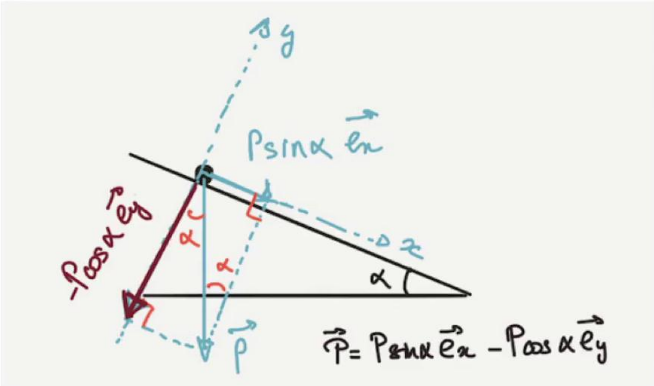
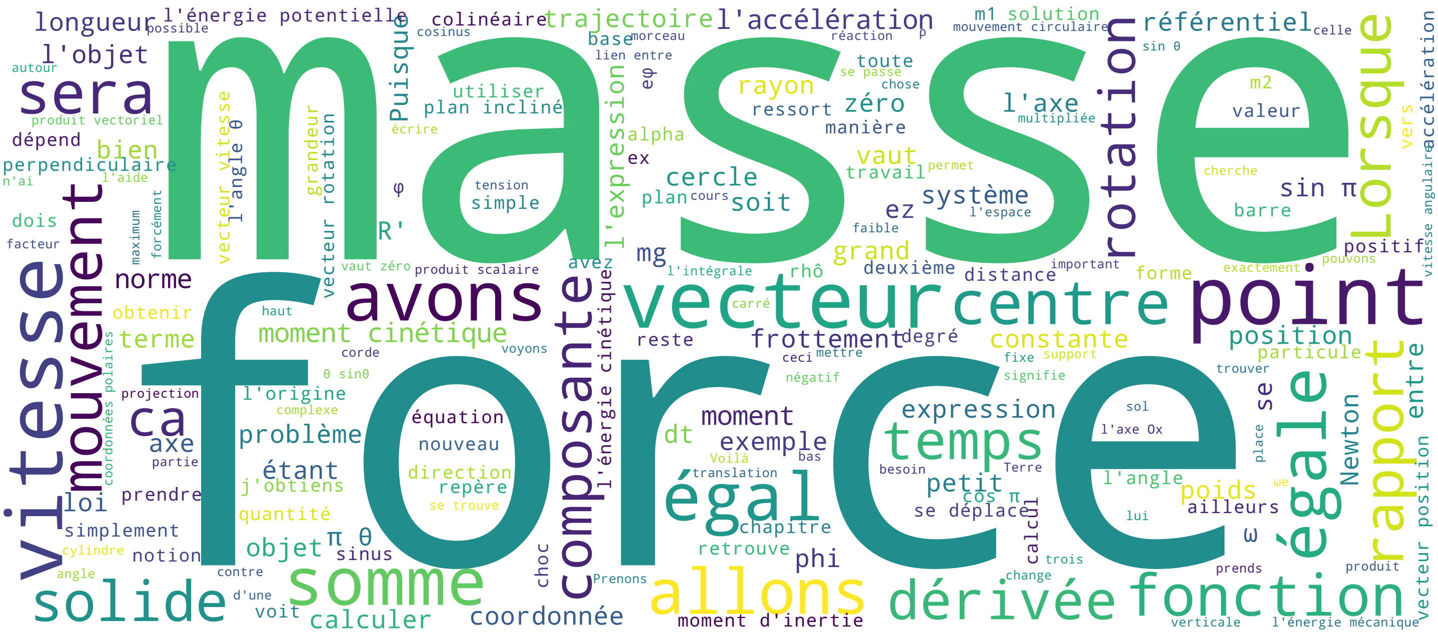
Physique générale : mécanique



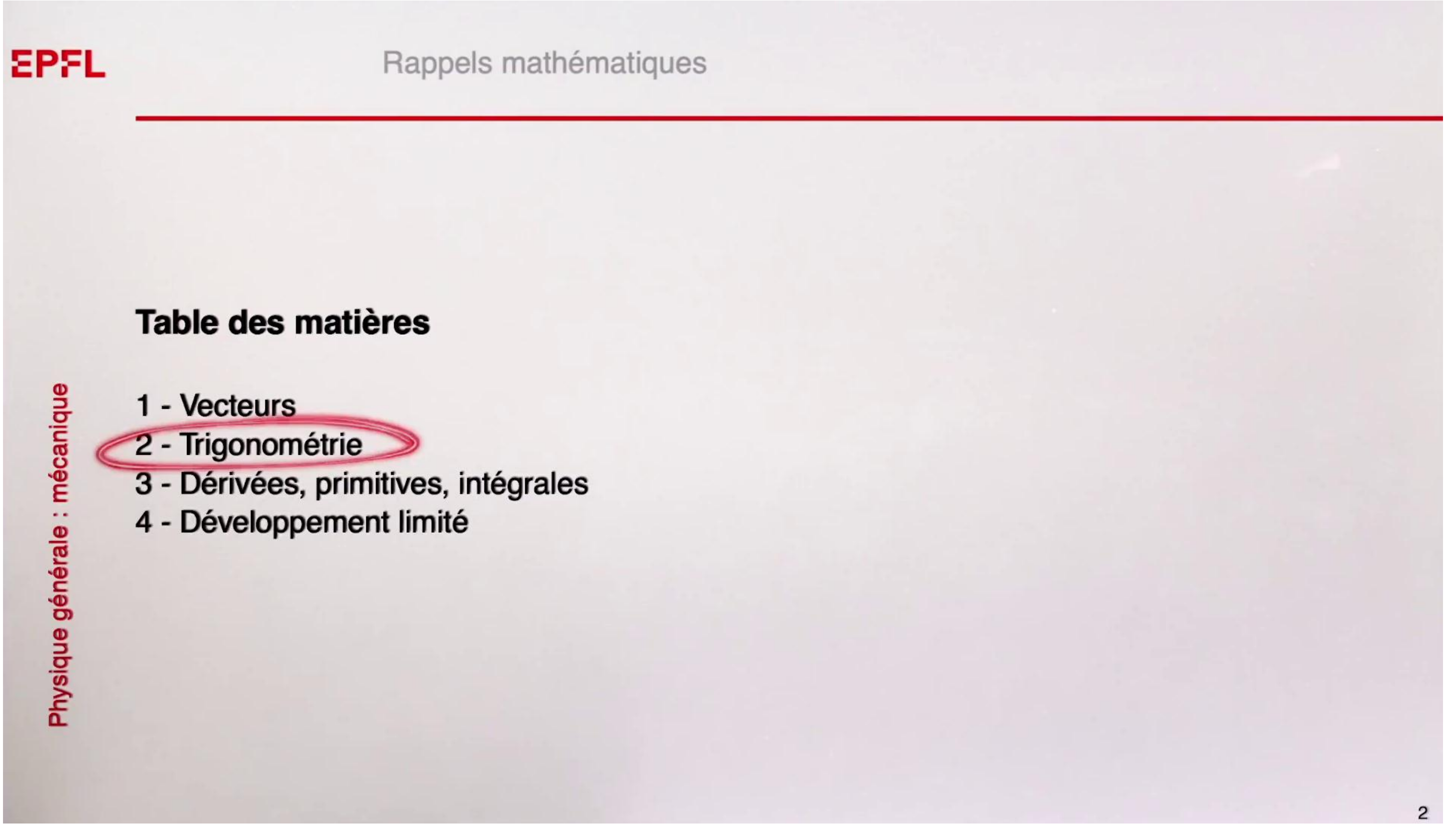
Trigonométrie

Prof. Cécile Hébert



EPFL

Video

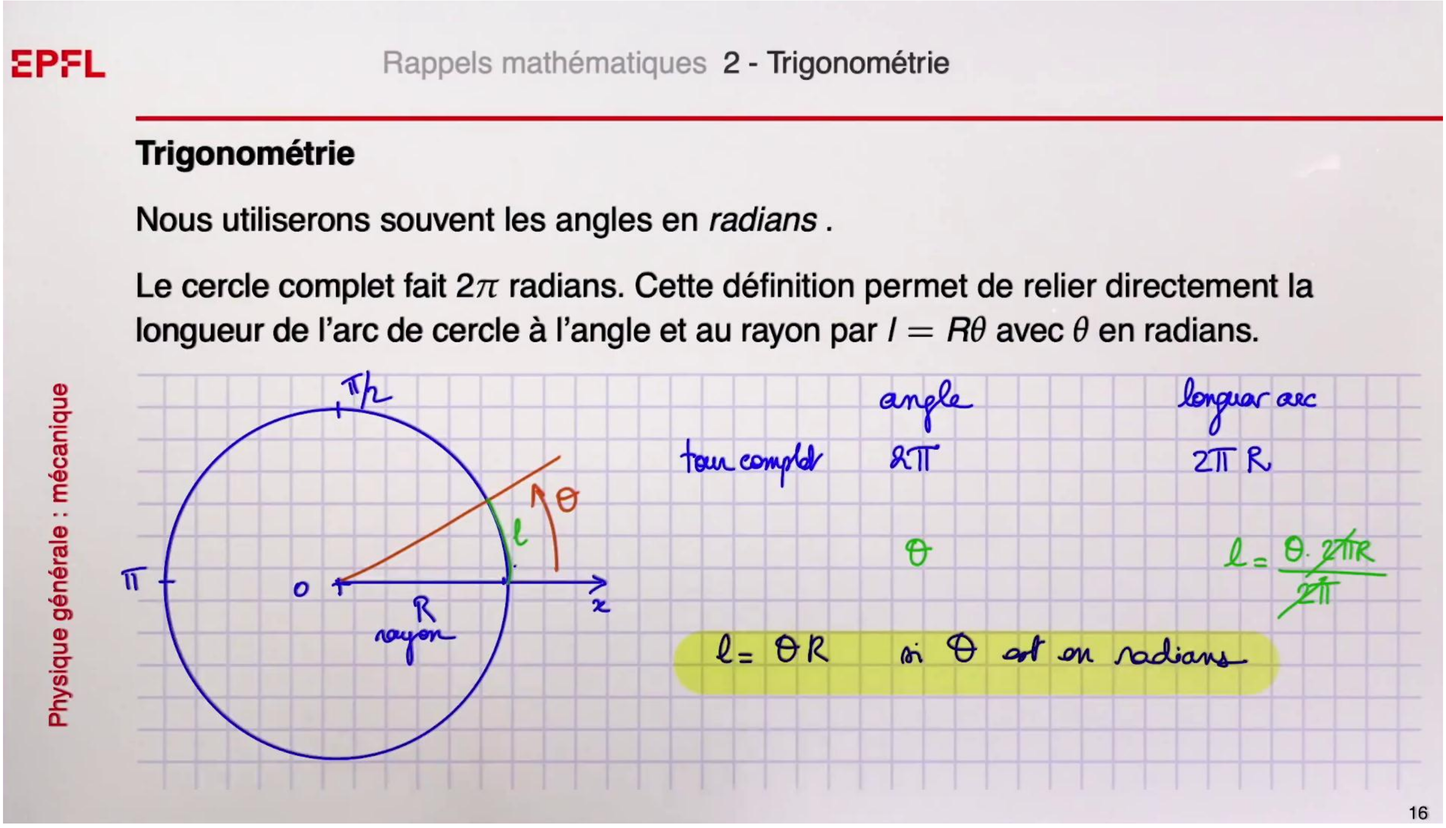


Bonjour à tous. En physique, pour être capable d'analyser les problèmes, nous allons devoir nous repérer dans l'espace. Ces repérages seront souvent faits avec des angles. Pour manipuler les objets tels que les vecteurs, les forces, les vitesses, nous allons utiliser la trigonométrie. Le but de cette vidéo est donc de voir les notions de trigonométrie dont nous aurons besoin. Dans le chapitre « Rappels mathématiques », nous nous intéressons ici à la trigonométrie.

Notes

Summary

0m 05s

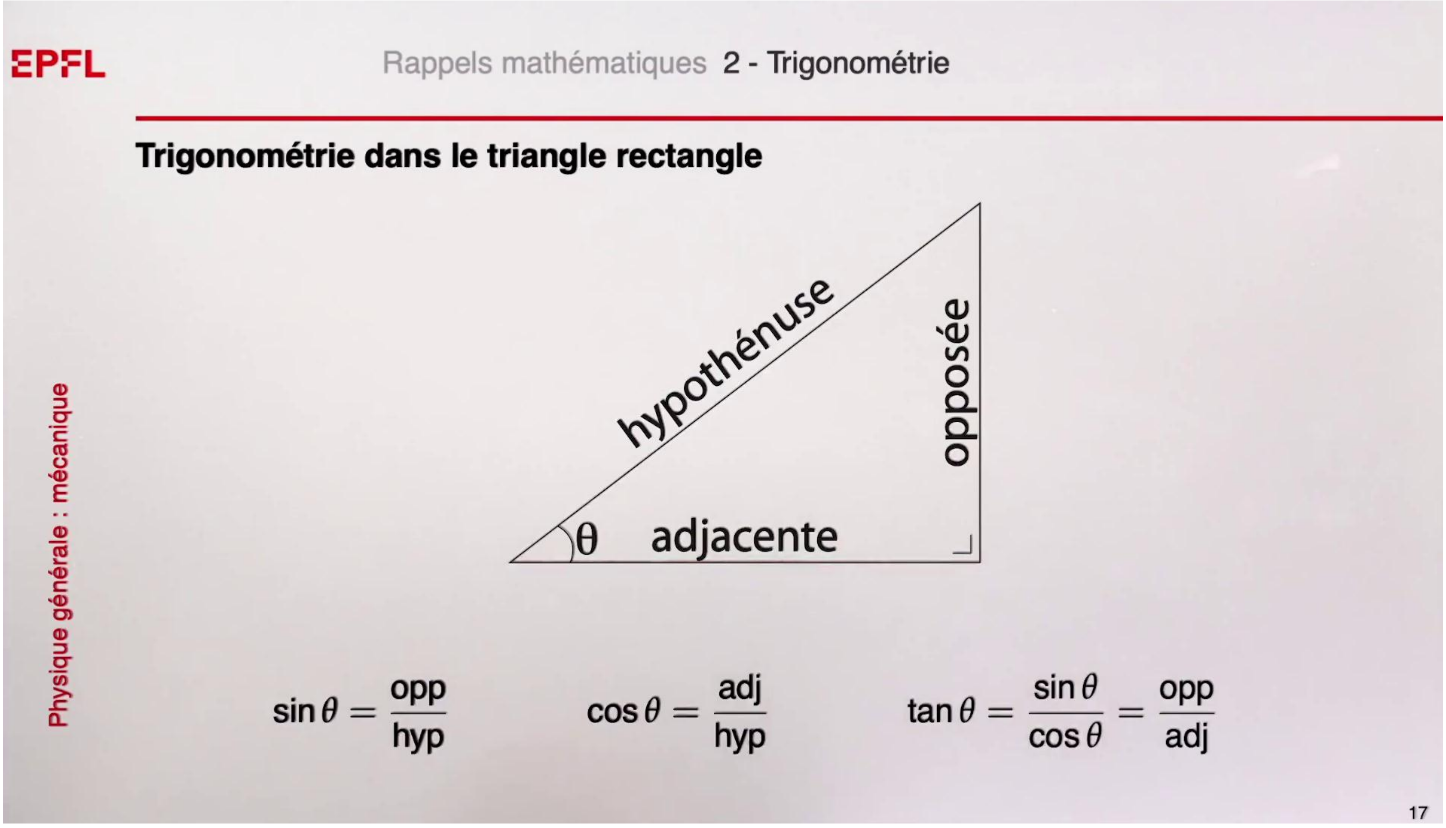


D'abord, en trigonométrie, nous utiliserons principalement des angles en radians. Si je dessine un cercle complet de centre O et que je prends comme point de départ un axe Ox, le tour complet fait 360°, mais en radian, il fait 2π radians. Pourquoi prendre cette étrange définition ? Cela nous permet directement de relier la longueur de l'arc à l'angle qui définit cet arc. Si je regarde le lien entre l'angle et la longueur de l'arc. Le tour complet fait 2π radians, c'est la définition du radian. La longueur du tour complet, c'est tout simplement le périmètre du cercle, et le périmètre d'un cercle, c'est $2\pi R$ si R est son rayon. Si je prends un angle quelconque θ, et que je considère toujours mon cercle de rayon R, l'arc a ici une longueur l pour un angle θ. La longueur l étant proportionnelle à l'angle θ, je vais obtenir la longueur l par le produit en croix θ multiplié par $2\pi R$ divisé par 2π. En simplifiant par 2π, j'obtiens donc $l = \theta.R$. La longueur de cet arc est égale à l'angle multiplié par le rayon. C'est donc l'intérêt majeur de cette mesure en radians. Puisque le tour complet fait 2π, le demi-tour fait π et 90° correspond à $\pi/2$.

Notes

Summary

0m 34s

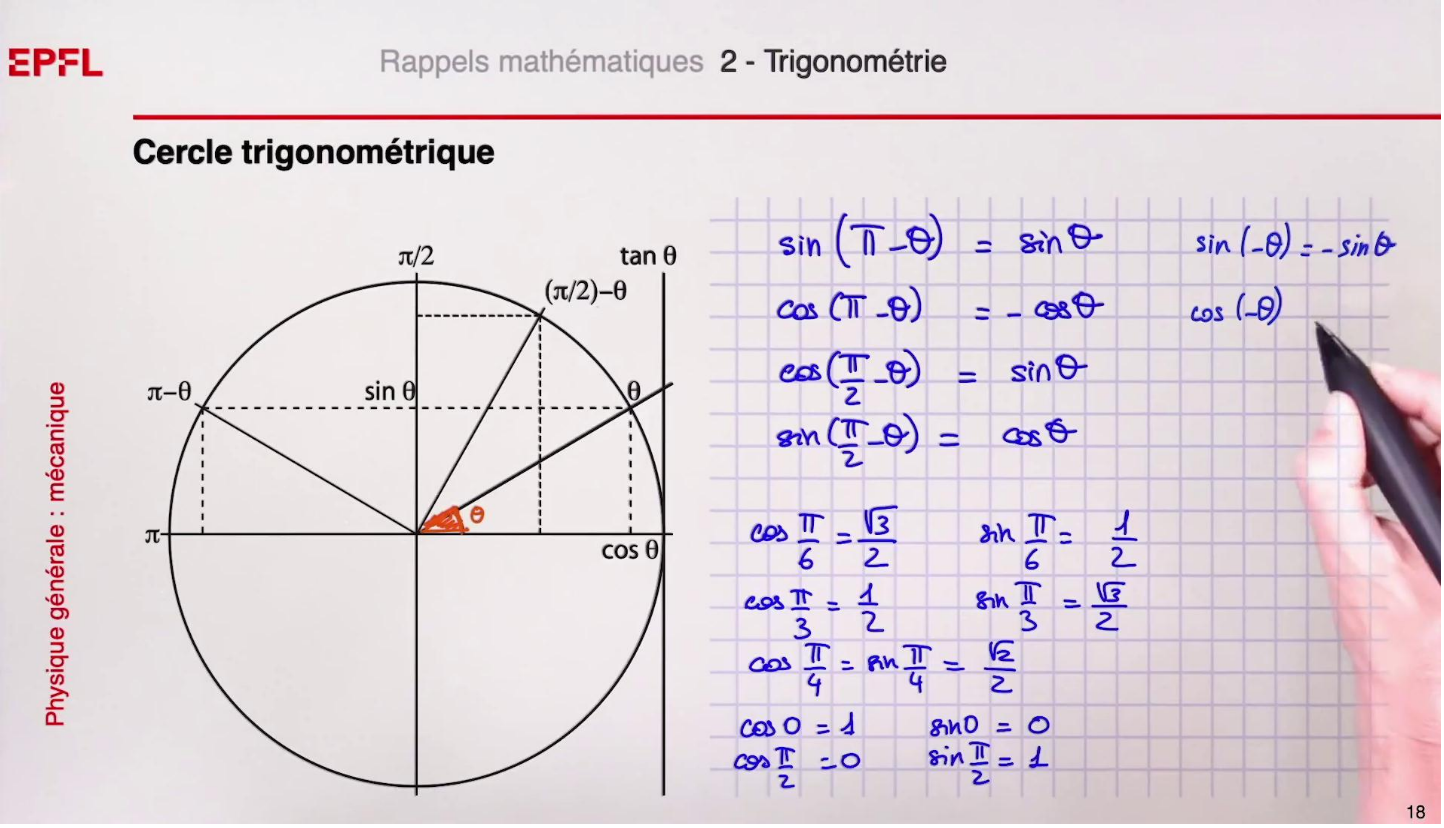


La trigonométrie dans un triangle rectangle avec un angle droit ici, nous permet de relier le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle θ au rapport de longueur. sinθ = opp/hyp. cosθ = adj/hyp. Et tanθ = opp/adj.

Notes

Summary

2m 38s

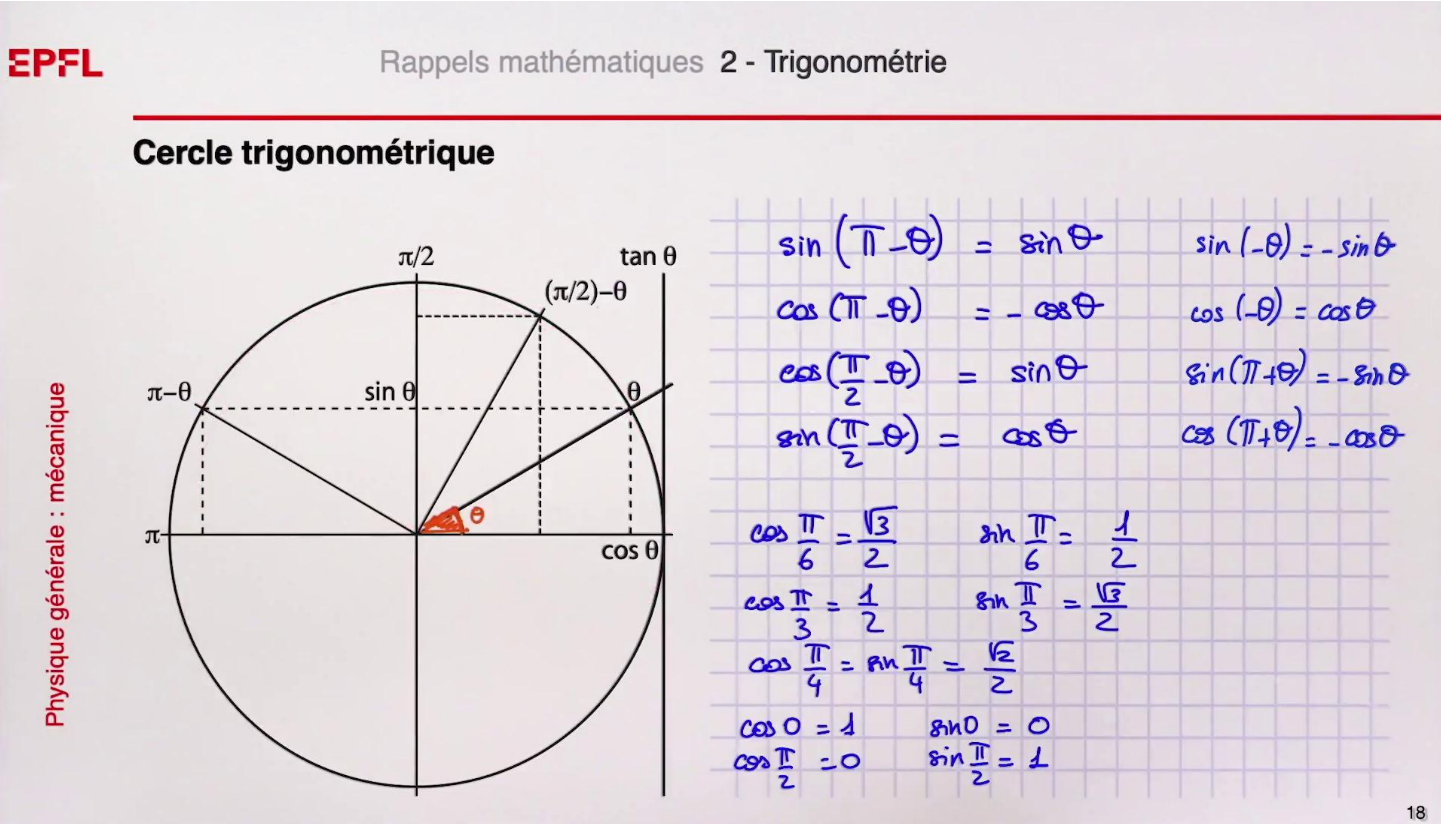


Si nous avons ici un angle θ, nous utiliserons souvent des relations entre sinθ et cosθ, et les sinus et cosinus d'un certain nombre d'angles particuliers, (π/2) − θ et π − θ. Dans le cercle trigonométrique, qui a donc un rayon R = 1, je retrouve cosθ sur l'axe Ox et sinθ sur l'axe Oy. Si je m'intéresse à l'angle π-θ, sin(π-θ) = sinθ. cos(π-θ) = -cosθ. Je cherche maintenant sinus et cosinus de (π/2) - θ. J'ai l'angle θ noté ici. π/2 correspond à un quart de tour. J'enlève θ et je me retrouve donc ici pour (π/2) - θ. cos(π/2 - θ) = sinθ. sin(π/2 - θ) = cosθ. Avec un petit croquis de cercle trigonométrique, il est toujours facile de retrouver ces relations. Vous devez connaître aussi les cos et sin des angles particuliers. cos(π/6) = √3/2, sin(π/6) = 1/2. π/6 = 1/3.π/2. sin(π/6) = 1/2, cos(π/6) = √3/2. cos(π/3) = 1/2, sin(π/3) = √3/2. cos(π/4) = sin(π/4) = √2/2. cos0 = 1 et sin0 = 0. cos(π/2) = 0 et sin(π/2) = 1. Bien entendu, ces expressions ne sont pas forcément exhaustives. Vous pouvez en avoir énormément d'autres. Par exemple, vous avez sin(-θ) et cos(-θ). Une façon de le voir est que la fonction sin est impaire. sin(-θ) = -sinθ. Et la fonction cos étant paire, cos(-θ) = cosθ.

Notes

Summary

3m 06s



On le retrouve aussi sur le cercle trigonométrique. Si je prends l'angle -θ, cos(-θ) = cosθ et sin(-θ) = -sinθ. En combinant cette expression et celle-ci, on peut se demander ce que vaut sin(π+θ) et cos(π+θ). Un coup d'œil sur le cercle. θ, si je rajoute π, c'est un demi-tour. Je me retrouve dans le cadran opposé. J'ai donc -sinθ pour sin(π+θ) et -cosθ pour cos(π+θ). Si je remplace +θ par -θ, j'obtiendrai ici sin(π-θ) et ici sin(-θ). sin(-θ) = -sinθ. Moins par moins fera plus. Donc sin(π-θ) = +sinθ. C'est bien ce que me dit cette expression. On voit donc, par exemple, que cette expression s'obtient comme la combinaison de ces deux-là. À nouveau, c'est à vous de développer la stratégie. Ou vous apprenez tout par cœur, ou vous mettez de manière exhaustive toutes ces relations sur la feuille que vous avez le droit de prendre à l'examen. Mais à ce moment-là, vous aurez beaucoup de choses sur cette feuille. Ou alors vous apprenez à retrouver rapidement ces expressions à l'aide du cercle trigonométrique.

Notes

Summary

6m 14s

EPFL Rappels mathématiques 2 - Trigonométrie

Physique générale : mécanique

Identités trigonométriques

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \qquad (1)$$

$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1} \qquad (2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & (3)\\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & (4)\end{aligned}}$$

. . .et bien d'autres dans votre formulaire et sur le web. Vous devez les savoir ou savoir les retrouver (ou les mettre dans votre formulaire personnel)

19

Nous utiliserons régulièrement les identités trigonométriques. $\cos^2 + \sin^2 = 1$. $\tan\theta$ peut s'écrire $(1/\cos^2\theta) - 1$. Et $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$. $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$. À partir de ces relations, on peut en retrouver beaucoup d'autres. Vous devez les connaître par cœur, savoir les retrouver ou les mettre dans votre formulaire.

Notes

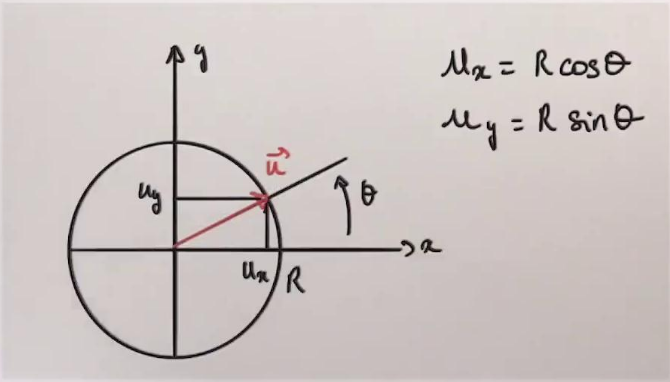
Summary

8m 01s

EPFL Rappels mathématiques 2 - Trigonométrie

Vecteurs et trigonométrie

Vous aurez souvent à trouver les composantes d’un vecteur dont vous connaissez la norme, et l’angle qu’il fait par rapport à un axe de référence. En d’autre termes, la projection d’un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).



Physique générale : mécanique

20

Et enfin, nous utiliserons souvent les vecteurs et la trigonométrie ensemble, car vous aurez souvent à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. Pour cela, ce que vous cherchez, c'est la projection d'un vecteur donné sur des axes, qui ne seront pas forcément verticaux ou horizontaux. Le cas simple et connu est celui d'un cercle de rayon R. Vous avez un vecteur u→ qui part de l'origine. Les composantes de u→ sont Ux et Uy. La composante sur x se trouve par u→.ex→ C'est tout simplement R.cosθ avec θ, l'angle que fait u→ avec l'axe Ox. Uy, la composante de u→ sur l'axe Oy, est égal à R.sinθ de la même manière. La logique sera toujours similaire, mais vous n'aurez pas forcément un vecteur qui part de l'origine et pas forcément des axes Ox et Oy horizontal et vertical.

Notes

Summary

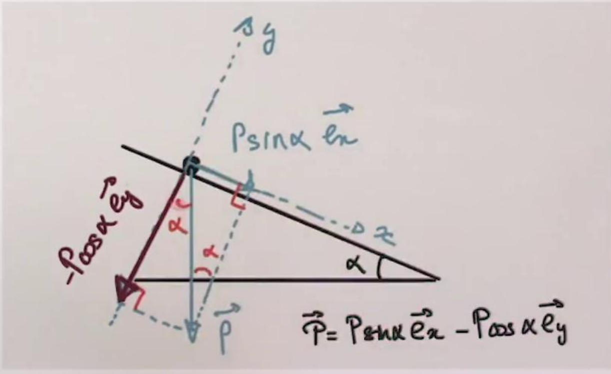
8m 36s

EPFL Rappels mathématiques **2 - Trigonométrie**

Physique générale : mécanique

Vecteurs et trigonométrie

Par exemple, ici, on décompose une force (le poids) en deux composantes portées respectivement par l'axe *x* et l'axe *y*. Avant de faire la projection, il faut bien identifier l'angle par des considérations géométriques.



21

Prenons un exemple. Ici, nous avons un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Nous plaçons un objet sur ce plan incliné. Cet objet est soumis à son poids P qui est égal à mg. Si je cherche les composantes du poids sur un système d'axes placés avec l'axe x parallèle au plan incliné et l'axe y perpendiculaire au plan incliné, je veux obtenir les composantes Px et Py du poids sur ex→ et ey→. La composante du poids sur l'axe Oy est la projection de P→ sur ex→. C'est Psinα.ex→. En effet, j'ai l'angle α ici que je retrouve entre la perpendiculaire et la verticale, et que je retrouve à nouveau à cet endroit-là. La composante du poids sur Oy est dirigée vers les y négatifs et la projection se fait en cosα. C'est donc -Pcosα.ey→. L'important est de bien identifier l'endroit où se trouve l'angle α lorsque vous analysez P→ dans le repère (Ox,Oy).

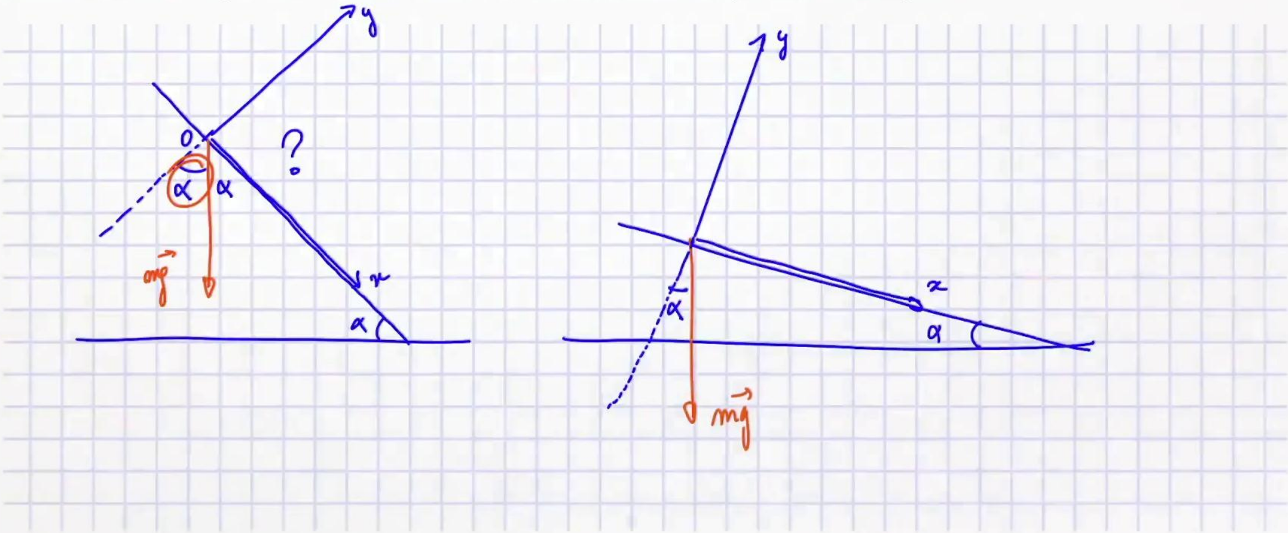
Notes

Summary

9m 46s

Physique générale : mécanique

**Pour cela, faites toujours un dessin avec des angles franchement différents de 45° !
Sinon vous risquez de faire des erreurs dans le report des angles.**



22

Pour ce faire, faites toujours un dessin avec des angles franchement différents de 45° ou π/4. Imaginons que j'ai un plan incliné qui fasse un angle de 45° avec la verticale. J'ai mon axe Ox et Oy et le poids vertical dirigé vers le bas. Je prolonge l'axe Ox. Maintenant, la question est de savoir où se trouve l'angle α. Est-il là ou est-il là ? Ce n'est pas immédiat au premier abord. Et en examen, vous pouvez vous tromper. Si je fais le même schéma avec un angle α très différent de 45°, il est évident que je retrouve l'angle α à cet endroit-là. La bonne réponse était donc ici.

Notes

Summary

11m 25s

Voilà, avec ça, vous connaissez les notions de trigonométrie indispensables pour le cours de physique. Vous avez aussi vu que la trigonométrie est souvent intimement liée à l'utilisation de vecteurs.

Notes

Summary

12m 14s