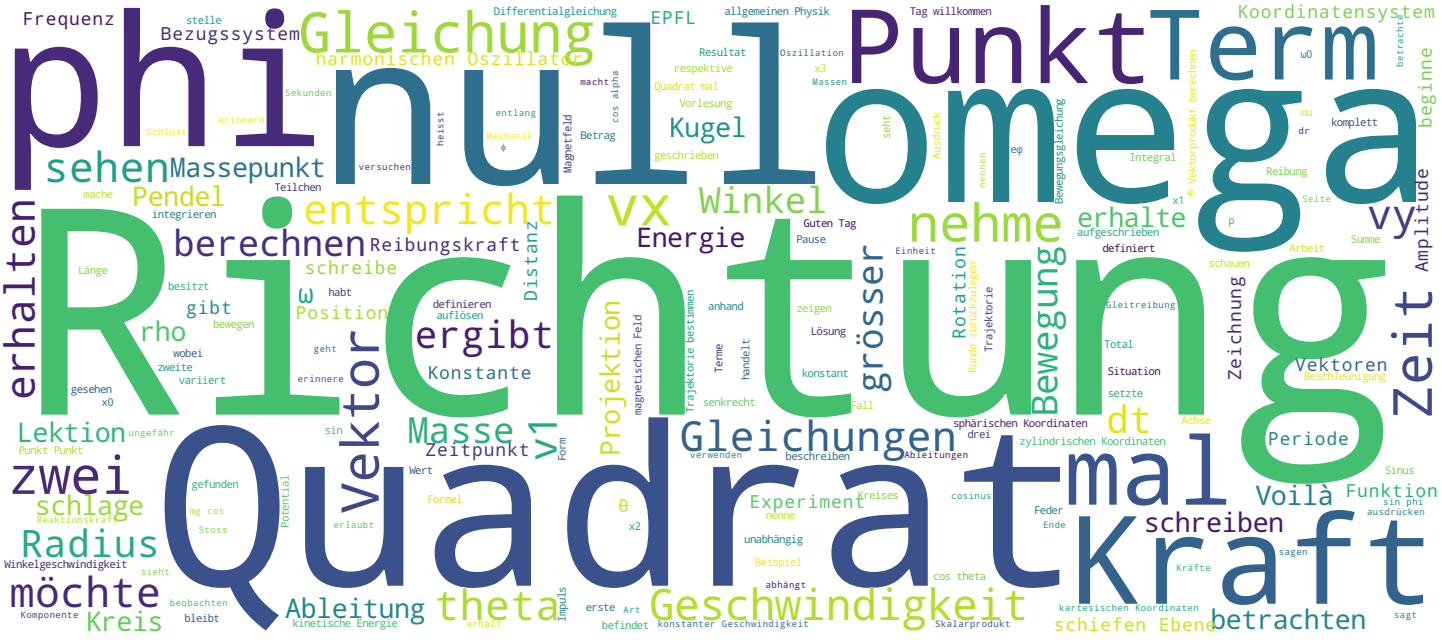
Autres forces, applications

Mécanique, cours 14.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-14



Video

EPFL

Autres forces, applications

- Charge électrique dans un champ d'induction magnétique constant et uniforme
- Plot sur plan incliné

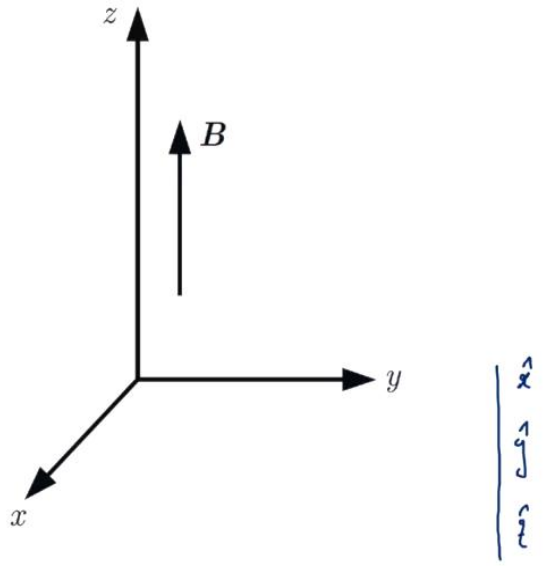
Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion, habe ich verschiedene Kraftmodelle eingeführt. Hier werden wir zwei Anwendungen betrachten. Zuerst werden wir die Bewegung einer elektrischen Ladung in einem konstanten und gleichförmigen magnetischen Feld betrachten. Im Anschluss werden wir das Problem eines auf einer schiefen Ebene gleitenden Blocks betrachten.

Notes

Summary

0m 04s

Référentiel, coordonnées, dynamique



Référentiel : le laboratoire

Coordonnées cartésiennes

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{q\boldsymbol{B}}{m}$$

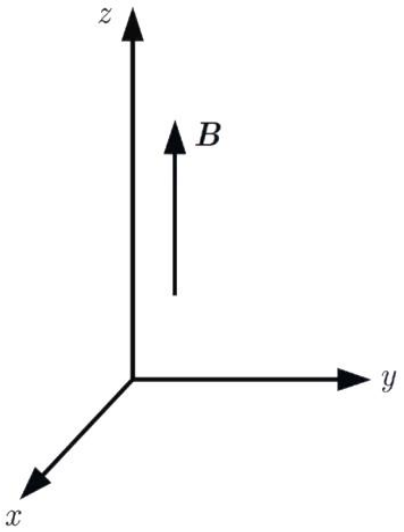
$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}$$

Ich beginne mit dem Problem einer Kraft in einem magnetischen Feld B. Im Bezugssystem, wähle ich ein Koordinatensystem *x*, *y*, *z* und ich wähle *z* parallel zum Magnetfeld B. Das Bezugssystem ist verständlicherweise das Labor, in welchem das Magnetfeld B produziert wird. Ich werde mit kartesischen Koordinaten arbeiten. Die Bewegungsgleichung, also das zweite newtonsche Gesetz, mit der Kraft q**u** kreuzt **B**, ergibt dieses Resultat hier. Ich werde qB durch *m* als omega bezeichnen, um die folgende Gleichung zu erhalten: *v* Punkt gleich minus omega kreuzt *v*. Ich schlage euch vor, eine Pause zu machen, und zu versuchen, euch zu erinnern, wann ihr bereits einmal einer Gleichung dieser Form begegnet seit. Wir haben bereits einmal eine Gleichung dieser Form gesehen, als wir die Rotation betrachteten. Dieser Vektor *v*, welcher sich anhand dieser Gleichung entwickelt, rotiert also. Der Vektor hier wäre minus omega. Es handelt sich also um eine Rotation. Wenn man nun die Gleichung in ihre Komponenten aufteilen möchte, muss man das Vektorprodukt berechnen. Dies kann ich hier machen. Ich habe *x*, *y*, *z*.

Notes

Summary

0m 30s



Référentiel : le laboratoire

Coordonnées cartésiennes

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{q\boldsymbol{B}}{m}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & 0 & v_x \\ \hat{y} & 0 & v_y \\ \hat{z} & -\omega & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega v_y \\ -\omega v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Omega legte ich entlang der *z*-Achse, also habe ich null, null, und minus omega. Hier werde ich einfach *vx*, *vy*, *vz* schreiben. Ich muss das Vektorprodukt berechnen. Ich habe omega *vy* in der *x*-Richtung, minus omega *vx* in der *y*-Richtung und 0 in der *z*-Richtung. Dies erlaubt es mir, die Bewegungsgleichungen zu schreiben, welche hier sind.

Notes

Summary

2m 08s

Equation du mouvement, équation horaire

$$\dot{v}_x = \omega v_y \qquad \ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$
$$\dot{v}_y = -\omega v_x \qquad \ddot{v}_y = -\omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y$$
$$\dot{v}_z = 0$$

Conditions initiales :

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0 \quad v_x = 0 \quad v_y = v_1 \quad v_z = v_{z0}$$

$$v_x = a \sin(\omega t + \phi)$$

Wir haben omega *vy* minus omega *vx*. Wir sehen, dass die zeitliche Entwicklung von *vx* von *vy* abhängt und umgekehrt. Die Gleichungen sind komplett. Wenn man die Gleichungen jedoch nach der Zeit ableitet, vereinfachen sich diese enorm. Wir erhalten *vx* Punkt Punkt gleich omega mal *vy* Punkt. *vy* kann ich so ausdrücken. Ich erhalte also minus omega im Quadrat mal *vx*. Die Gleichungen sind nun entkuppelt. Diese Gleichungen hier sind jene, eines harmonischen Oszillators. Ich kann diese also auflösen. In der *z*-Richtung haben wir eine gleichförmige Bewegung. Bei t gleich null befindet sich die Ladung in der Position *x0*, *y0*, *z0*. Ich werde die *x* rotieren, sodass die Anfangsgeschwindigkeit in der *x*-Richtung null beträgt. Ich habe eine Geschwindigkeit *v1* in der *y*-Richtung. Des Weiteren nehme ich eine Geschwindigkeit *vz0* in der *z*-Richtung. Diese Differentialgleichung, jene eines harmonischen Oszillators, lässt sich einfach auflösen. Ich habe eine harmonische Lösung für *v*. Die Funktion *vx* mit zwei Integrationskonstanten *a* und*phi*.

Notes

Summary

2m 45s

Equation du mouvement, équation horaire

$$\dot{v}_x = \omega v_y \qquad \ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$
$$\dot{v}_y = -\omega v_x \qquad \ddot{v}_y = -\omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y$$
$$\dot{v}_z = 0$$

Conditions initiales :

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0 \quad v_x = 0 \quad v_y = v_1 \quad v_z = v_{z0}$$

$$v_x = a\sin(\omega t + \phi) \quad \dot{v}_y = -\omega a \sin(\omega t + \phi) \quad v_y = a\cos(\omega t + \phi)$$
$$\phi = 0 \qquad a = v_1$$

$$x(t) = -\frac{v_1}{\omega}\cos\omega t + C \qquad x(0) = x_0 = C - \frac{v_1}{\omega} \implies C = x_0 + \frac{v_1}{\omega}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_1}{\omega} - \frac{v_1}{\omega}\cos\omega t \qquad y(t) = y_0 + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega t$$

Wenn ich *vx* nehme und in diese Bewegungsgleichung einsetze, habe ich *vy* Punkt in dieser Form hier. Ich kann diese Gleichungen für *vy* integrieren. Hier setzte ich keine Konstante. Denn, wenn ich hier eine Konstante setzte, wird diese hier auftauchen und es wird demnach keine Lösung dieser Differentialgleichung sein. Ich bin also gezwungen, hier eine null zu setzen. Voilà. Nun muss ich herausfinden was die Integrationskonstanten *a* und *phi* sind. *phi* ist null, da zum Zeitpunkt t gleich null vx null ist. Für t gleich null habe ich nur sin(phi). Phi ist also null. Wenn ich nun diese Gleichung betrachte, zum Zeitpunkt t gleich null erhalte ich ein cosinus von null, was eins entspricht, ich erhalte also *v1* gleich *a*. Ich kann nun die Gleichung von *vx* integrieren, um *x* von *t* zu erhalten. Das Integral von Sinus ergibt minus omega Kosinus. Es hat eine Konstante, welche durch die Anfangsbestimmungen definiert ist. Zum Zeitpunkt t gleich null haben wir x0 gleich *c* minus *v1* durch omega. Voilà ich habe *c* gefunden. Ich schreibe *x* von *t* komplett um, genauso für *y* de *t*. Ich erhalte einfach diese Lösung hier. Ich schlage euch nun vor die Trajektorie zu analysieren.

Notes

Summary

4m 12s

Trajectoire

$$x(t) = x_0 + \frac{v_1}{\omega} - \frac{v_1}{\omega}\cos\omega t \qquad y(t) = y_0 + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega t$$

$$\left(x - x_0 - \frac{v_1}{\omega}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_1^2}{\omega^2}$$

Cercle de rayon : $r = \frac{v_1}{\omega} = \frac{mv_1}{qB}$

Mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega = \frac{qB}{m}$,

indépendante du rayon (principe du cyclotron : plus la vitesse augmente plus le rayon et grand, mais la fréquence de la tension accélératrice reste la même.)

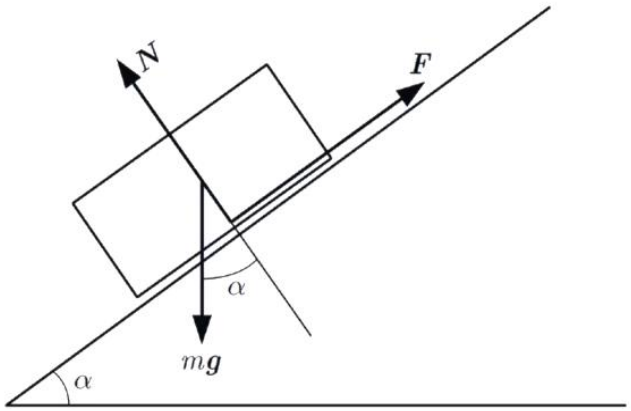
Voilà *x* von *t* und *y* von *t*. Hier sind also meine Gleichungen. Nun möchte ich die Trajektorie bestimmen. Hier habe wir einen *cos oméga t* und einen *sin oméga t*. Ich kann die Trajektorie bestimmen, indem ich die Terme groupiere. Ich nehme *x* minus diesen Term und setze das Total ins Quadrat. Ich nehme *y* minus diesen Term und setzte ebenfalls das Total ins Quadrat. Dies ergibt mir *v1* im Quadrat durch omega im Quadrat mal *sin* im Quadrat plus *sin* im Quadrat, was eins ergibt. Ich habe also diesen Term hier und dies hier ist die kartesische Gleichung eines Kreises. Der Radius des Kreises ist *v1* durch omega. Wenn ich die Definition von omega betrachte, *mv1* durch qB, sieht man, dass der Radius desto kleiner ist desto intensiver das Magnetfeld ist oder auch, dass der Radius desto grösser ist desto grösser *v1* ist. Ich erinnere euch an das Essentielle: die Winkelgeschwindigkeit ist unabhängig vom Radius. Also unabhängig vom Radius benötigt das Teilchen dieselbe Zeit, um eine ganze Runde zurückzulegen. In der Technik ist dies sehr wichtig, da dieses Prinzip die Basis der der Funktionsweise eines Zyklotrons ist. Desto grösser die Geschwindigkeit des Teilchens desto grösser der Radius. Die benötigte Zeit um eine Runde zurückzulegen bleibt jedoch gleich.

Notes

Summary

5m 55s

Frottement sec sur plan incliné



Hypothèses :
- Glissement
- Vitesse constante

$$N = mg\cos\alpha$$
$$\mu_c N = mg\sin\alpha \longrightarrow \mu_c = \tan(\alpha)$$

Ich beende diese Lektion nun mit einer kleinen Aufgabe zur Gleitreibung. Ich stelle mir die folgende Situation vor: Ein Block, welcher sich auf einer schiefen Ebene herunter bewegt. Voilà, das Schwerefeld. Ich nehme an, dass der Block rutscht und dass sich dieser mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Die Summe aller Kräfte ergibt also: die Reibungskraft, die Reaktionskraft der schiefen Ebene und die Reibungskraft. Die Summe dieser drei Kräfte muss null ergeben. Wenn ich in diese Richtung hier projiziere, habe ich N gleich *mg cos alpha*, wobei *mg cos alpha* die Projektion von *mg* auf diese Achse darstellt. In dieser Richtung habe ich F gleich mg sin alpha. Dies habe ich hier aufgeschrieben. Man kann diese Gleichung hier durch diese dort dividieren und man erhält: *mu c* gleich Tangens von alpha. Voilà, eine geometrische Interpretation von *mu c*. Es entspricht der Tangenten der schiefen Ebene, auf welcher der Massepunkt mit konstanter Geschwindigkeit heruntergleitet.

Notes

Summary

7m 32s