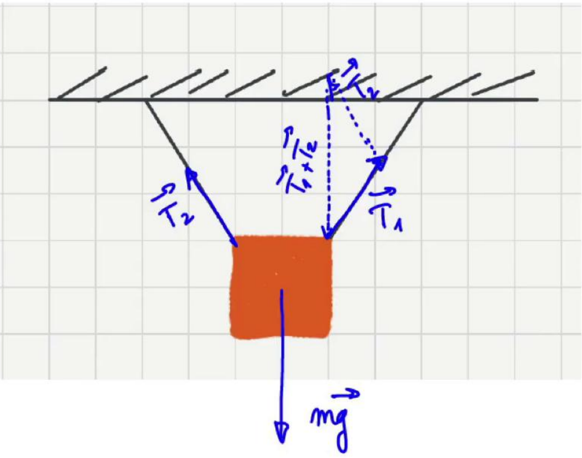
Physique générale : mécanique



Vecteurs

Prof. Cécile Hébert

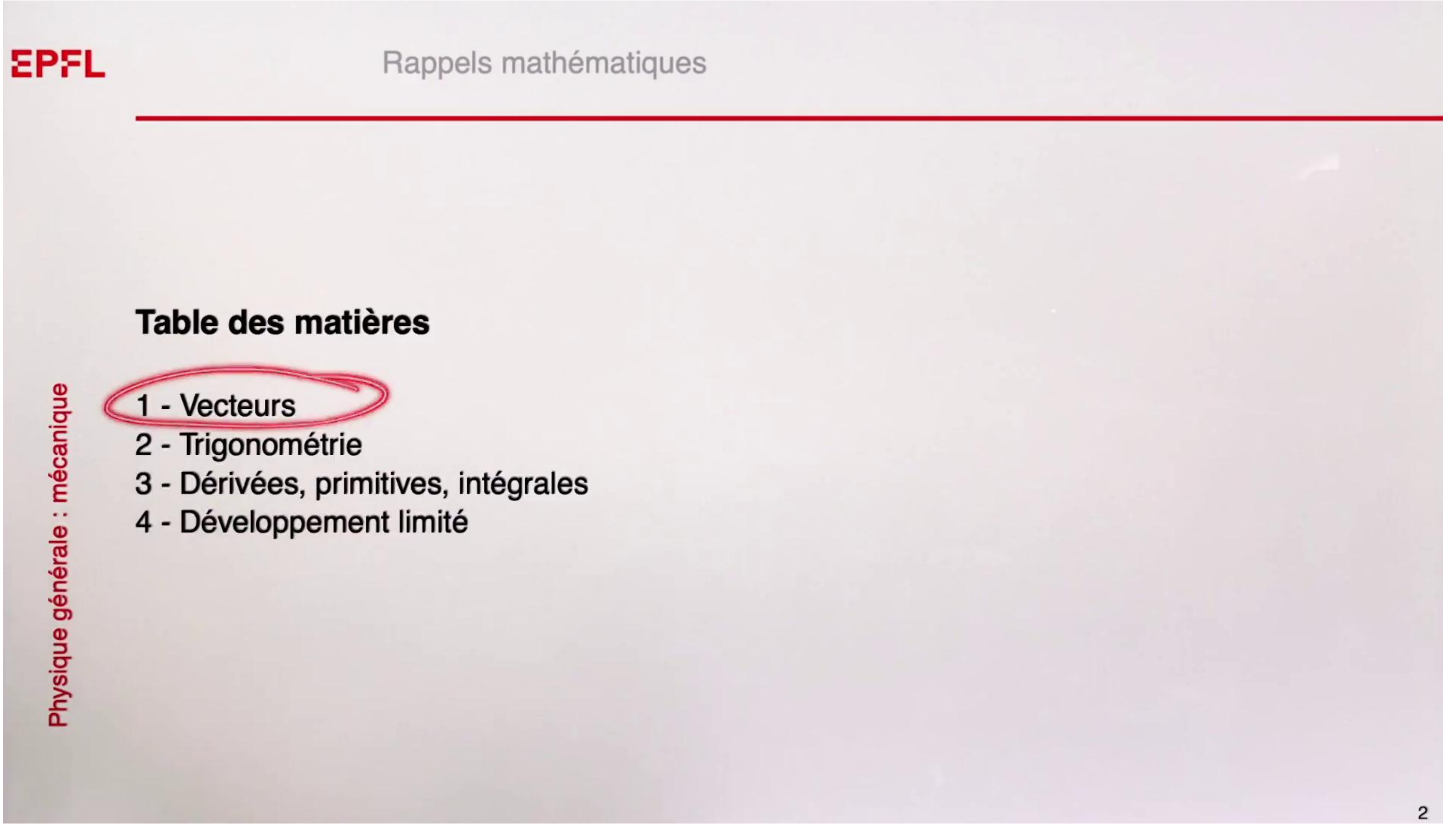
Video

Bonjour à tous. En physique, pour analyser les problèmes, nous avons besoin d'un certain nombre d'outils mathématiques. Dans cette vidéo, nous allons voir l'outil « vecteur ».

Notes

Summary

0m 05s

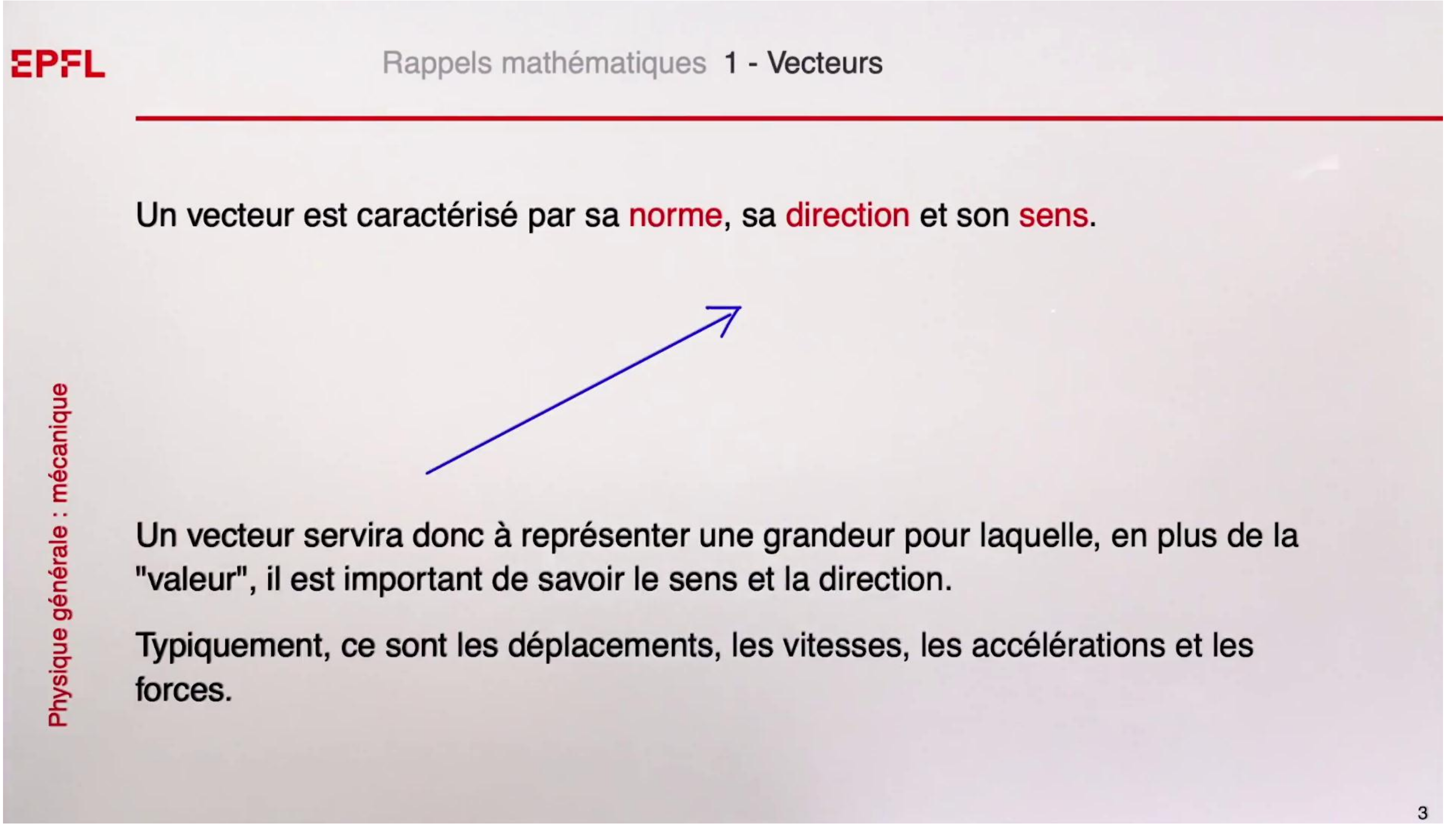


Ce chapitre « Rappels mathématiques » est divisé en quatre parties. Nous commençons par les « Vecteurs ».

Notes

Summary

0m 16s

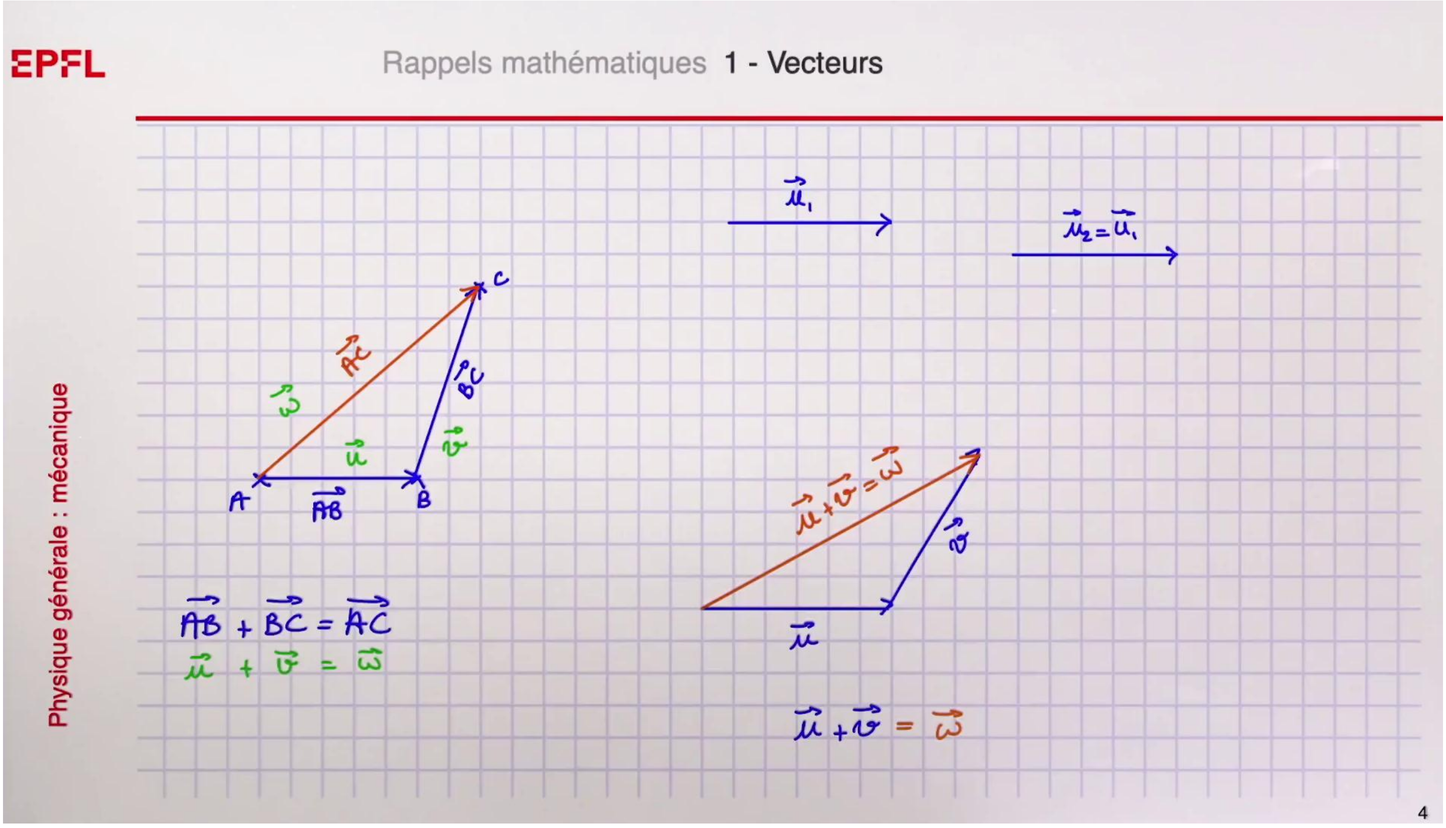


Un vecteur est caractérisé par sa norme, qui est sa longueur, la direction, qui est la droite qui le porte, et le sens qui dit dans quel sens il se déplace sur cette droite. Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de la valeur, il est important de savoir le sens et la direction. Typiquement, dans notre cours, ce seront les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces.

Notes

Summary

0m 21s

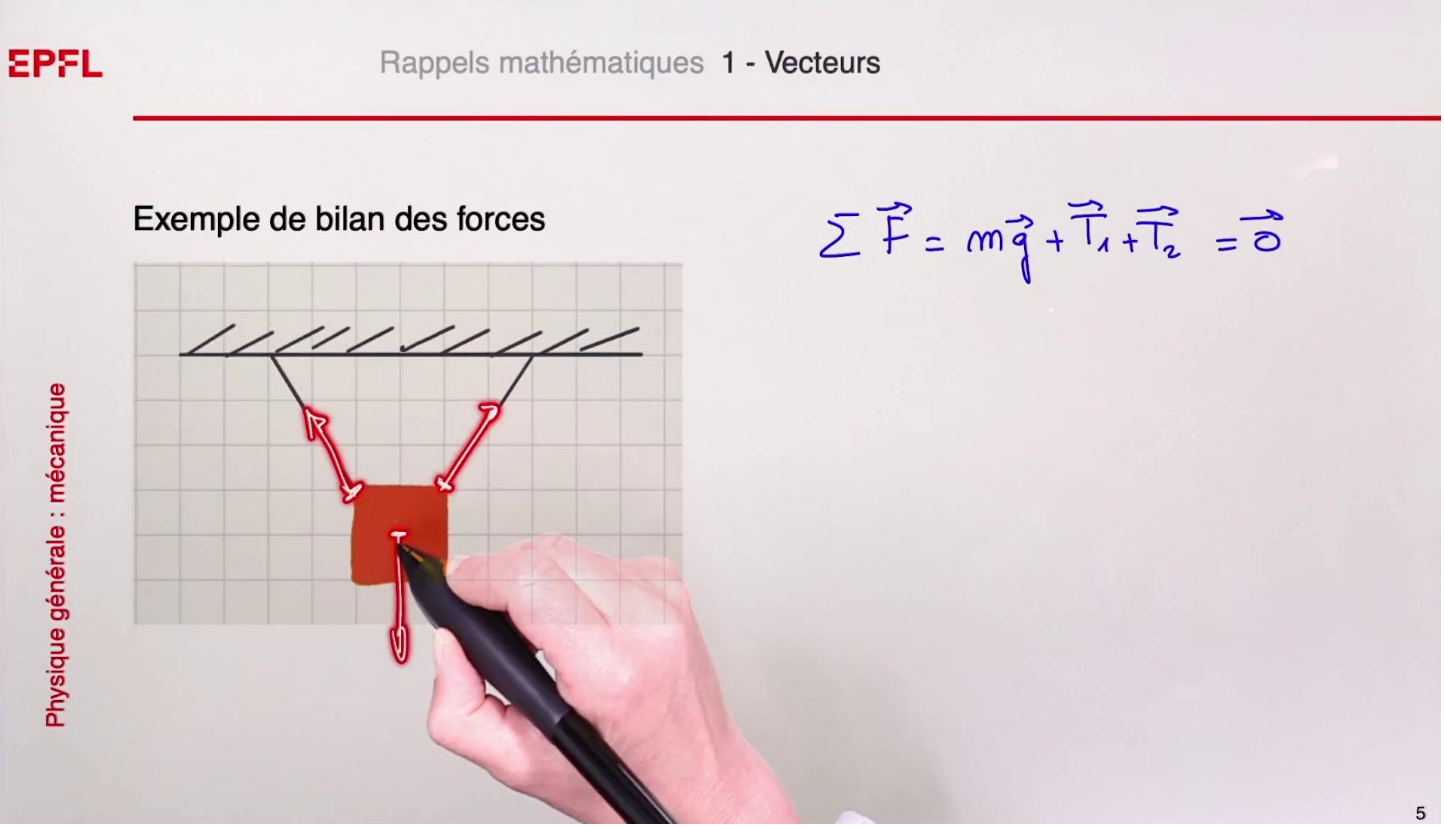


Entre un point A et un point B, je peux représenter le vecteur AB. Avec un troisième point C dans mon plan, j'ai le vecteur BC. La somme AB + BC est égale au vecteur AC. Souvent, les vecteurs seront représentés par une simple lettre. Par exemple : « u », « v » et « w ». De la même façon, j'écrirai « u+ v=w ». L'objet vecteur est indépendant du point où il s'attache. Je représente ici un vecteur « u1 »; le vecteur « u2 » avec même norme, même sens et même direction est égale à « u1 ». Donc, si j'ai un vecteur « u » et un vecteur « v » représentés ailleurs dans l'espace, lorsque je veux faire la somme u+v, je vais déplacer le vecteur « v » pour l'amener à la fin du vecteur « u » et obtenir la somme des deux en partant du début de « u » pour arriver à la fin de « v ».

Notes

Summary

0m 52s

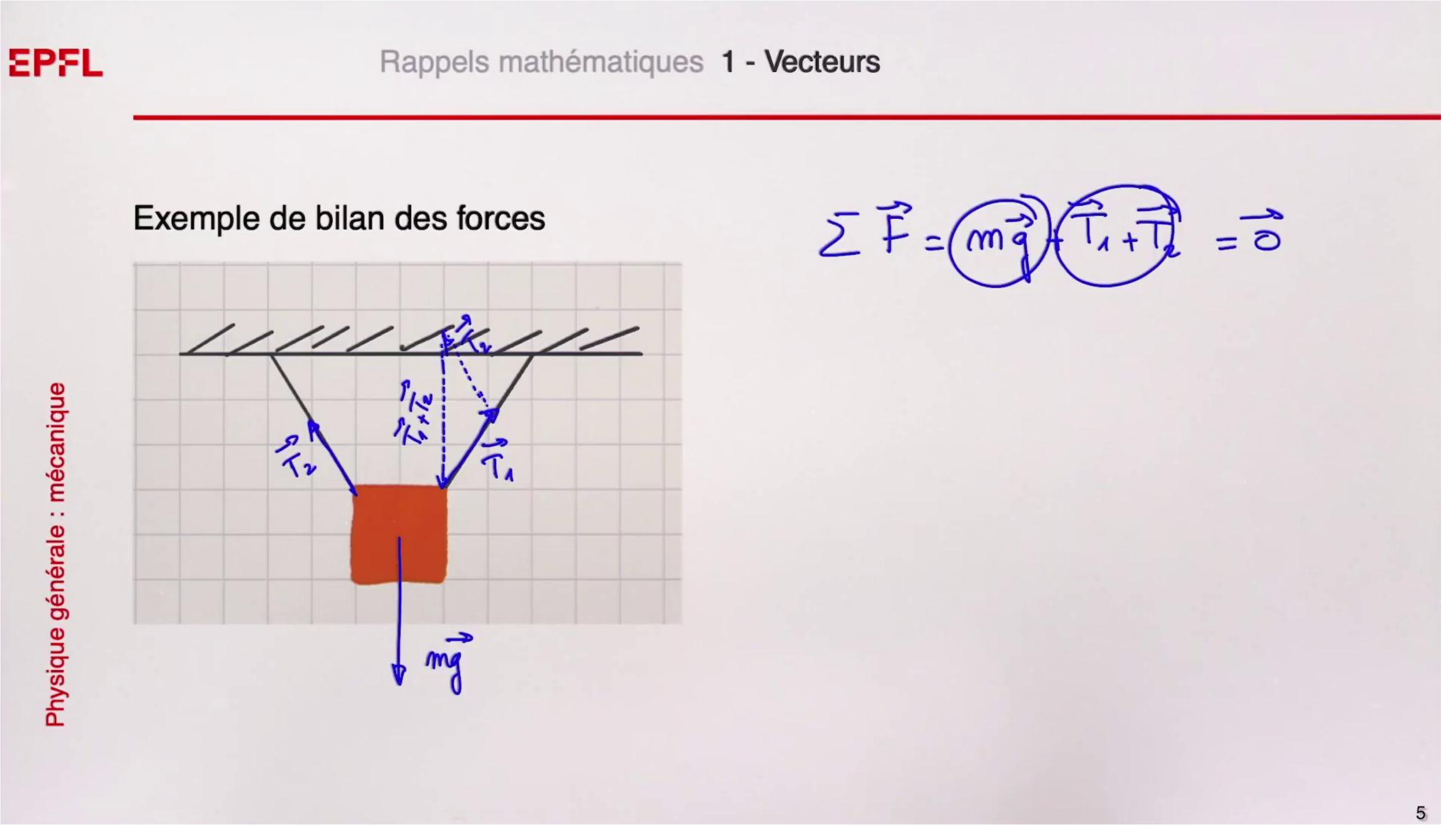


Un exemple typique est ce que nous faisons pour le bilan des forces. Prenons un objet suspendu au plafond par deux ficelles, et soumis à son poids. Notre objet est soumis à trois forces : le poids, la tension dans chacune des deux ficelles. Je peux appeler le poids « mg », et les tensions T1 et T2. L'objet est immobile. Je sais donc que la somme des forces « T1+T2+mg » va valoir 0. Je mets une flèche sur mon 0 puisque c'est le vecteur nul. Si l'objet vecteur peut être représenté à différents points de l'espace, et rester le même vecteur, s'il a la même norme, la même direction et le même sens, à partir du moment où je représente une force, il y a encore une caractéristique supplémentaire qui est importante, c'est le point d'application. Cela sera valable pour la mécanique du solide. La tension s'applique ici, au point de contact avec les cordes. Le poids s'applique au centre de masse de l'objet. Je dois donc faire attention à bien représenter mes vecteurs, partant du point d'application. Mais comment faire leur somme ? Je vais appliquer ce que j'ai dit tout à l'heure. Je vais, par la pensée, reprendre ici le vecteur T2, le mettre à la fin de T1, et obtenir la somme T1+T2.

Notes

Summary

2m 00s

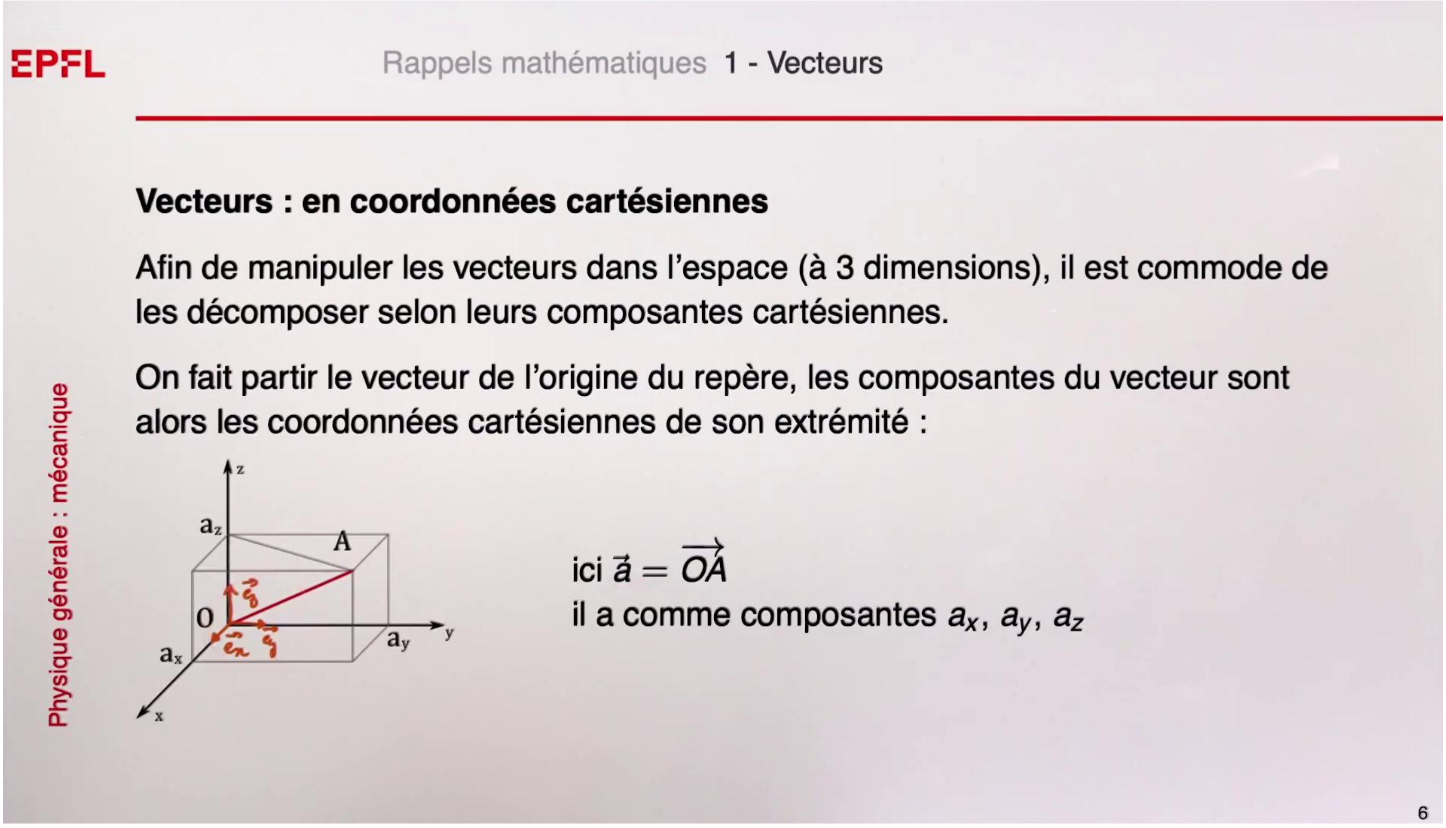


Comme je sais que « T1+T2+mg » doit valoir 0, lorsque je fais T1+T2, si je rajoute encore « mg », je dois revenir au point de départ de T1. Cela me permet de connaître la norme du vecteur « mg ». C'est cette norme que je vais reporter sur le dessin, partant du centre de masse. Voilà, ceci nous a permis de dessiner les vecteurs T1, T2 et « mg » avec une échelle correcte. Typiquement, sur un exercice de ce type, vous connaîtrez le poids puisque vous connaissez la masse de la pancarte, vous connaissez l'angle que font les attaches avec la verticale. Ce que vous cherchez, c'est la norme de T1 et de T2. La démarche sera d'écrire cette égalité vectorielle à l'aide d'un repère sur lequel nous allons décomposer les vecteurs en composantes. D'un point de vue intuitif, on comprend que mg va permettre de déterminer la composante de la somme T2+T1, projetée sur la verticale, puisque c'est ces deux éléments qui doivent avoir la même grandeur. Une fois que je connais la projection de T1 sur la verticale, puisque je sais l'angle que fait la corde, je connais aussi la projection de T1 sur l'horizontale. La connaissance de mg me permet d'avoir les composantes verticales de T1 et T2. L'angle de la corde me permettra d'avoir la composante horizontale. Afin de faire ces calculs de manière pratique, nous aurons besoin de quelques outils.

Notes

Summary

3m 40s



Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace, nous devrons les décomposer en coordonnées cartésiennes. On utilise pour cela les composantes cartésiennes des vecteurs. Imaginons que j'ai un vecteur a, je le fais partir de l'origine du repère, et à son extrémité, je place le point grand A. Les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité grand A. Comme grand A a comme coordonnées : « ax, ay, az », les composantes du vecteur a sont donc : « ax, ay, az ». Si mon repère de coordonnées cartésiennes « o, x, y, z » a comme vecteur de base : « ex, ey, ez », je peux utiliser ces vecteurs de base pour écrire le vecteur « a ».

Notes

Summary

5m 40s

EPFL Rappels mathématiques 1 - Vecteurs

Physique générale : mécanique

Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire grâce aux composantes et aux vecteurs de base du repère

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

On pourra noter verticalement les composantes du vecteur $\vec{a}$

si $\vec{e}_x$ $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ fixes

$$\vec{a}\,\left|\begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix}\right.$$

N.B. : dans certains livres, le vecteur $\vec{a}$ est noté **a**

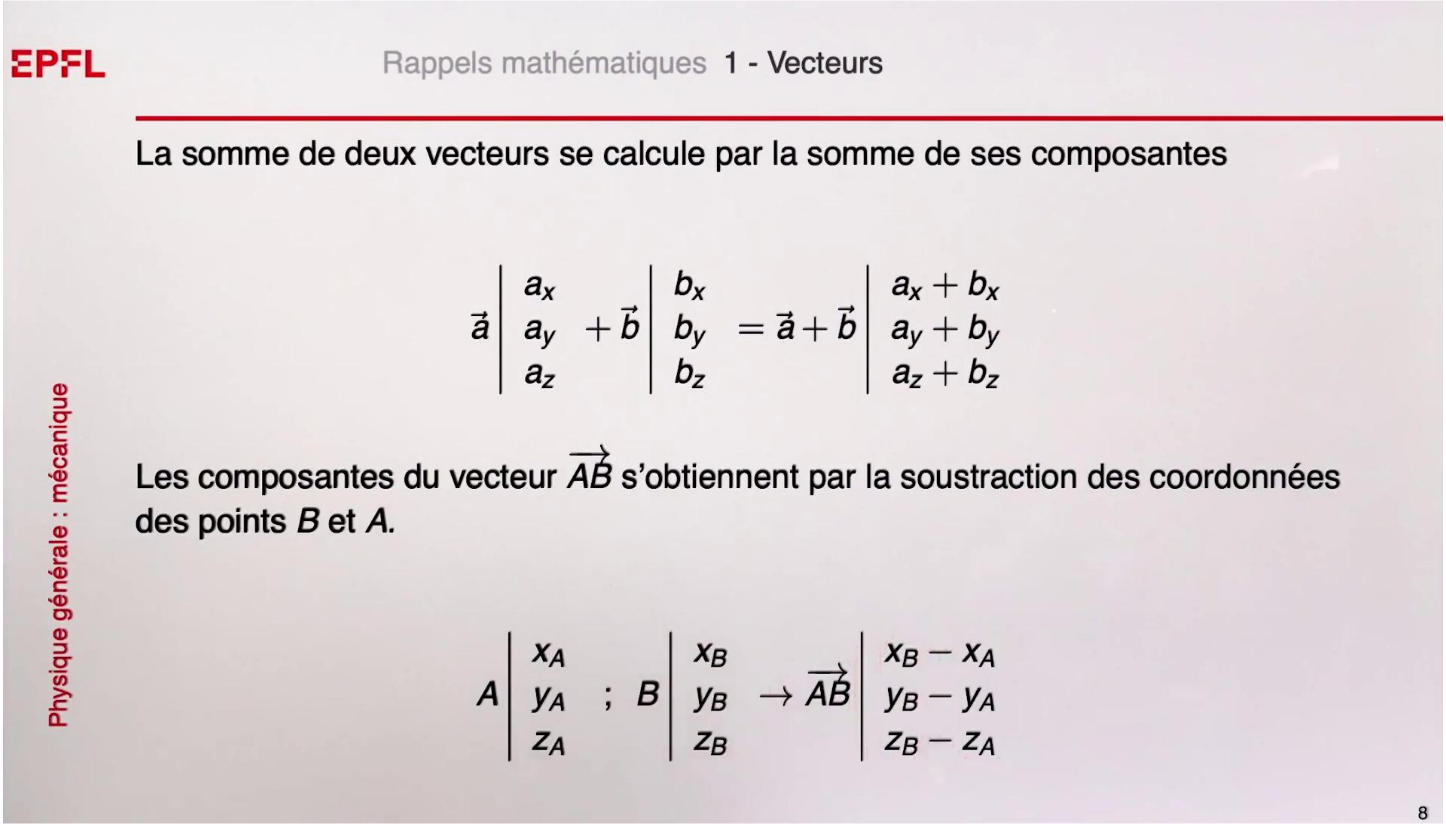
7

Ce vecteur a s'écrit alors : « a=ax, vecteur ex+ ay, vecteur ey+az, vecteur ez ». Si « ex », « ey », « ez » sont fixes dans l'espace, je peux noter verticalement les composantes du vecteur « a ». Notons que certains livres ou polycopies, le vecteur « a » est noté avec un « a » en gras pour des raisons typographiques datant d'un temps où il était difficile de mettre une flèche en typographie.

Notes

Summary

6m 37s

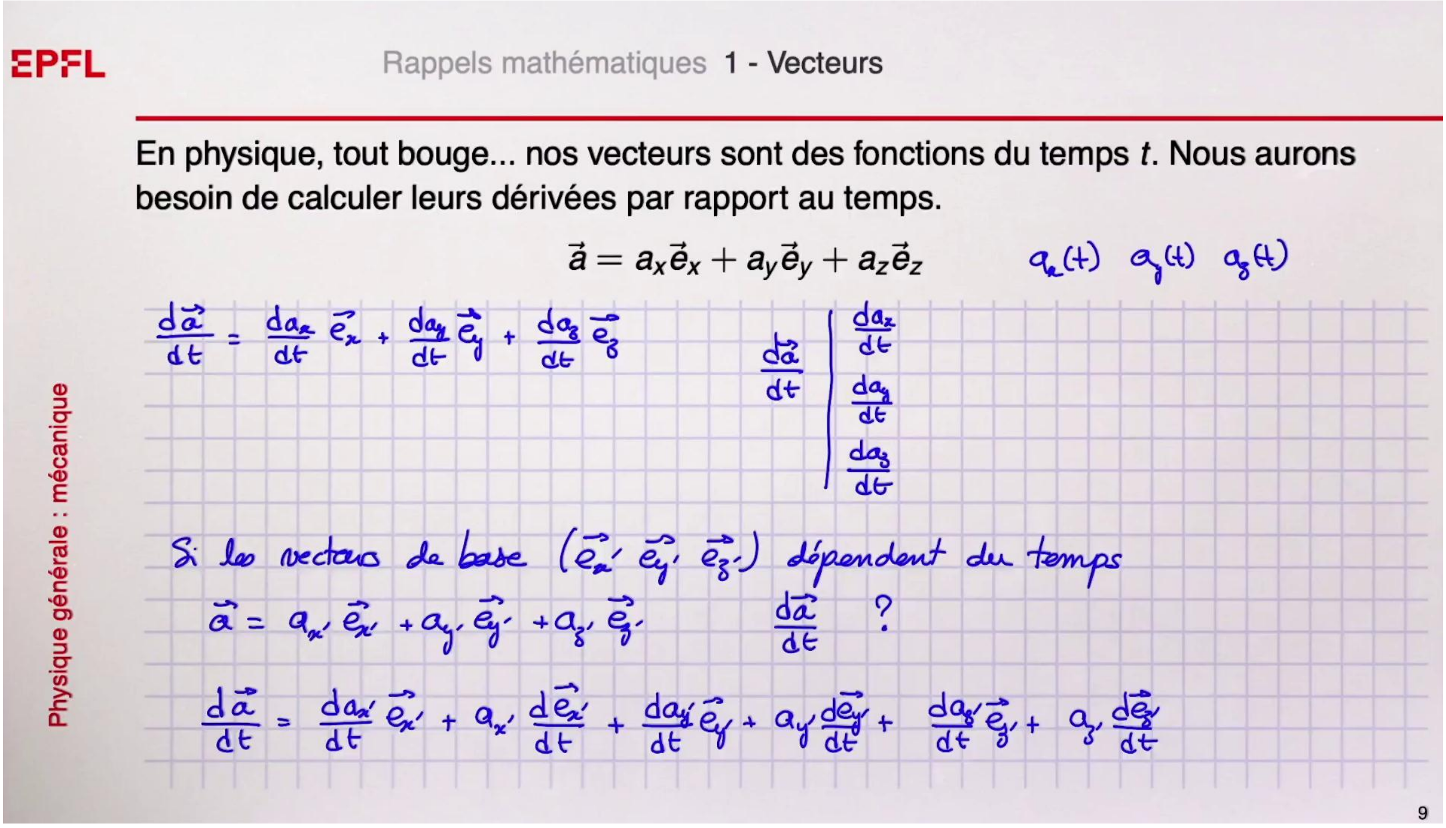


Si j'ai deux vecteurs « a » et « b » de composantes : ax, ay, az, bx, by, bz, leur somme a+b est tout simplement la somme des composantes. Lorsque j'ai un vecteur AB et que je connais les coordonnées des points B et A, j'obtiens les composantes du vecteur AB, en soustrayant les coordonnées de B, moins les coordonnées de A.

Notes

Summary

7m 11s

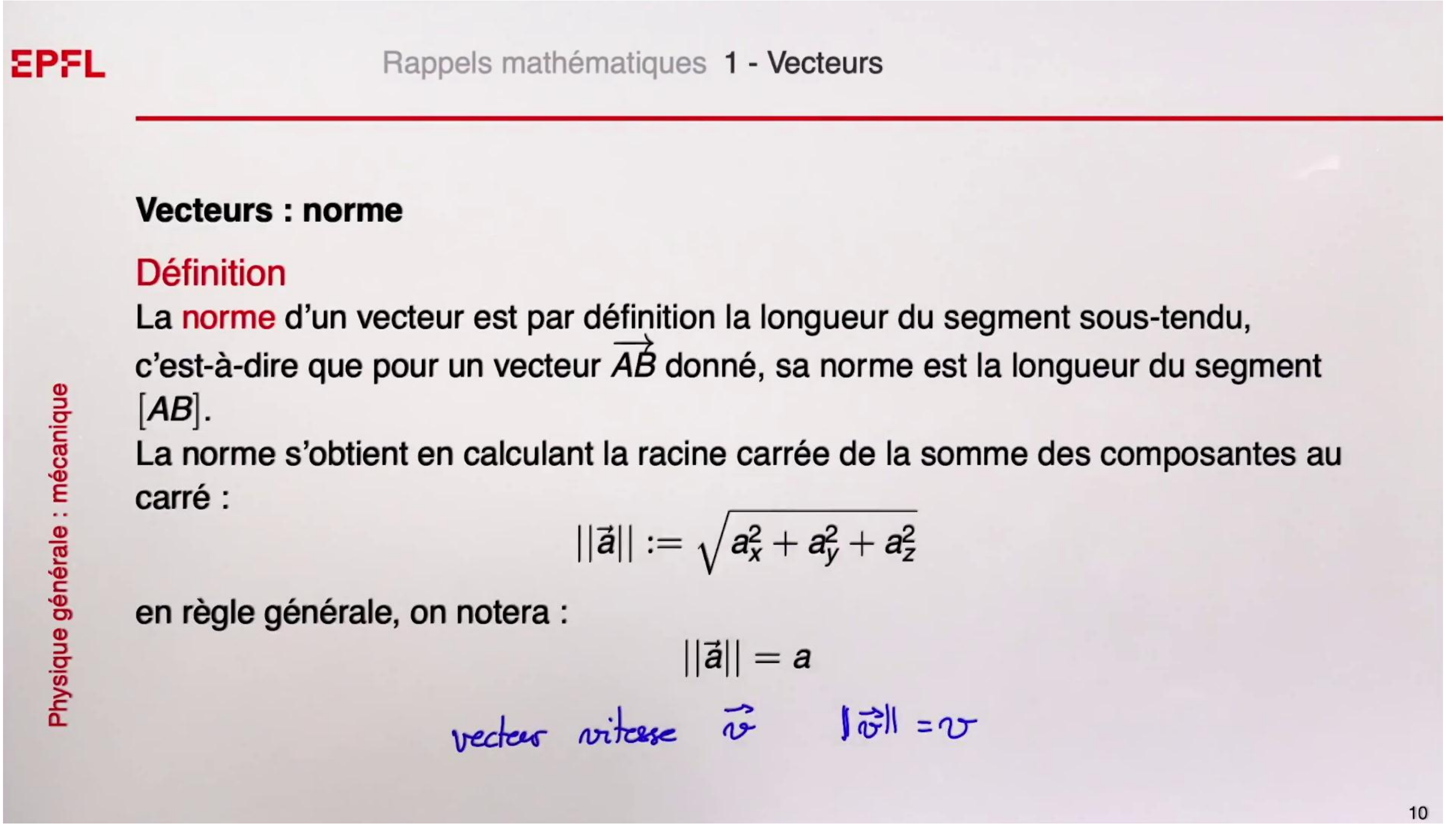


En physique, tout ou presque bouge. Nous allons nous intéresser à des mouvements. Les vecteurs seront souvent des fonctions du temps. Nous aurons besoin de calculer leurs dérivées par rapport au temps. Imaginons que nous ayons un vecteur « a », de composantes : ax, ay, az, dépendants du temps. La dérivée par rapport au temps du vecteur « a » : « da/dt » est égale à la dérivée par rapport au temps de la composante « ax », vecteur de base « ex », plus « day/dt, ey », plus « daz/dt, ez ». Noté verticalement, cela donnera : « da /dt » a comme composantes : « dax/dt », « day/dt », et « daz/dt ». Si les vecteurs de base ex', ey', ez' dépendent du temps, et que mon vecteur « a » s'écrit : « ax', ex'+ay', ey'+az', ez' », lorsque je vais calculer la dérivée par rapport au temps « da/dt », je devrais dériver aussi bien les composantes que les vecteurs. J'obtiens alors : « da/dt = dax'/dt, ex'+ax', dex'/dt » qui est la dérivée par rapport au temps de la première partie, plus la dérivée par rapport au temps de la partie sur ey', plus la dérivée par rapport au temps de la partie sur z'. J'ai utilisé ici la dérivée d'un produit qui s'applique aussi bien au produit d'un scalaire par un vecteur. Cela sera utile pour les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

Notes

Summary

7m 39s

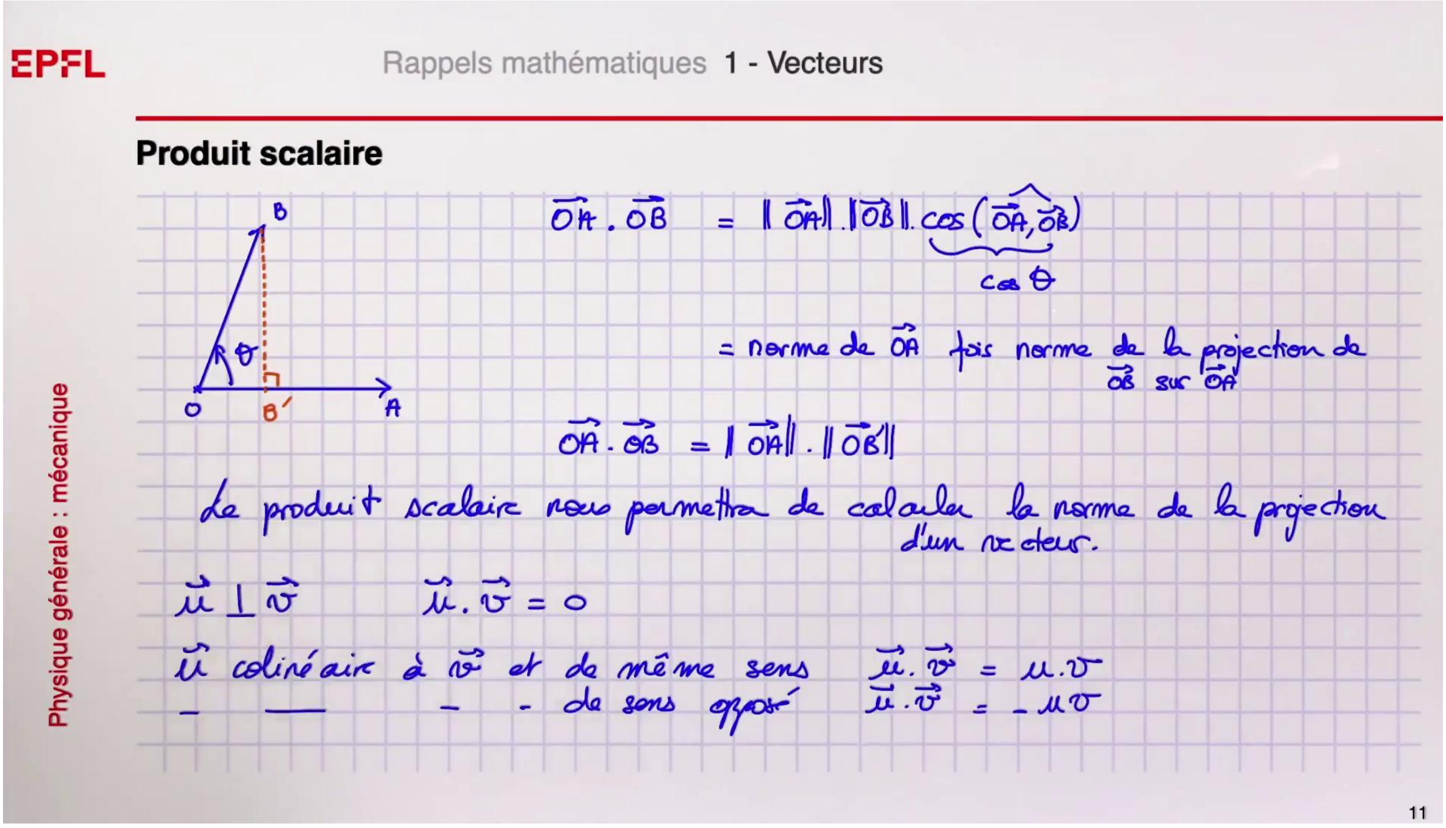


Comment obtenir la norme d'un vecteur ? La norme, c'est la longueur du segment sous-tendu, c'est-à-dire que pour un vecteur AB donné, la norme est la longueur du segment AB. Si j'ai des composantes, la norme s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des composantes, au carré. Si « a » a comme composante : ax, ay, az, la norme de « a » est la racine carrée de « ax2+ay2+az2 ». Souvent, on abrégera la notation norme de « a » avec la lettre petit « a ». Typiquement, pour le vecteur vitesse « v », norme de « v » est égale à petit « v ». Du fait que nous avons ces notations, il est particulièrement important de penser à mettre les flèches sur les vecteurs, afin de bien faire la distinction entre le vecteur vitesse, et la norme du vecteur vitesse.

Notes

Summary

9m 33s

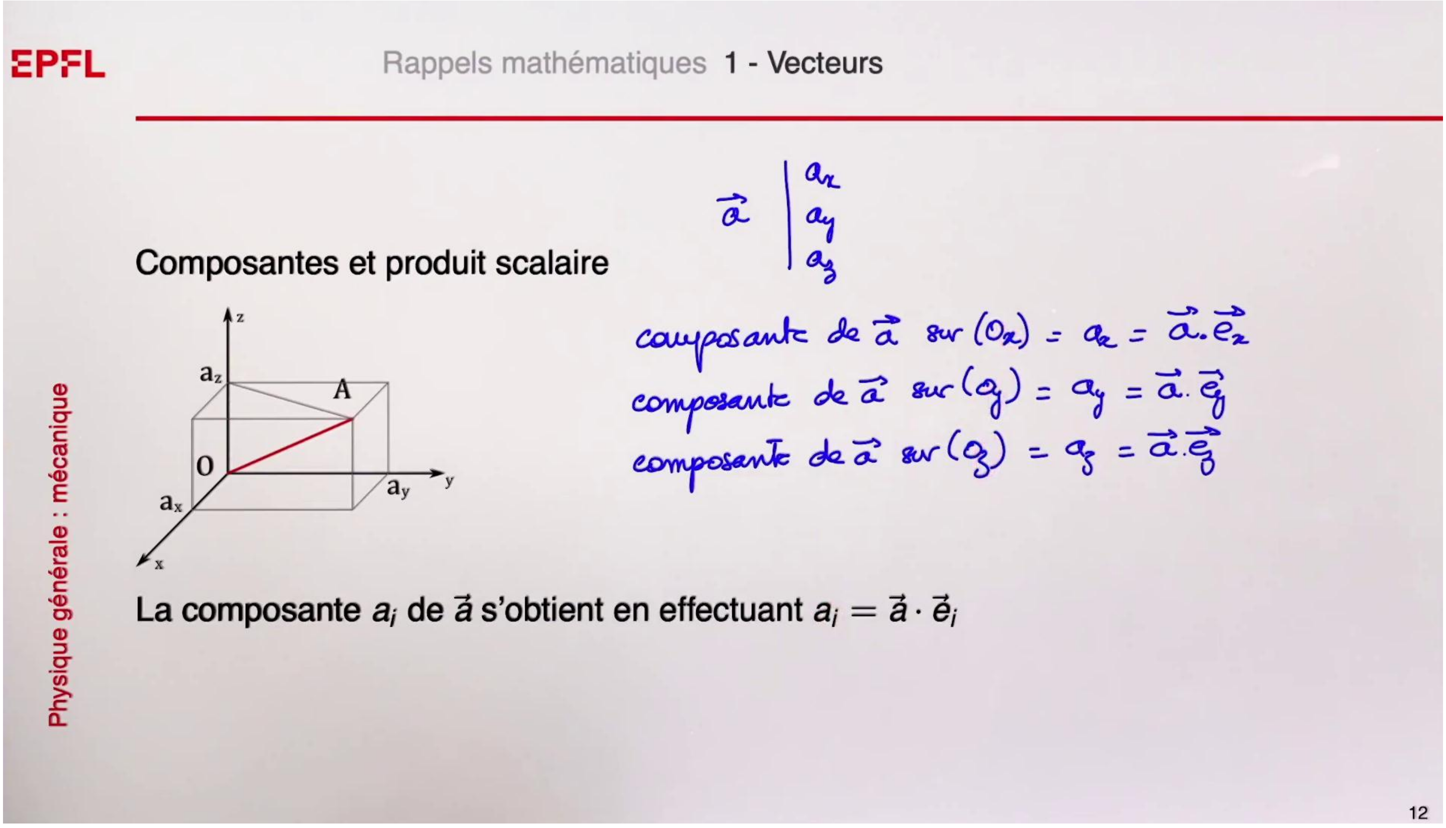


Le produit scalaire sera aussi très utilisé. Si j'ai deux vecteurs OA et OB, le produit scalaire « OA.OB » est égal à la norme du « vecteur OA x la norme du vecteur OB x le cosinus de l'angle entre OA et OB ». Si j'appelle thêta cet angle, c'est donc cosinus thêta. La trigonométrie nous dit que si je projette le vecteur OB sur le vecteur OA, perpendiculairement, que je place ici le point B', alors « OB'=OB cosinus thêta ». OB cosinus thêta est donc égal à la norme du vecteur OB'. Le produit scalaire « OA.OB » est donc égal au produit de la norme de OA par la norme de la projection du vecteur OB sur le vecteur OA. Si je cherche la norme de la projection de OB sur OA, j'utiliserai l'outil « produit scalaire ». Il en sort aussi que si « u » est perpendiculaire à « v », alors, le produit scalaire « u.v = 0 ». Si « u » est colinéaire à « v » et de même sens, « u.v = norme de "u" x norme de "v" » que nous noterons « u.v » Et si « u » est colinéaire à « v » et de sens opposé, « u.v = -uv ».

Notes

Summary

10m 32s

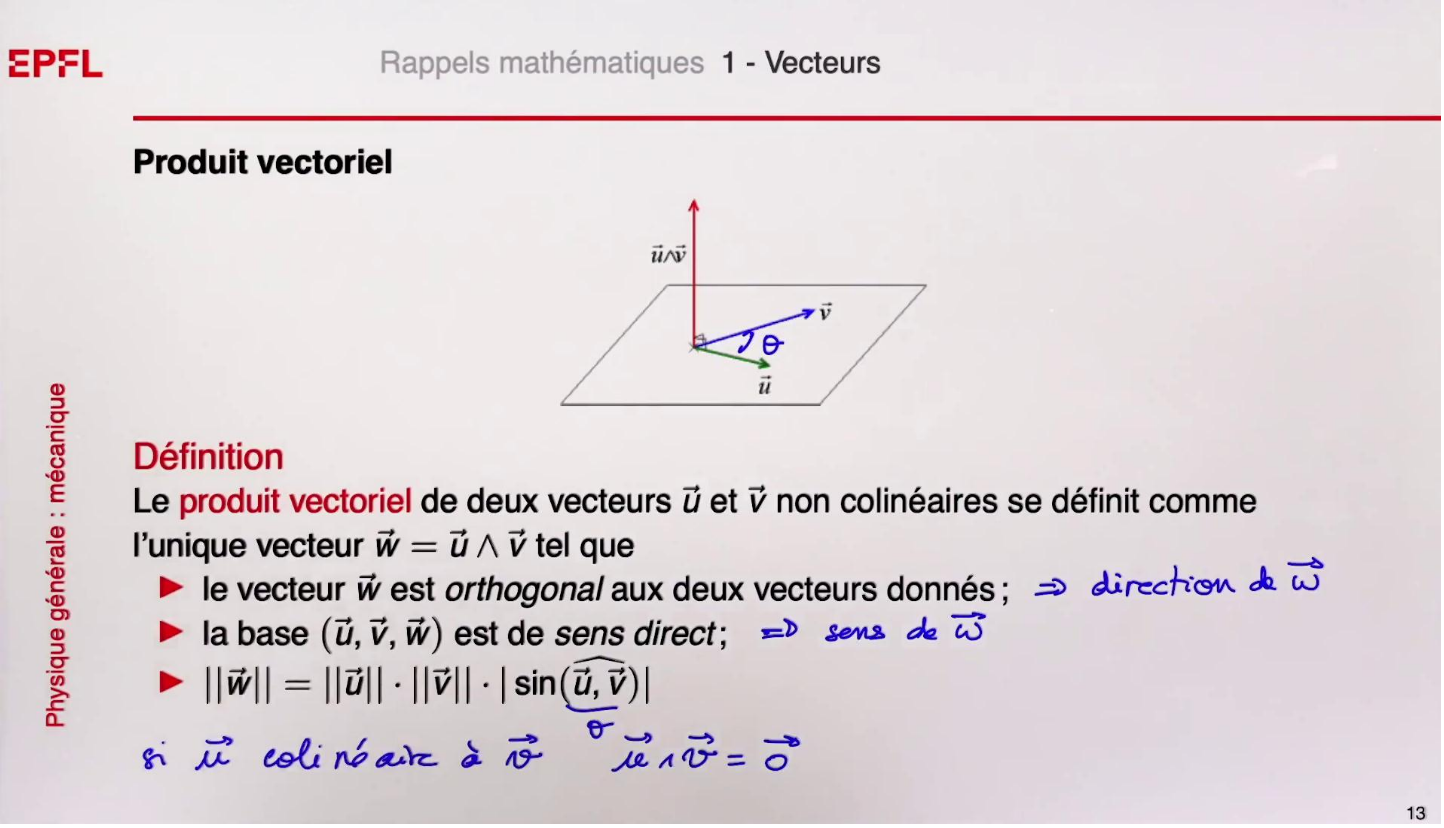


Si j'ai un vecteur petit « a » de composante : ax, ay, az correspondant aux coordonnées du point « a », la composante du vecteur « a » sur l'axe Ox correspond à la projection du vecteur OA sur l'axe Ox. C'est la projection de OA sur « ex ». J'obtiens la composante de « a » sur « x », qui est « ax » comme étant « vecteur "a" scalaire "ex" ». De même, la composante de : « "a" sur "Oy" = "ay", soit "a.ey" ». La composante de « "a" sur "Oz", "az" = "a.ez" ». Nous noterons cela d'une façon générale, en disant que la composante « ai » de « a » s'obtient en effectuant : « ai = a.ei ». Nous avons le même « i ». « i » remplace ici « x » « y » ou bien « z ».

Notes

Summary

12m 45s

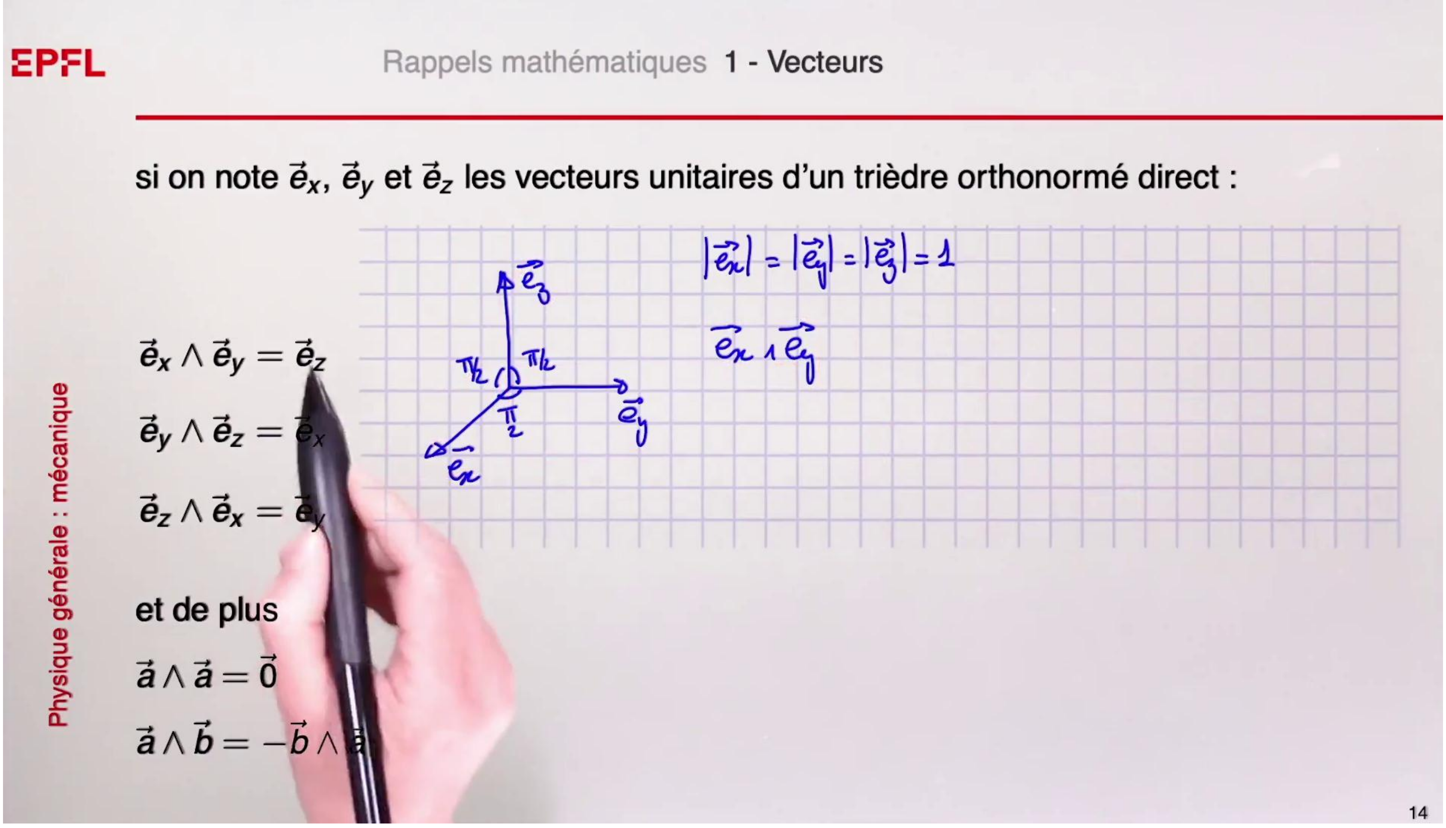


Enfin, nous aurons besoin du « produit vectoriel ». Le produit vectoriel de deux vecteurs « u » et « v », noté« u », petit chapeau vers le bas, « v », que l'on dit « u » vectoriel « v » est lui-même un vecteur que nous pouvons appeler « w » et qui a les propriétés suivantes : le vecteur « w » est orthogonal aux deux vecteurs donnés. Il est orthogonal à la fois à « u » et à « v ». Il est perpendiculaire au plan contenant « u » et « v ». Cela me donne la direction du vecteur « w ». La base de vecteurs « u », « v », « w » est de sens direct. Elle suit la règle du tire-bouchon. Lorsque je fais tourner ici « u », « v », le troisième vecteur pointe vers le haut si ce plan est horizontal. Cela me donne le sens de « w » sur la droite qu'il porte. Il me reste à trouver sa norme. La norme du vecteur « w » est égale à la norme de « u », multipliée par la norme de « v », multipliée par la valeur absolue du sinus de l'angle entre « u » et « v ». Si j'appelle thêta cet angle, c'est donc « sinus-thêta ». On voit que si « u » est colinéaire à « v », l'angle entre les deux vaut 0, le sinus vaut 0, la norme de « w » est nulle, donc, le produit vectoriel « u», vectoriel « v » vaut 0, le vecteur nul.

Notes

Summary

13m 51s

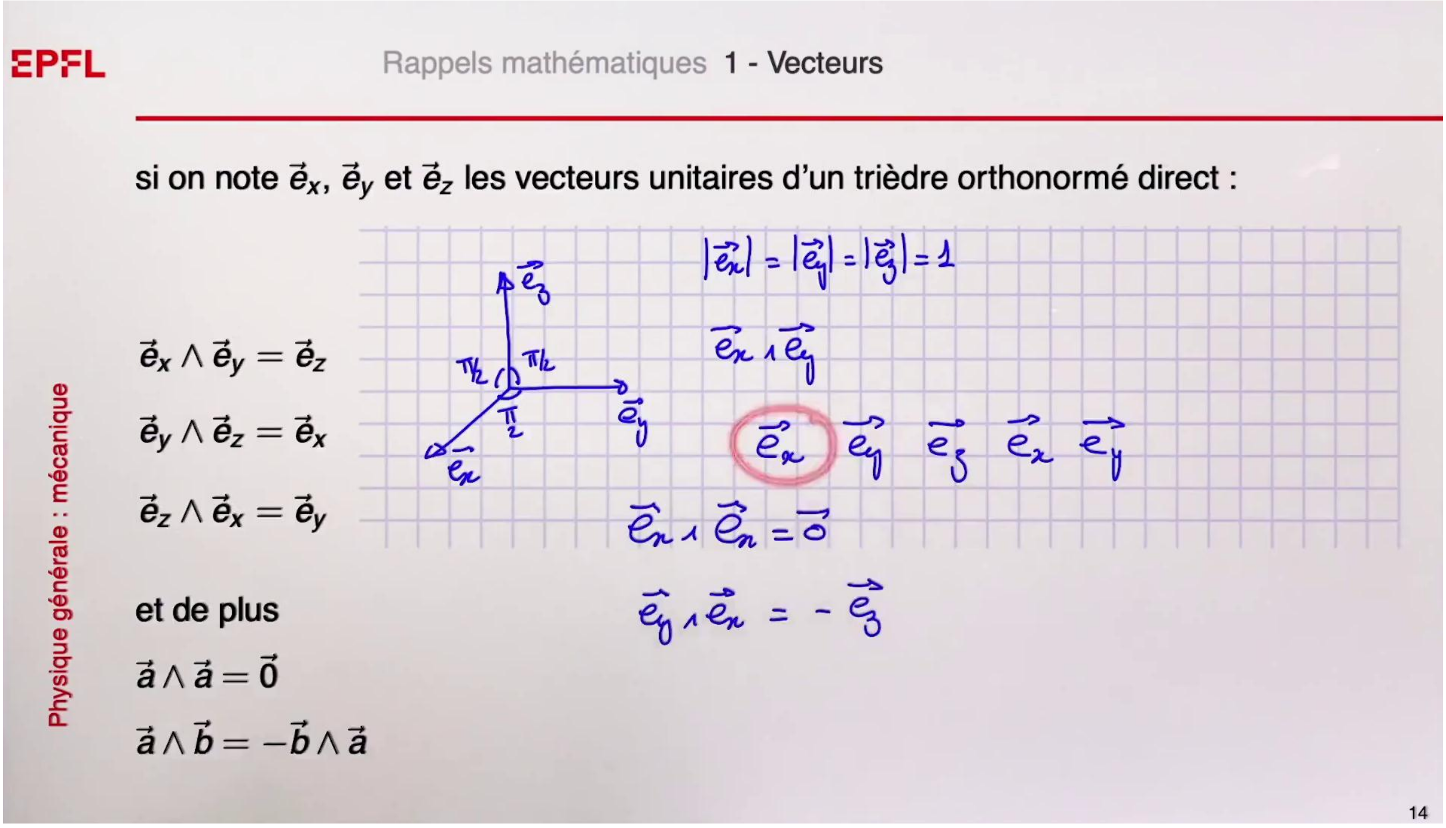


Cela me permet déjà de calculer les produits vectoriels entre les vecteurs de base d'un trièdre orthonormé direct. Considérons : ex, ey, ez, ces trois vecteurs. ex, ey, ez, forment un trièdre orthonormé direct. Les trois vecteurs sont de norme 1, les angles valent 90 degrés, « Pi / 2 », et la base ex, ey, ez tourne dans le sens direct. Si je calcule le produit vectoriel « ex », produit vectoriel « ey », j'obtiens un vecteur qui doit être perpendiculaire à la fois à « ex » et à « ey », qui va être porté par « ez ». Ce vecteur-là est donc colinéaire à « ez ». La base « ex », « ey », produit vectoriel des deux doit être directe. Le vecteur, produit vectoriel « ex », vectoriel « ey » doit aller aussi dans le sens de « ez ». La norme de ce vecteur est égale à : « norme de "ex" multipliée par la norme de "ey", multipliée par le sinus de l'angle entre « ex » et « ey » en valeur absolue ». Ceci vaut 1 puisque j'ai un vecteur normé. Ça vaut 1 et le sinus 2 Pi/2 vaut 1. J'obtiens donc 1. C'est un vecteur de norme 1 colinéaire à « ez » et de même sens, c'est « ez ». « ex » vectoriel « ey » = « ez » De la même manière, « ey » vectoriel « ez » = « ex », et « ez » vectoriel « ex » = « ey ».

Notes

Summary

15m 40s

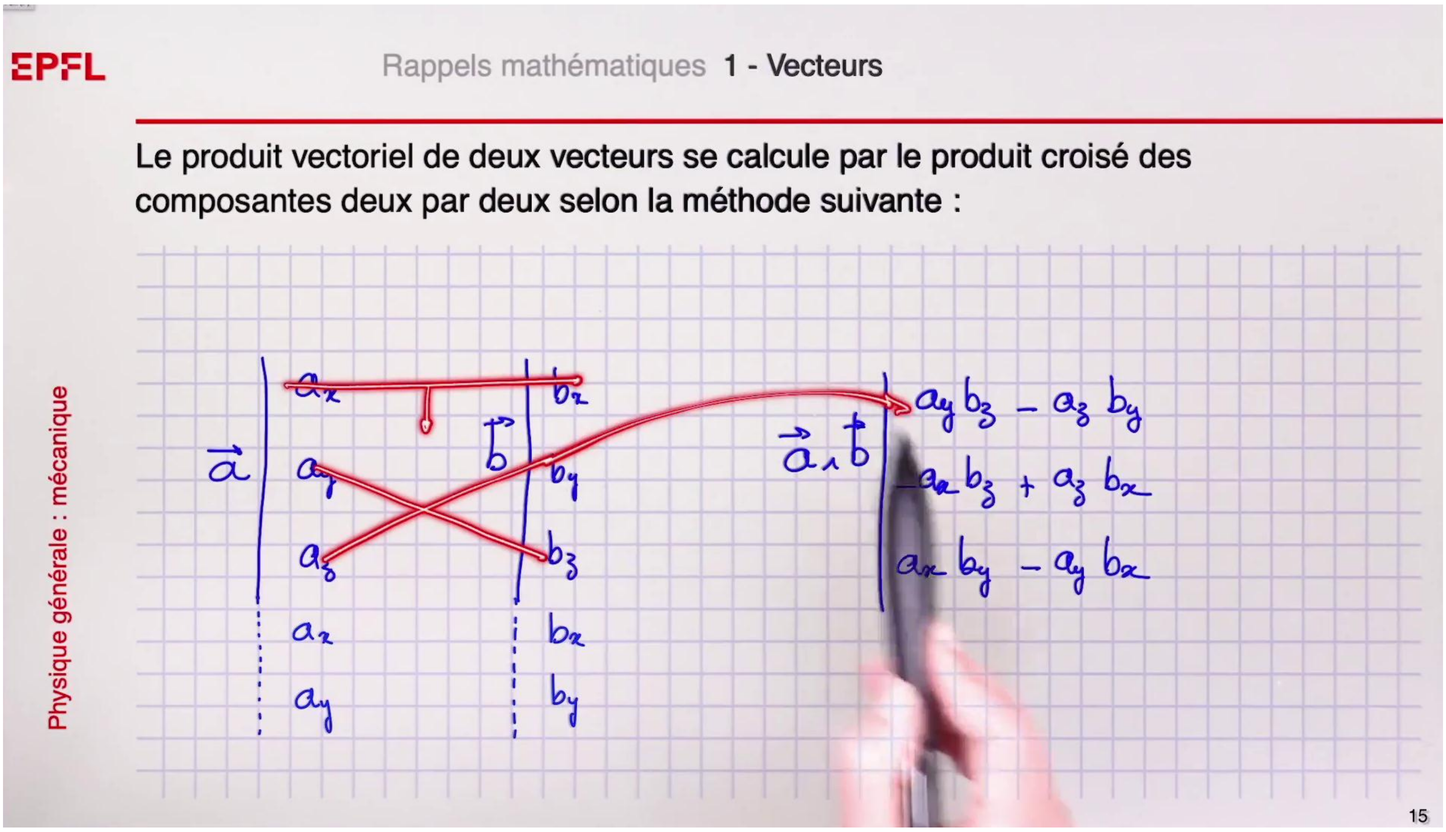


Ceci est très important, et marche pour tout trièdre orthonormé direct. L'astuce pour se souvenir de cela, c'est d'écrire les vecteurs dans l'ordre : « ex, ey, ez », et de continuer; « ex, ey ». Lorsque vous faites le produit vectoriel « ex, ey », vous trouvez « ez ». Le produit vectoriel « ey, ez » vous donne « ex ». Le produit vectoriel « ez, ex » vous donne « ey ». De plus, le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même, « a » vectoriel « a », vaut 0 puisque ces deux vecteurs sont colinéaires. Donc, forcément, « ex » vectoriel « ex » vaut 0. Pareil pour « ey » et « ez ». Enfin, le produit vectoriel « a », vectoriel « b », est égale à l'opposé de « b » vectoriel « a ». Ce produit est anticommutatif. En particulier, si au lieu de faire : « ex » vectoriel « ey », je fais : « ey » vectoriel « ex », je vais obtenir « -ez ». Si je reprends ma liste de tout à l'heure : « ey » vectoriel « ex », je vais de la droite vers la gauche, et dans ce cas, j'obtiens « -ez ». « ex » vectoriel « ez » fera « -ey », et « ez » vectoriel « ey » fera « -ex ».

Notes

Summary

17m 48s

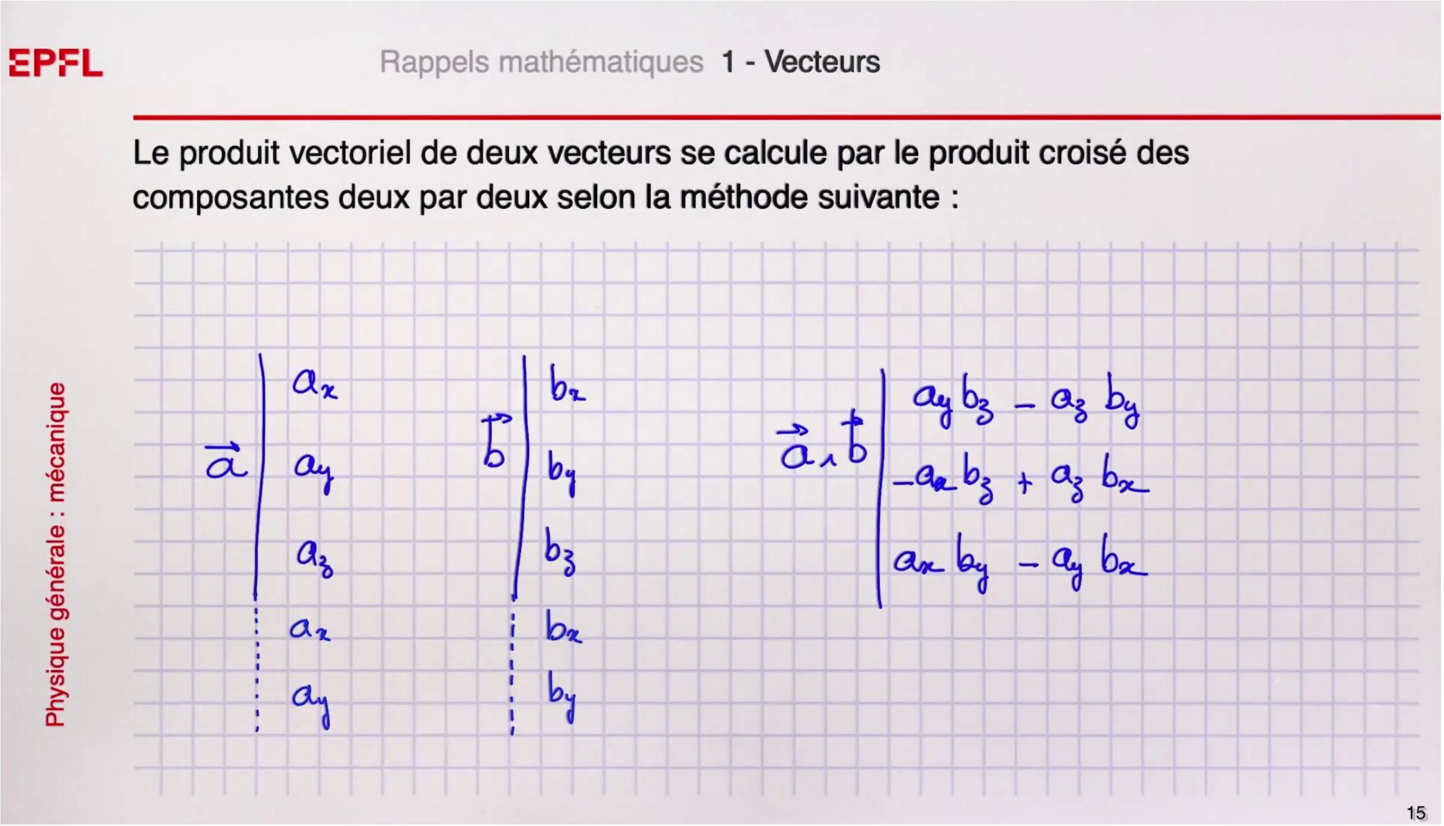


Si vous avez deux vecteurs « a » et « b » : « a » de composantes : ax, ay, az, et « b » de composantes : bx, by, bz. Pour obtenir les composantes de « a » vectoriel « b », vous devez faire ce que l'on appelle « le produit croisé ». Pour calculer la première ligne, vous barrez la première ligne des composantes et vous utilisez ce qui reste. Vous faites le produit croisé : « ay x bz - az x by ». Pour obtenir la deuxième ligne, vous barrez la ligne correspondante sur vos deux vecteurs initiaux, et cette fois, vous allez prendre : « - ax x bz + az x bx ». Afin d'obtenir la dernière ligne, on barre la ligne correspondante, et on fait : « ax x by - ay x bx ». Pour arriver au même résultat, il y a une autre astuce pour dérouler le calcul. Vous pouvez éventuellement la trouver plus simple. Ça sera à vous de choisir celle que vous prenez. Cette astuce consiste à réécrire à la suite de « az », les composantes « ax » et « ay », et à la suite de « bz », les composantes « bx » et « by ». On continue dans le même ordre. On a toujours la logique de barrer la première ligne, et de commencer à la ligne suivante pour faire le calcul. « ay, bz » - « az, by ». « ay, bz » - « az, by ».

Notes

Summary

19m 24s



Pour le calcul de la deuxième composante, je vais barrer les deux premières lignes. J'utilise : « az, bx - ax, bz » plus « az, bx - ax, bz ». On voit que cette astuce-là me permet de faire rentrer le signe « moins » naturellement. Je n'ai pas besoin d'y penser comme dans la première astuce. Pour la troisième ligne, je barre les trois premières lignes, et je calcule : « ax, by - ay, bx ». « ax, by - ay, bx ». À vous de choisir l'une ou l'autre solution pour faire le calcul d'un produit vectoriel, mais ne vous mélangez pas les pinceaux entre les deux.

Notes

Summary

21m 31s

Vous avez vu la notion de vecteur telle que nous allons l'utiliser en physique. Souvent, ce sera combiné aussi avec des notions de trigonométrie et des notions d'analyse de fonctions.

Notes

Summary

22m 22s