La fonction dont la dérivée est : cosinus et la fonction sinus. Donc F(x)= sinusx + A puisque c'est défini à une constante près plus A. A constante. On appelle A la constante d'intégration. Si on connaît la valeur de F pour un point particulier, par exemple F(x0) connu, nous serons à même de déterminer A. Nous mettons x0 dans l'équation suivante : F(x0)= sinusx0+A. Cela vaut aussi F0. Donc A= F0- sinusx0. Cela nous donnera : F(x)= sinusx - sinusx0 + F0.

Notes

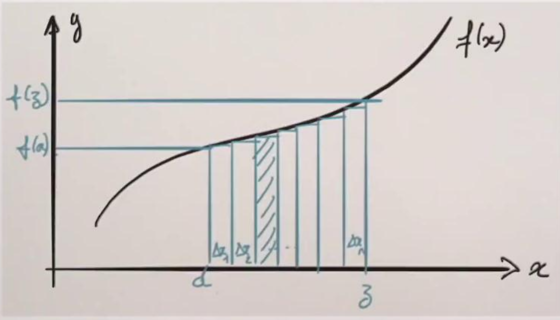
Summary

6m 40s

Physique générale : mécanique

Intégrale

On cherche à calculer l'aire sous la courbe entre le point $x = a$ et $x = z$.



C'est à peu près la somme des petits rectangles de largeur Δx_i et de hauteur $f(x_i)$

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

Plus Δx est petit plus l'aire est calculée juste. Finalement

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a)$$

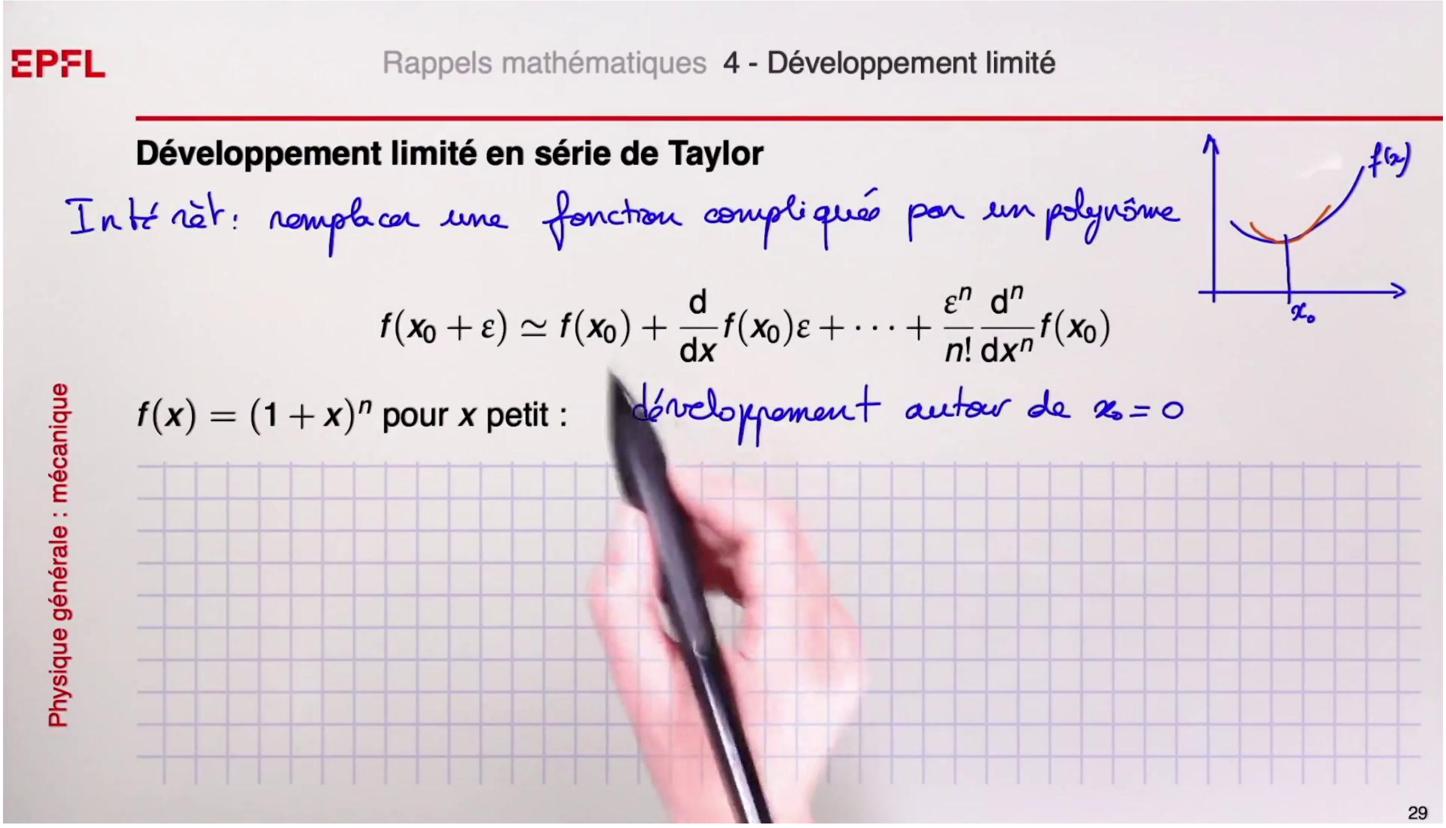
28

Si nous avons une fonction f(x) et que l'on cherche à calculer entre un point A et un point Z l'aire sous la courbe f(x). On peut l'approximer par une série de petits rectangles que l'on somme. C'est donc la somme sur l'ensemble de ces petits rectangles de la fonction au point Xi multiplié par la largeur du rectangle. En faisant tendre la largeur du rectangle vers zéro, je dois en sommer de plus en plus, mais j'obtiens une approximation de plus en plus précise de mon aire. C'est la limite quand Δx, la largeur du rectangle tend vers zéro de cette somme. C'est égal à l'intégrale de a jusqu'à z de f(X)dX. C'est égal à la primitive de la fonction f F(z)-F(a).

Notes

Summary

8m 21s

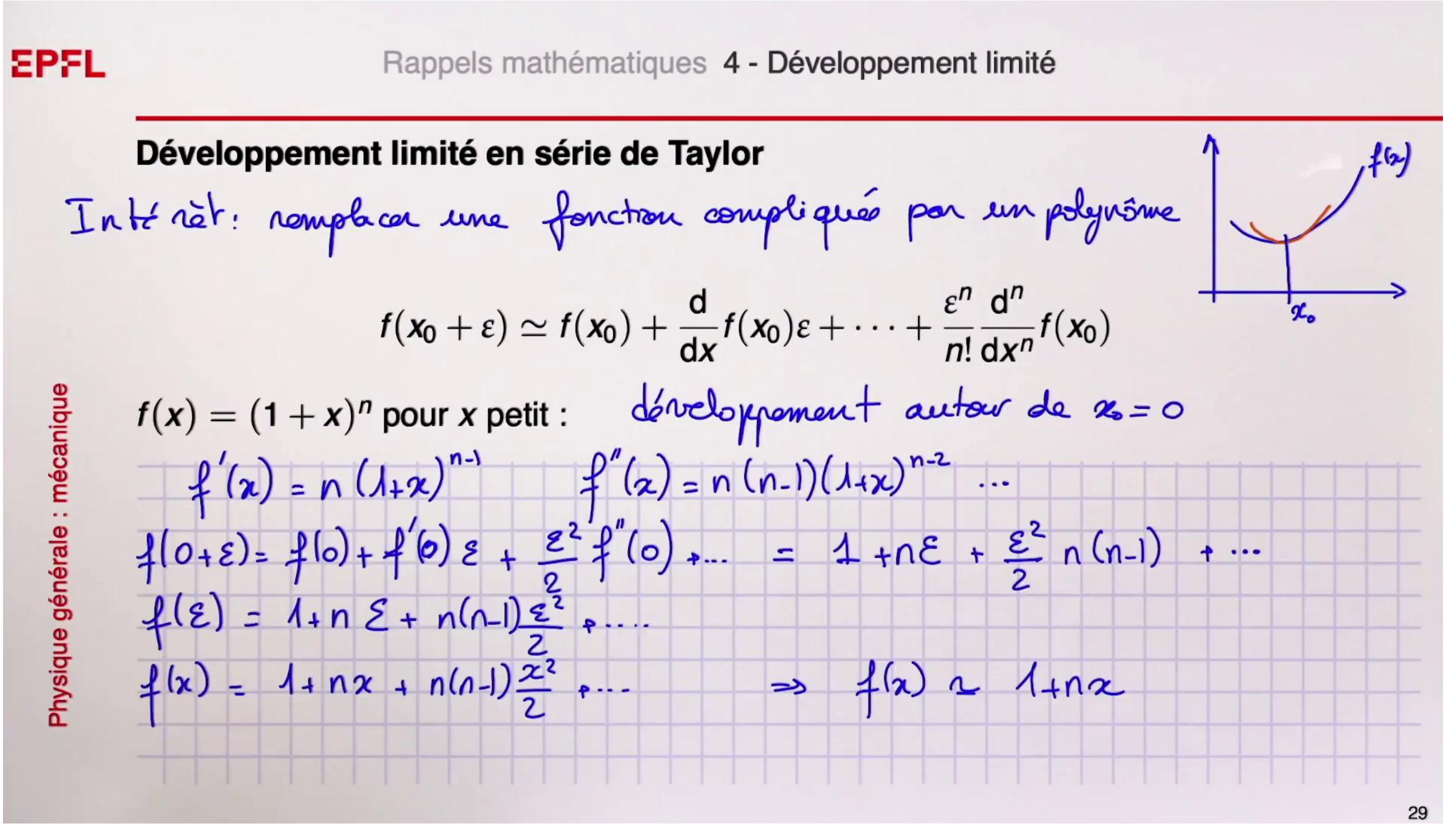


Et pour finir, un outil que nous utiliserons est le développement limité ou développement en série de Taylor. L'intérêt principal de cet outil est qu'il nous permettra de remplacer une fonction compliquée par un polynôme qui sera beaucoup plus simple à manipuler. Si vous avez une fonction f(x). Avec le développement limité. Vous cherchez le polynôme qui se rapproche le plus possible de la fonction f. On se place donc à proximité d'un point x0. Et autour de ce point x0, on cherche à calculer la fonction f(x0+Ɛ). Et cette fonction est à peu près égale à f(x0)+d/dx f(x0)Ɛ+...+Ɛ puissance n sur factorielle n dérivée n fois de f(X0). La fonction f et ses dérivés prises en x0 sont des valeurs. Nous avons donc un polynôme en Ɛ. Ça, c'est ce que vous voyez souvent en maths. En physique, par exemple, nous aurons f(X)=(1+X) puissance n et ce qui nous intéressera c'est de la approximer quand X est petit. Comment faire le lien entre les deux ? D'abord, x petit signifie que nous faisons un développement autour d'un x0 petit, donc en fait autour de x0=0. Et le Ɛ de notre formule mathématique correspond en fait au x de notre fonction. J'aurais besoin de la dérivée première et peut-être de la dérivée seconde de f par rapport à x.

Notes

Summary

9m 23s



Je vais calculer f'(x). C'est n (1+x) à la puissance n-1. La dérivée seconde de x par rapport à x, est donc n (n -1)(1+x) à la puissance n-2 Etc. Reprenons cette expression-là avec x0 qui vaut 0. J'ai donc f(0+Ɛ) égal f(0) + f'(0)Ɛ plus, le deuxième sera (Ɛ²/2)f''(0) qui vaut zéro, etc. f(0) c'est 0 ici cela vaut 1 à la puissance n, c'est 1. f'(0) je le trouve ici. Je mets x qui vaut 0, c'est donc n. Et je ne dois pas oublier le Ɛ. Le terme suivant est donc en Ɛ²2/2 f''(0) qui est n(n -1). Au final, f(Ɛ)=1+n Ɛ+n(n-1)Ɛ²/2+... Si je prends une fonction de X, je peux donc écrire f(x)= 1+nx+n(n-1)x²/2 +.... Dans la plupart du temps, nous aurons besoin uniquement du développement limité au premier ordre. Ce terme-là sera négligeable. Nous pourrons nous contenter du premier terme. Et nous écrirons en physique, f(x) est à peu près égal à un 1+nx. OK, plutôt que de refaire tous ces calculs à chaque fois que vous avez un développement limité à faire, je vous suggère de connaître les développements limités des fonctions usuelles.

Notes

Summary

11m 31s

Développement limité en série de Taylor utiles dans ce cours

$$(1+x)^n \simeq 1+nx \qquad \frac{1}{(1+x)^n} \simeq 1-nx$$

$$\ln(1+x) \simeq x \qquad e^x \simeq 1+x$$

$$\cos x \simeq 1-\frac{x^2}{2} \qquad \sin x \simeq x \qquad \tan x \simeq x$$

Pour x petit (donc proche de 0)

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = [1+(-x)]^{-1} \simeq 1+(-1)(-x) = 1+x$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \simeq 1+x$$

1+x à la puissance n est à peu près égal 1+nx 1/(1+x) à la puissance n est à peu près égal 1-nx ln (1+x) à peu près égal à x. Exponentielle x à peu près égal à 1+x cosinus x est à peu près égale à 1-x²/2 sinus x à peu près égal à x et tangente x à peu près égal à x. Tout ceci pour x petit. Si vous vous retrouvez avec une fonction f(x)=1 /1-x. Comment faire avec ça ? C'est tout simplement égal à 1/1+(-x), que vous pouvez écrire : [1+(-x)] à la puissance -1. En utilisant cette expression et en mettant -x à la place de x et -1 à la place de n, cela va nous donner : 1+ (-1) pour n et -x pour x, soit 1+x. Ainsi, c'est à peu près égal. Donc f(x)=1/1-x à peu près égal à 1+x.

Notes

Summary

14m 14s

Voilà, nous venons passer en revue les outils d'analyse de fonctions qui seront indispensables pour le cours de physique.

Notes

Summary

15m 53s