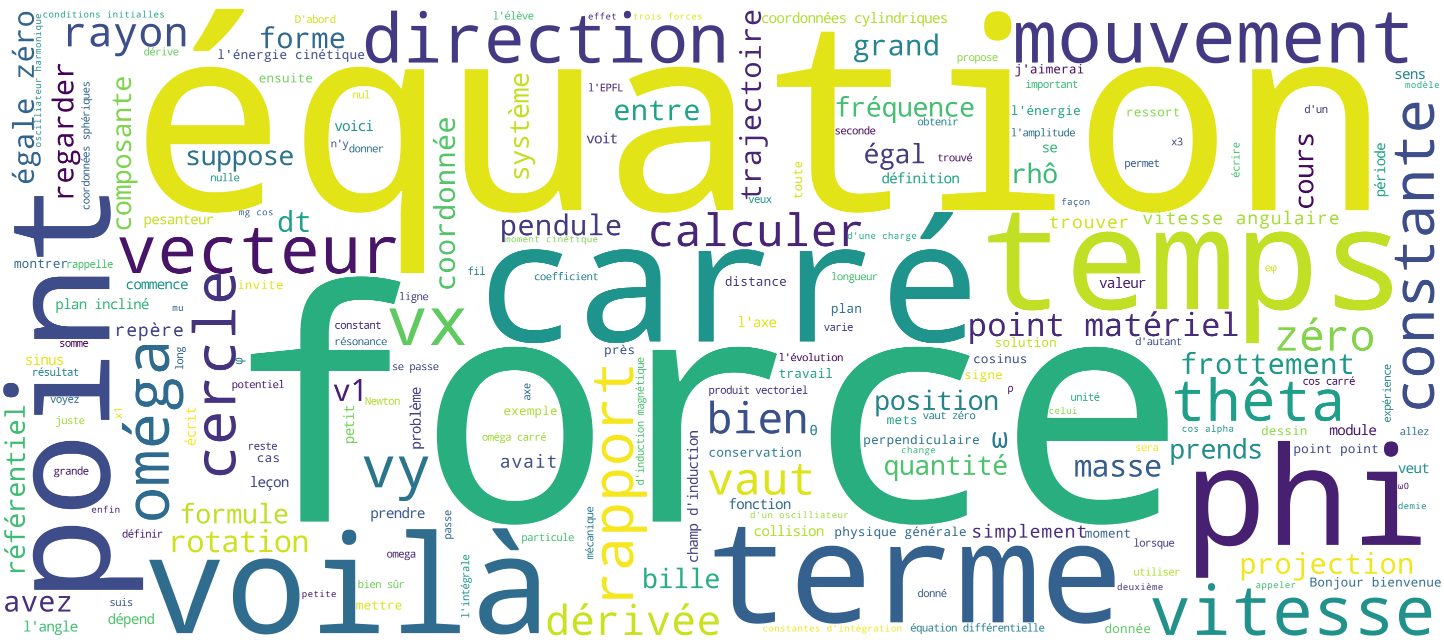
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-14

Autres forces, applications

Mécanique, cours 14.2

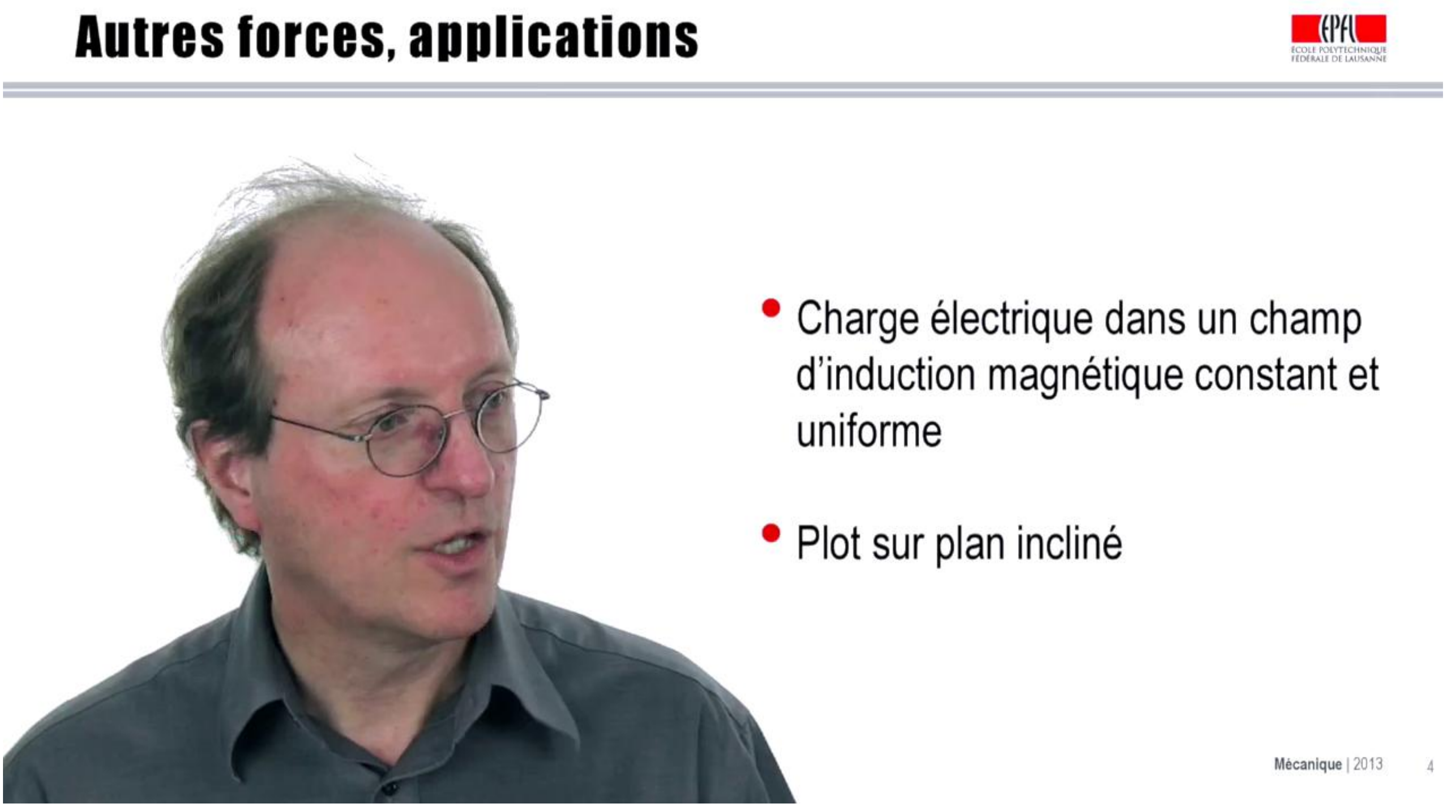
Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL



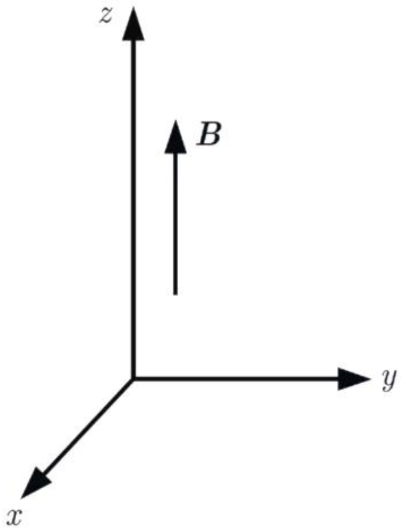
Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, j'ai introduit quelques modèles de force, et ici, on va regarder deux applications. D'abord, on va regarder le mouvement d'une charge électrique dans un champ d'induction magnétique constant et uniforme, et ensuite, on regardera le problème d'un plot glissant avec frottement sur un plan incliné.

Notes

Summary

0m 04s

Référentiel, coordonnées, dynamique



Référentiel : le laboratoire

Coordonnées cartésiennes

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{q\boldsymbol{B}}{m}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}$$

Mécanique | 2013 9

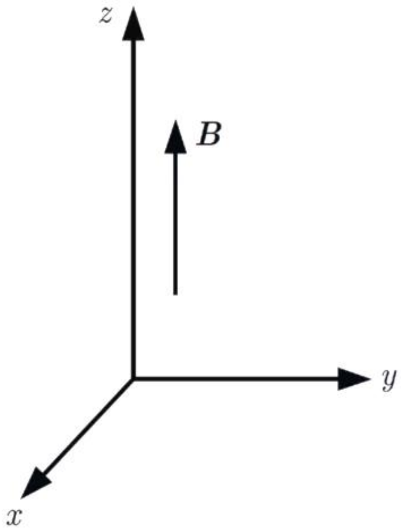
Je commence avec le problème d'une charge dans un champ d'induction magnétique B. Dans le référentiel, je me donne un système d'axe de coordonnés *x*, *y*, *z*, et je choisis de prendre *z* parallèle au champ d'induction B. Le référentiel, c'est bien sûr le laboratoire dans lequel j'ai reproduit le champ B. Je vais travailler avec ces coordonnées carthésiennes. L'équation du mouvement, la deuxième loi de Newton, avec la force de (l'aurem) q**u** cross **B** donne simplement ce résultat-là. Maintenant, je vais noter oméga, qB sur *m*, pour avoir l'équation suivante: *v* point égale moins oméga cross *v* Alors, je vous invite à faire une pause, essayer de vous souvenir quand est-ce que vous avez déjà rencontré une équation de cette forme. On a déjà vu une équation de cette forme quand on parlait de rotation, et on a donc ici un vecteur *v*, qui évolue selon cette équation, cette évolution, c'est une rotation, et le vecteur angulaire ici serait moins oméga. Donc il s'agit d'une rotation. Si maintenant, on veut passer en composante. Et bien il faut calculer ce produit vectoriel, ce que je peux faire ici.

Notes

Summary

0m 30s

Référentiel, coordonnées, dynamique



Référentiel : le laboratoire

Coordonnées cartésiennes

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{q\boldsymbol{B}}{m}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & 0 & v_x \\ \hat{y} & 0 & v_y \\ \hat{z} & -\omega & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega v_y \\ -\omega v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

J'ai *x*, *y*, *z*, j'ai mis le oméga le long de l'axe *z*, donc j'ai zéro zéro moins oméga, et ici, j'ai vx, je vais simplement écrire *vx*, *vy*, *vz*, Je dois calculer ce produit vectoriel, j'ai oméga *vy*, dans le sens de *y*, j'ai moins oméga *vx*, et zéro dans la direction *z*. Et ça, ça me permet maintenant d'écrire mes équations du mouvement, qui sont ici.

Notes

Summary

2m 03s

Equation du mouvement, équation horaire

$$\dot{v}_x = \omega v_y \qquad \ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$

$$\dot{v}_y = -\omega v_x \qquad \ddot{v}_y = -\omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y$$

$$\dot{v}_z = 0$$

Conditions initiales :

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0 \quad v_x = 0 \quad v_y = v_1 \quad v_z = v_{z0}$$

$$v_x = a \sin(\omega t + \phi)$$

Mécanique | 2013 15

Les voici. On a bien le oméga *vy* moins oméga *vx*, on voit que l'évolution de *vx* dépend de *vy*, l'évolution de *vy* dépend de *vx*, les équations sont complets, mais les choses se simplifient beaucoup si on dérive ces deux équations par rapport au temps. On obtient *vx* point point, qui vaut oméga foix *vy* point, le *vy* point, je vais le chercher ici, j'ai moins oméga carré *vx*. Maintenant, les équations sont découplés, et ces équations-là, manifestement, sont des équations d'un oscilliateur harmonique Donc, je peux les résoudre. Dans la direction *z*, on a un mouvement uniforme. Les conditions initialles, et bien, je vais me donner (cathé) égale zéro, je suis à la position *x0*, *y0*, *z0*. Je vais tourner mon axe des *x* pour que il y ait une vitesse initialle nulle dans la direction *x*. J'ai une vitesse *v1* dans la direction *y*, je suppose une vitesse *vz0*, initiallement, dans la direction *z*. Avec ça, cette équation différentielle, celle d'un oscilliateur harmonique, se résoud facilement. J'ai une réponse harmonique pour *v*, la fonction *vx*, *vx* avec deux constantes d'intégration, un *a* et un *phi*.

Notes

Summary

2m 43s

Equation du mouvement, équation horaire

$$\dot{v}_x = \omega v_y \qquad \ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$
$$\dot{v}_y = -\omega v_x \qquad \ddot{v}_y = -\omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y$$
$$\dot{v}_z = 0$$

Conditions initiales :

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0 \quad v_x = 0 \quad v_y = v_1 \quad v_z = v_{z0}$$

$$v_x = a\sin(\omega t + \phi) \qquad \dot{v}_y = -\omega a \sin(\omega t + \phi) \qquad v_y = a\cos(\omega t + \phi)$$
$$\phi = 0 \qquad a = v_1$$

$$x(t) = -\frac{v_1}{\omega}\cos\omega t + C \qquad x(0) = x_0 = C - \frac{v_1}{\omega} \implies C = x_0 + \frac{v_1}{\omega}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_1}{\omega} - \frac{v_1}{\omega}\cos\omega t \qquad y(t) = y_0 + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega t$$

Mécanique | 2013 23

Si je prends ce *vx* et je le mets dans cette équation du mouvement, j'ai *vy* point qui a cette forme-là. Je peux intégrer ces équations pour *vy*, et ici, je ne met pas de constante, parce que si je mets une constante, elle va apparaître là-dedans, et ça ne sera pas une solution de cette équation différentielle, donc je suis obligé de mettre un zéro ici. Voilà. Maintenant, je dois trouver quelle sont les constantes d'intégration *a* et *phi*. Alors, *phi* vaut zéro parce que, *at* égale zéro, j'ai vx qui est nulle, quand t égale zéro, j'ai juste a si (phi), donc je dois avoir phi qui vaut zéro, et puis si je regarde cette équation-là, j'ai *a t* égale zéro, un cosinus de zéro, ça fait un, donc on a *v1* qui vaut *a*. Maintenant, je peux intégrer l'équation de *vx* pour trouver *x* de *t*. Alors, l'intégrale du sinus, ça fait moins oméga cosinus. Il y a une constante, la constante est donnée par les conditions initialles. *a t* égale zéro, on *a x* zéro, qui doit valoir *c* moins *v1* sur oméga, donc voilà, j'ai trouvé *c*. Et je réécris *x* de *t* complètement, pour *y* de *t*, même raisonnement, j'ai simplement cette solution-là, et maintenant, je vais vous proposer d'analyser la trajectoire.

Notes

Summary

4m 12s

Trajectoire

$$x(t) = x_0 + \frac{v_1}{\omega} - \frac{v_1}{\omega}\cos\omega t \qquad y(t) = y_0 + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega t$$

$$\left(x - x_0 - \frac{v_1}{\omega}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_1^2}{\omega^2}$$

Cercle de rayon : $r = \frac{v_1}{\omega} = \frac{mv_1}{qB}$

Mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega = \frac{qB}{m}$,

indépendante du rayon (principe du cyclotron : plus la vitesse augmente plus le rayon et grand, mais la fréquence de la tension accélératrice reste la même.)

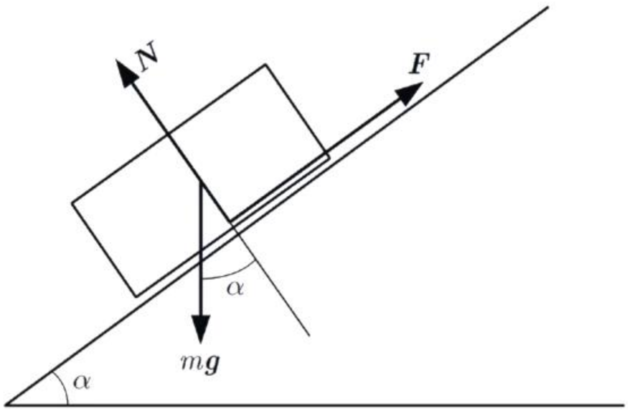
Donc voilà mon *x* de *t*, voilà mon y de *t*, donc mes équations (overts), et maintenant, je veux calculer la trajectoire. Alors-là on a un *cos oméga t*, on a un *sin oméga t*. Je peux calculer la trajectoire en regroupant les termes, je prends *x* moins ce terme, et je l'élève au carré. Je prends y moins ce terme, je l'élève au carré. Cela me donne *v1* au carré sur oméga carré fois cos carré plus *sin* carré, qui fait un. Donc, j'ai ce terme-là. Et ça, c'est l'équation carthésienne d'un cercle. Le rayon du cercle, c'est *v1* sur oméga, et si je reprends ma définition de oméga, j'ai *mv1* sur qB, donc le rayon du cercle est d'autant plus petit que B est grand, ou le rayon du cercle est d'autant plus grand que *v1* est grand. Je rappelle le résultat important, c'est que la vitesse angulaire cubé sur m est indépendante du rayon. Par conséquent, quelque soit le rayon, la particule met le même temps pour faire un tour du cercle, quelque soit que le rayon de ce cercle. C'est important dans la technique parce que c'est le principe de base de fonctionnement de cycle (otron), un accelérateur. Plus la vitesse de la particule augmente, plus son rayon augmente, mais le temps pour faire un tour reste le même.

Notes

Summary

5m 55s

Frottement sec sur plan incliné



Hypothèses :
- Glissement
- Vitesse constante

$$N = mg\cos\alpha$$
$$\mu_c N = mg\sin\alpha \longrightarrow \mu_c = \tan(\alpha)$$

Je termine maintenant avec un petit problème de frottement sec. J'imagine la situation suivante: un bloc qui descend sur un plan incliné d'un angle alpha, par rapport à l'horizontal, voilà la pesanteur. Je supose que il y a glissement, et je suppose que la vitesse est constante. Donc la somme de tous ces trois forces, il y a la pesanteur, la force de réaction du plan incliné, la force de frottement, la somme vectorielle de ces trois forces doit donner zéro. Si je travaille en projection, si je projette dans cette direction-là, j'ai N qui doit être égal à *mg cos alpha*. *mg cos alpha*, c'est la projection de *mg* sur cet axe, et puis, dans cette direction-là, j'ai F qui doit valoir mg sin alpha. C'est ce que j'ai écrit ici. On peut diviser cette équation par celle-là et obtenir *mu c*, qui vaut tangente alpha. Donc voilà une interprétation géométrique de *mu c*, c'est la tangente de l'angle du plan incliné, qui est-elle que le point matériel descend à vitesse constante.

Notes

Summary

7m 32s