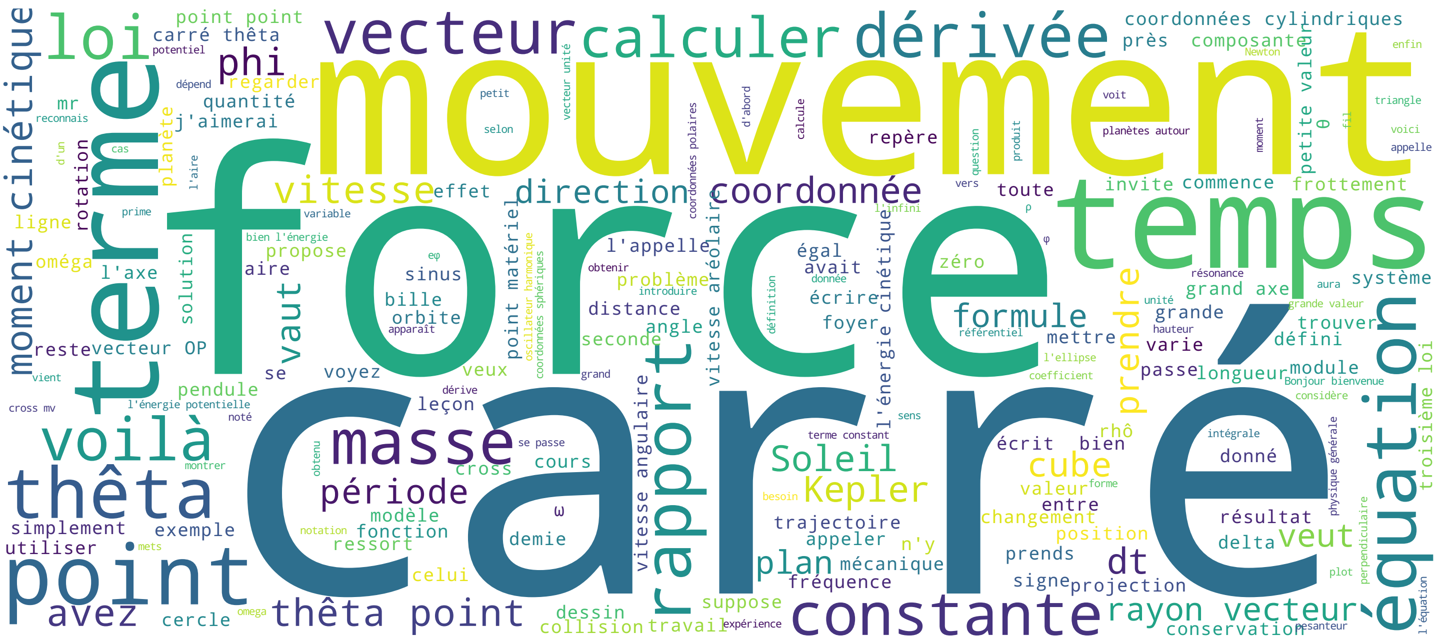
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-13

Loi de la gravitation

Mécanique, cours 13.2

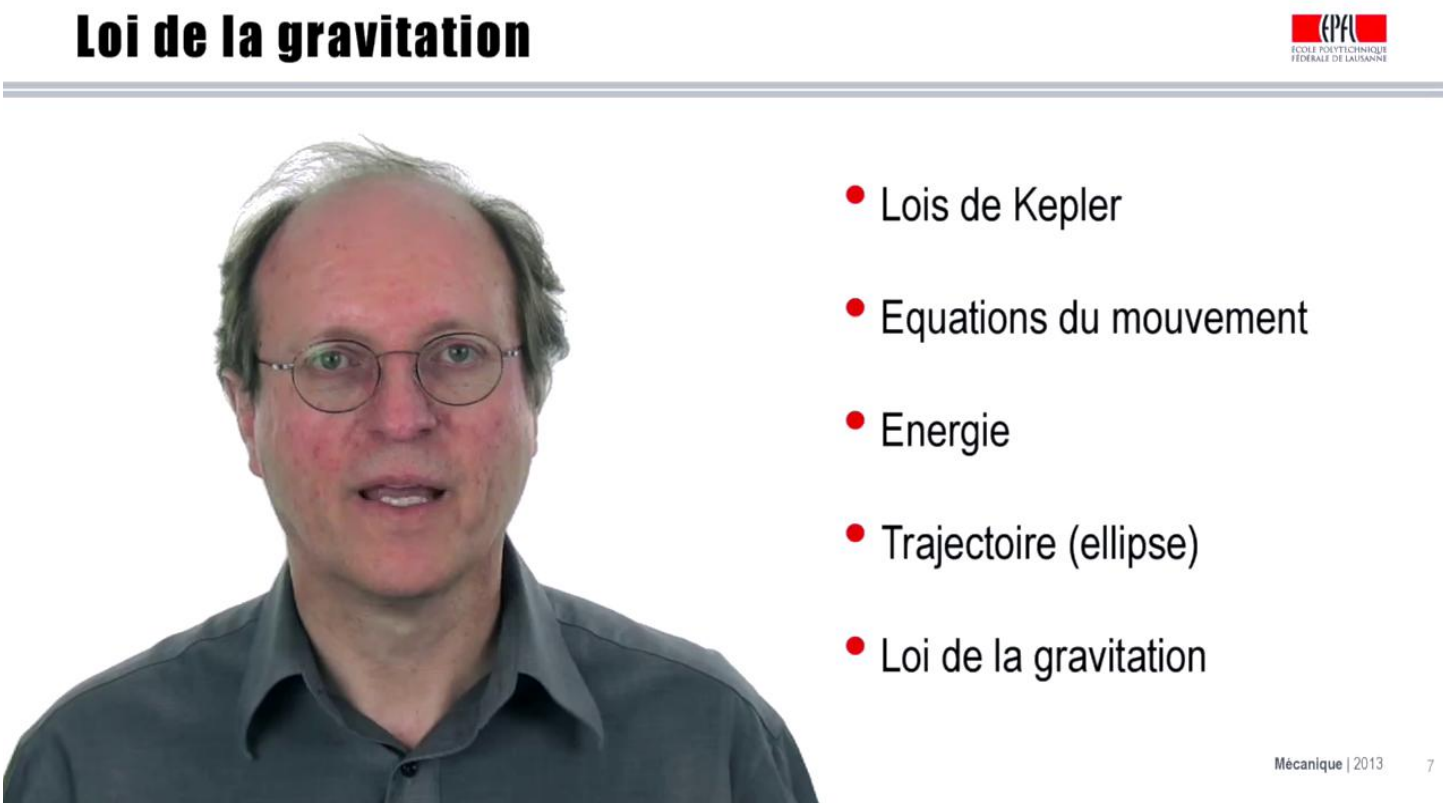
Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

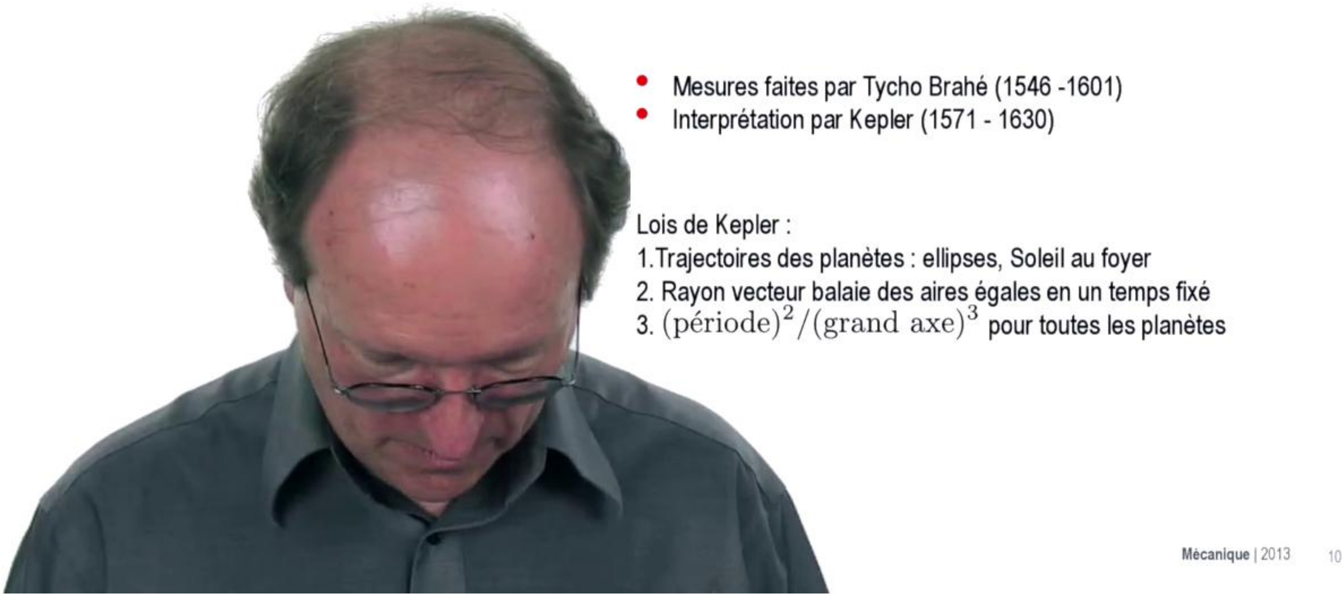


Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, je vais introduire un grand classique de la mécanique: le problème des planètes autour du Soleil. Nous allons voir, ici, que on peut conduire une analyse, dans laquelle on connaît le mouvement, on connaît les caractéristiques du mouvement, et on peut en déduire la force. D'habitude, dans ce qu'on a fait jusqu'à maintenant, en particulier, on s'est donné un modèle de force, on a écrit les équations du mouvement, On les a intégrées pour obtenir le mouvement. Ici, on peut partir du mouvement pour trouver la force. Je vais commencer par énoncer les lois de Kepler, qui caractérise le mouvement des planètes autour du Soleil. On va écrire les équations du mouvement, en se donnant un modèle de force avec une dépendance en 1 sur la distance au carré. On va voir que l'énergie est conservée. Ça sera un cas particulier qu'on a déjà vu; On a vu de façon générale, que lorsqu'on a des forces qui sont conservatives, on a la conservation de l'énergie. On le verra ici, en déduisant des équations du mouvement. On va discuter la trajectoire des planètes autour du Soleil, obtenir le résultat que les orbites sont des ellipses. Et enfin, on va, avec les lois de Kepler, obtenir la loi de la gravitation de Newton.

Notes

Summary

0m 04s



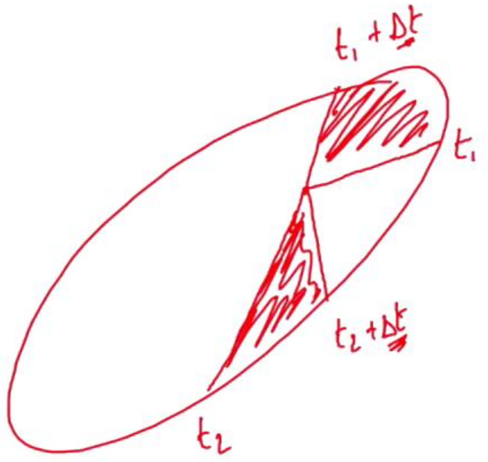
Je commence avec les lois de Kepler. L'histoire remonte au seizième siècle, quand Tycho Brahé fait des mesures extrêmement précises, et tout à fait remarquables, avec l'instrumentation qu'il avait développée à l'époque, des mesures extrêmement précises, des orbites des planètes, de quelques planètes tournant autour du Soleil. Kepler, élève de Tycho Brahé, examine ces données très attentivement, et en déduit les lois suivantes : Il observe, d'une part, que les planètes décrivent des orbites elliptiques, et que le Soleil est au foyer de l'ellipse. D'autre part, il énonce ce qu'on appelle la loi des aires, qui dit que le rayon vecteur balaie des aires égales, en un temps fixé. Je dois faire un dessin pour ceci.

Notes

Summary

1m 47s

Lois de Kepler



- Mesures faites par Tycho Brahé (1546 -1601)
- Interprétation par Kepler (1571 - 1630)

Lois de Kepler :

1. Trajectoires des planètes : ellipses, Soleil au foyer
2. Rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixé
3. $(\text{période})^2/(\text{grand axe})^3$ pour toutes les planètes

Mécanique | 2013 10

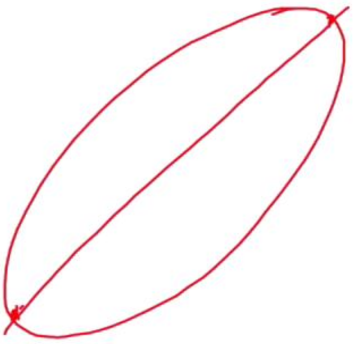
Donc, j'ai, vous imaginez, une orbite très excentrique. Ça, c'est censé représenter une ellipse. Voilà le foyer. Donc, je considère le rayon vecteur, disons, entre le temps *t*1, et le temps *t*1 plus un certain *delta t*. Le rayon vecteur OP balaie cette zone-là. Puis, je prends un temps plus tard, disons, comme ceci. Je prends un temps *t*2, et un *t*2 plus le même *delta t*. Le même *delta t*. Et ce que la loi des aires nous dit, c'est que le rayon vecteur a balayé les mêmes aires. C'est cette loi-là.

Notes

Summary

2m 48s

Lois de Kepler



- Mesures faites par Tycho Brahé (1546 -1601)
- Interprétation par Kepler (1571 - 1630)

Lois de Kepler :

1. Trajectoires des planètes : ellipses, Soleil au foyer
2. Rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixé
3. $(\text{période})^2/(\text{grand axe})^3$ pour toutes les planètes

Mécanique | 2013 10

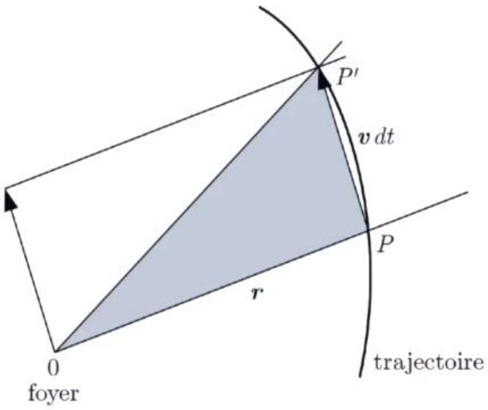
La troisième loi de Kepler nous dit, alors, que la période, c'est le temps qu'il faut pour faire une fois l'orbite, divisée par le grand axe, ça, cette longueur-là, c'est ce qu'on appellera le grand axe. Alors, la période au carré divisée par le grand axe au cube, a la même valeur pour toutes les planètes.

Notes

Summary

3m 44s

Loi des aires



$$dA = \text{aire}(OPP') = \frac{1}{2}\, rv\, dt \sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$

Mouvement dans un plan :

$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$ toujours dans la même direction.

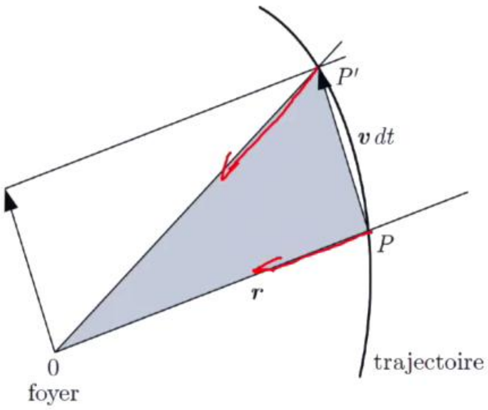
Alors, commençons par analyser ce que veut dire la loi des aires. J'imagine, ici, un élément de la trajectoire, le foyer, le vecteur OP, le rayon vecteur qui balaie une aire. Alors, je vais prendre le déplacement entre un temps *t* et *t* plus *dt*. Donc, j'ai un déplacement infinitésimal. J'ai une aire infinitésimale, et pour calculer cette aire, que je vais appeler *da*, ça doit être, (c'est égal) à l'aire du triangle O P P prime. Ce que j'ai noté, ici. Alors, ça fait une demie de la base fois la hauteur, formule de l'aire d'un triangle. Alors, je fais une demie de *r* fois la hauteur de triangle. Alors, il faudrait calculer le *sinus* des angles, ici. Ici, j'ai pratiquement dessiné un angle de 90 degrés. Mais cet angle-là, c'est celui-là qui intervient. Et donc, j'ai *vdt* fois ce *sinus*, qui me donne la hauteur du triangle. Et voilà, la formule pour l'aire. Maintenant, comme on a un mouvement plan, *r* et *v* sont toujours dans le même plan. Donc, *r* cross *v*est toujours le long de la normale au plan. Et notez que cette formule-là, vous avez *r, v*, fois le *sinus* de l'angle entre *r* et *v*. C'est bien le module de ce vecteur-là.

Notes

Summary

4m 15s

Loi des aires



$$dA = \text{aire}(OPP') = \frac{1}{2} rv\,dt \sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$

Mouvement dans un plan :

$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$ toujours dans la même direction.

1ère et 2ème loi de Kepler :

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{L}_O$$ « Vitesse aréolaire »

Moment cinétique constant :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}) = 0 = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \wedge \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a} \implies$$ Force « centrale »

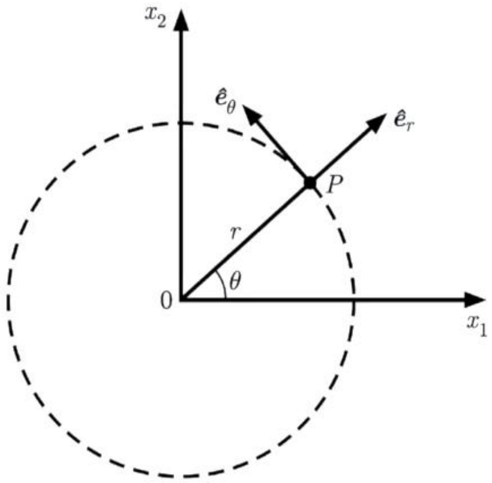
Mécanique | 2013 21

Par conséquent, la première loi et la deuxième loi de Kepler ensemble, nous disent que le vecteur que je peux construire de la manière suivante. J'écris *r* cross *v*, avec le une demie, qui a une direction fixe. Et la loi des aires nous dit que le module est constant aussi. Ce vecteur-là est une constante. Or, on reconnaît ici, un facteur 2*m* près, le moment cinétique. On aurait *r cross mv*, pour le moment cinétique. Ceci, on l'appelle la vitesse aréolaire. Maintenant, si le moment cinétique est conservé, *r cross mv* est conservé, Ça veut dire que sa dérivée par rapport au temps est nulle. Il y a deux termes; Le premier terme, évidemment, donne 0. Le deuxième terme, *1 dv sur dt* Ça veut dire *A*. Et *A*, c'est 1 sur *m* fois *F*. Donc, on est en train de voir que, ici, cette loi des aires implique que *r* et F sont colinéaires : *r* est parallèle à F. On dit que la force est centrale. Ça veut dire que, en tout temps, la force est dirigée vers le foyer, donc, vers le Soleil.

Notes

Summary

5m 58s



Référentiel : un groupe d'étoiles

Coordonnées 'polaires' (cylindrique dans le plan)

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

Mécanique | 2013 28

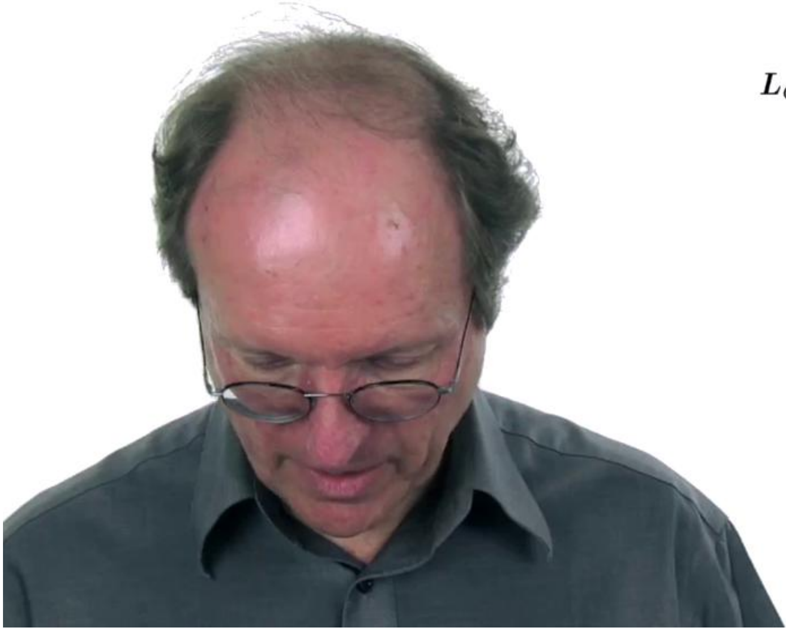
Je vais maintenant établir la cinématique de ce mouvement. Je me donne, comme référenciel, un groupe d'étoiles, étoiles éloignées. Je vais utiliser des coordonnées que j'appelle polaires, c'est simplement des coordonnées cylindriques restreintes au plan. Je vais utiliser la notation suivante : Je prends des axes liés au référenciel, je définis un angle *thêta* par rapport à l'axe *x*1. Ici, ce cercle, c'est la ligne de coordonnées où *thêta* varie. *r*, ça va être la distance, c'est l'équivalent de *rho* pour les coordonnées cylindriques, J'ai un vecteur *er*, unité vecteur *e thêta*, vecteur unité qui se forme le repère associé à ses coordonnées. J'ai des résultats bien connus. Le vecteur, le rayon vecteur OP, je note *r*, c'est simplement la coordonnée *r* fois *er*. La vitesse a un terme *r* point, et un terme *r thêta* point, et l'accélération, je la prends du formulaire, en ajustant la notation, donc, le formulaire pour les coordonnées cylindriques.

Notes

Summary

7m 37s

Moment cinétique



$$\boldsymbol{L}_O = m\underbrace{r\boldsymbol{e}_r}_{\vec{r}} \wedge \underbrace{(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)}_{\vec{v}} = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z = L\boldsymbol{e}_z$$

Maintenant, exprimons le moment cinétique en coordonnées polaires. Alors, je dois écrire le vecteur *r cross mv*. Le *m* est là. Et là, on a *v* en coordonnées polaires. Le premier terme donne 0. Le deuxième terme donne *m*, *r* carré *thêta* point, dans la direction *er cross e thêta*, ce que je vais appeler *ez*. C'est le vecteur unité, normal au plan.

Notes

Summary

8m 53s

Moment cinétique

$$\boldsymbol{L}_O = mr\boldsymbol{e}_r \wedge \left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z = L\boldsymbol{e}_z$$

$$\boxed{L = mr^2\dot{\theta}} = \text{constante}$$

Mécanique | 2013 31

Et je vais noter L cette grandeur, grandeur *mr* carré *thêta* point, L est une constante, ne l'oublions pas. Et on va souvent utiliser, cette constante du mouvement qui donne un lien entre *r* et *thêta* point.

Notes

Summary

9m 27s

Equation du mouvement

Modèle de force

On procède en posant déjà :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (K > 0)$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-K}{r^2}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{mr^2\dot{\theta}}_{L}\Big) = 0$$

Mécanique | 2013 37

Maintenant, écrivons les équations du mouvement. Alors, en toute rigueur, on pourrait partir des lois de Kepler, et démontrer que la force étant 1 sur *r* carré. Pour garder les choses plus explicites, nous, on va se donner un modèle de force en 1 sur *r* carré. Je vais prendre K positif. La force est opposée à *er*. Donc, elle est dirigée vers le centre. C'est donc une force attractive, que je suppose, et avec une dépendance en 1 sur *r* carré. Je pose cela pour développer mes calculs. L'équation du mouvement, ici, on a les deux composants de l'accélération, selon *er* et selon *e thêta*. Il y a une force, seulement selon *er*, parce qu'on a démontré qu'on avait une force centrale. Et maintenant, je commence mon analyse. La première chose que j'aimerais vous faire remarquer, c'est que la deuxième équation, je peux la multiplier par *r*. J'ai ces deux termes. Et, si vous y regardez d'un peu plus près, vous voyez qu'ici, vous avez la dérivée par rapport au temps de *mr* carré thêta point. Et ça, c'est ce qu'on avait appelé L, le moment cinétique, ou le module du moment cinétique. Donc, cette équation-là du mouvement implique la conservation du moment cinétique.

Notes

Summary

9m 52s

Equation du mouvement

Modèle de force

On procède en posant déjà :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (K > 0)$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-K}{r^2}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$m(\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2) = m(\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{m^2r^3}) = \frac{-K\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}\right) = 0$$

Mécanique | 2013 40

Je mets la valeur de L ici, parce que maintenant, ce que je me propose de faire, c'est de prendre cette équation-là du mouvement, de la multiplier par *r* point. Vous voyez que vous avez *r* point qui apparaît, ici, ici, ici, et puis là. Et là, ce que j'ai fait, c'est que j'ai utilisé ce L pour remplacer thêta point carré, par une fonction de *r*. Thêta point, c'est L sur *mr* carré. Donc, thêta point au carré, c'est L carré sur *m* carré *r*4. Il y a un *r*, ici, donc il ne reste plus qu'un *r* cube. Et maintenant, je contemple cette équation-là, et je me dis "Aha!" je reconnais ici des dérivées par rapport au temps, par exemple, *r* point, *r* point point, c'est la dérivée par rapport au temps de *r* point au carré. C'est ce que j'ai noté ici. Ici, on a moins 1 sur *r* cube, c'est la dérivée de 1 sur *r* carré; en effet, si on prend ce terme-là et on le dérive par rapport au temps, on aura un moins 2, qui se simplifie avec ce 2, *r* à la puissance moins 3, fois *r* point; le *r* point il est là. Et puis ce terme-là, si je le dérive par rapport au temps, je vais avoir plus 1 sur *r* carré, fois *r* point, je le passe de l'autre côté du signe, du signe égal, j'ai donc un moins *r* point sur *r* carré. Donc, j'ai trouvé que ce terme-là est une constante du mouvement.

Notes

Summary

11m 20s

Constante du mouvement :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{K}{r} \quad = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{K}{r}$$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \qquad V(r) = \int_r^\infty -\frac{K}{r'^2}dr' = K\left[\frac{1}{r'}\right]_r^\infty = \frac{-K}{r}$$

$\frac{-K}{r}$ est l'énergie potentielle.

E est l'énergie mécanique.

Je résume : je vais appeler ce terme E, c'est une constante du mouvement, je l'appelle énergie parce que je reconnais ici une énergie cinétique, donc, par cohérence des unités, tous ces termes-là sont des termes d'énergie; si maintenant, au lieu d'écrire L carré, j'écris *r* carré thêta point carré, je reconnais tout de suite ici la composante *r* de *v* au carré, et ici la composante thêta de *v* au carré. Donc j'ai bien l'énergie cinétique ici, et ça, ça doit être l'énergie potentielle. On peut le vérifier : si ça c'est la force, l'énergie potentielle, c'est le travail pour aller de cette position *r*, à une position référence et ici, je vais prendre la référence à l'infini; donc je veux dire que le zéro du potentiel sera à l'infini. Je calcule le travail de la force, et cette intégrale-là me donne 1 sur *r*, donc *r* prime, la variable d'intégration, je l'appelle *r* prime, que je veux calculer à la position *r* et à l'infini, ça me donne ce terme-là. Donc le moins K sur *r*, c'est bien l'énergie potentielle, et le E, c'est bien l'énergie mécanique.

Notes

Summary

13m 05s

Trajectoire

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta} \qquad r = \frac{1}{q(\theta(t))}$$

Changement de variable : $q = \dfrac{1}{r}$ $\qquad \dot{r} = \dfrac{-1}{q^2}\dfrac{dq}{d\theta}\,\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\dfrac{dq}{d\theta} = -\dfrac{L}{m}\dfrac{dq}{d\theta}$

Mécanique | 2013 52

Maintenant, on passe à la question des trajectoires. Je pars de cette équation-là du mouvement, sans oublier cette constante du mouvement, le moment cinétique. Je fais un changement de variable, alors là, je dois vous signaler que le passage que je vais vous monter maintenant est un passage qui est ad hoc, qui concerne cette question du problème de Kepler, il ne faut pas y voir un savoir-faire à développer; mais regardons ce que se passe si on fait ce changement de variable. J'ai besoin de calculer *r* point point, donc on va y aller une étape à la fois, on va d'abord calculer *r* point. Donc ici, ce que je fais, c'est que je considère que *r* est 1 sur *q*, *q* est une fonction de thêta, et thêta est une fonction de *t*. Donc, pour calculer la dérivée, j'ai la dérivée de 1 sur *8q*, ça fait moins 1 sur *q* carré, il faut dériver *q* par rapport à thêta, et il faut dériver thêta par rapport au temps, c'est thêta point. Maintenant, 1 sur *q* carré, ça fait *r* carré, *r* carré thêta point, ça fait L sur *m*, c'est ce que j'ai écrit ici. Maintenant, on peut calculer *r* point point.

Notes

Summary

14m 30s

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable : $q = \frac{1}{r}$ $\quad \dot{r} = \frac{-1}{q^2}\,\frac{dq}{d\theta}\,\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\,\frac{dq}{d\theta}$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\,\frac{d^2q}{d\theta^2}\,\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\,\frac{d^2q}{d\theta^2}\,\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}\,q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2}$$

Alors, on part de là, on a *d* carré *q* sur *d* thêta carré fois thêta point. Thêta point, on peut l'écrire comme L sur *mr* carré, ou L sur *m*, fois *q* carré. D'où le *q* carré qui est ici. Et maintenant, il faut mettre ce *r* point point, là dedans. Alors, on y va : *m r* point point, ça fera moins L carré sur *m q* carré, permettez-moi d'appeler ces termes-là, *q* seconde. Ici j'ai moins *m r*, r c'est 1 sur *q*, thêta point carré, c'est L carré sur *m* carré, *r*4, ça fait *q*4. Et tout ça est égal à moins K fois *q* carré. Maintenant, on peut changer de couleur, on va diviser par *q* carré. Là j'ai un *q* cube, il ne restera plus qu'un *q*, et là je divise par *q* carré. Je vais mettre le L carré ici, donc je l'enlève de là, et je l'enlève de là. J'ai un *m* que je vais rapporter ici, ce qui me permet d'enlever ces deux et celui-là, et il y a des signes moins partout, que j'enlève. Et j'ai l'équation du mouvement en *q*, qui a l'allure suivante : *d* carré *q* sur *d* thêta carré, plus *q*, égal K*m* sur L au carré.

Notes

Summary

15m 52s

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable :

$$q = \frac{1}{r} \qquad \dot{r} = \frac{-1}{q^2}\,\frac{dq}{d\theta}\,\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\,\frac{dq}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\,\frac{d^2q}{d\theta^2}\,\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\,\frac{d^2q}{d\theta^2}\,\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}\,q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2} \qquad q = \frac{1}{r} = \frac{Km}{L^2} + C\cos(\theta + \theta_0)$$

Equation polaire d'une ellipse

Maintenant, je prétends que cette équation-là, cette équation du mouvement, cette équation différentielle, vous la connaissez déjà. Je vous invite à faire une pause, pour réfléchir et vous souvenir où vous l'avez déjà rencontrée. Alors, cette équation-là, c'est l'équation d'un oscillateur harmonique, où *q* représenterait la position de la masse, thêta joue le rôle du temps, et au lieu d'avoir un K sur *m* ici, on a 1. Et là, on a un terme constant, comme on a eu un terme constant lorsqu'on avait un ressort, une masse attachée à un ressort, dans le champ de la pesanteur. Donc, on connait la solution de cette équation-là. La solution pour *q* c'est le terme constant, plus un terme harmonique; ici la pulsation est 1, parce que ici, j'avais 1. J'ai deux constantes du mouvement, thêta 0, je veux dire, j'ai deux constantes d'intégration, thêta 0 et C, qui sont à déterminer par les conditions initiales. Maintenant, je vous invite à consulter un livre de maths, un copain mathématicien, ou faire quelques calculs, vous pouvez vous convaincre que cette équation-là, 1 sur *r* fonction de thêta comme ceci, est l'équation en coordonnées polaires d'une ellipse.

Notes

Summary

17m 46s

Trajectoire

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=\frac{-K}{r^2} \qquad L=mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable : $q=\frac{1}{r}$ $\qquad \dot{r}=\frac{-1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\dot{\theta}=-r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta}=-\frac{L}{m}\frac{dq}{d\theta}$

$$\ddot{r}=-\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\dot{\theta}=-\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2}=-\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2}+q=\frac{Km}{L^2} \qquad q=\frac{1}{r}=\frac{Km}{L^2}+C\cos(\theta+\theta_0)$$

Equation polaire d'une ellipse

Valeurs extrémales : $\frac{1}{r_1}=\frac{Km}{L^2}+C \qquad \frac{1}{r_2}=\frac{Km}{L^2}-C \quad \left(C<Km/L^2\right)$

Mécanique | 2013 58

Il n'y a pas intérêt dans le cadre du cours de mécanique à regarder ça plus avant, il y a un petit résultat dont j'ai besoin, c'est que si je veux trouver les valeurs extrémales de *r*, la plus grande valeur de *r* et la plus petite valeur de *r*, je dois prendre la plus grande valeur de cosinus thêta et la plus petite valeur du cosinus thêta, de l'autre terme. Si je fais un dessin, vous avez, ici le foyer, ici vous avez la plus petite valeur de *r*, c'est *r*1 et ici vous avez la plus grande, c'est *r*2. Donc qu'est-ce que j'ai fait ici? C'est que j'ai pris, pour *r*1, j'ai pris cosinus vaut 1, et puis pour *r*2, la plus grande valeur, je dois prendre la plus petite valeur possible ici, c'est évidemment quand le cosinus vaut moins 1. Comme *r*2 est une distance au foyer, *r*2 est une grandeur positive, donc il y a une condition qui s'impose sur C, il n'y a pas lieu de regarder ça plus en détail ici, mais en effet, on a une ellipse, seulement si on lance notre objet autour du Soleil, avec une vitesse pas trop grande. Cette condition dépend, de la force d'attraction, de la masse de l'objet qu'on lance en orbite et du moment cinétique.

Notes

Summary

19m 23s

(vitesse aréolaire) × (période) = aire de l'ellipse

$$\frac{L}{2m}T = \text{aire}$$

$$\text{aire} = \int_0^T \frac{L}{2m}dt = \int_0^T \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(KM/L^2 + C\cos\theta)^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\pi\left(Km/CL^2\right)}{\left(\left(KM/CL^2\right)^2 - 1\right)^{3/2}}$$

Maintenant, on exploite la troisième loi de Kepler. Alors, on a la vitesse aréolaire, qui est constante. Si on la multiplie par la période, on doit obtenir l'aire de l'ellipse. La vitesse aréolaire c'est L sur 2*m*, la période, je vais l'appeler T, et donc ce produit-là doit donner l'aire de l'ellipse. Or, on peut raisonner autrement pour obtenir l'aire de l'ellipse, on peut faire l'intégrale de 0 à T de la vitesse aréolaire, fois *dt*; ce terme-là, je l'écris comme *r* carré, thêta point. Maintenant, je fais un changement de variable, j'utilise thêta comme variable, thêta variant de 0 à 2 pi, et j'ai une demie de *r* carré *d* thêta. Avec le *r* qui est donné par ce *r* de thêta, qui est donc le résultat qu'on a obtenu pour l'ellipse; indiqué ici. Cette intégrale-là, un ordinateur, un programme d'intégration sait le faire de façon algébrique, c'est comme ça que j'ai trouvé moi-même la solution, j'ai mis cette formule-là dans un intégrateur, et voilà le résultat que j'ai obtenu. Bon, maintenant, vous vous souvenez que la loi de Kepler dit, invoque, la période au carré est le grand axe au cube.

Notes

Summary

20m 53s

$3^{\text{ème}}$ loi de Kepler

(vitesse aréolaire) × (période) = aire de l'ellipse

$$\frac{L}{2m}T = \text{aire}$$

$$\text{aire} = \int_0^T \frac{L}{2m}dt = \int_0^T \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(KM/L^2 + C\cos\theta)^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\pi\left(Km/CL^2\right)}{\left(\left(KM/CL^2\right)^2 - 1\right)^{3/2}}$$

Grand axe : $$2a = \frac{1}{\frac{Km}{L^2} - C} + \frac{1}{\frac{Km}{L^2} + C}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Alors, le grand axe, on va le calculer, on l'appelle 2*a*, on va le calculer comme, *r*1 plus *r*2. Alors *r*1 et *r*2, je les ai donnés tout à l'heure, les voilà, exprimés ici, et maintenant, il faut faire un peu d'algèbre, ce n'est pas très intéressant, pour simplifier ce terme-là, utilisez ce terme-là et ce résultat-là pour l'aire, pour obtenir le T carré, sur *a* cube, qui apparaît dans la loi de Kepler, la troisième loi de Kepler. Et tout se simplifie magnifiquement, il ne reste plus que ces termes-là, il reste 4 pi carré, *m* sur K. Il n'y a aucune raison de passer du temps à regarder ces détails algébriques, on ne va pas apprendre la mécanique en faisant ça.

Notes

Summary

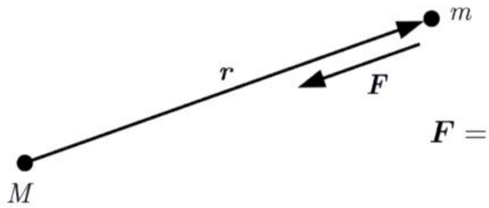
22m 33s

Loi 'universelle'

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Newton :
si c'est vrai pour toute planète : $K \propto m$

Newton :
le soleil joue un rôle semblable à celui de la planète $K \propto M\,m$



$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$G = 6.7\ 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Constante gravitationnelle

Mécanique | 2013 71

Alors, maintenant, ça devient beaucoup plus intéressant, parce que on vient de trouver ce T carré sur *a* cube, et Kepler, la troisième loi de Kepler nous dit que ce terme T carré sur *a* cube, est le même pour toutes les planètes; or, les planètes ont des masses différentes, donc, il faut absolument prendre K proportionnel à la masse *m* de la planète. Et là Newton fait un raisonnement assez beau, il dit : Si cette force que je cherche à caractériser, dépend de la masse de la planète, par symétrie, cette force doit aussi dépendre de la masse du Soleil. Donc, il dit K proportionnel aux deux masses, la masse du Soleil et la masse de la planète. Et il écrit, enfin, et donc je le mets ici de façon géométrique, vous avez le Soleil ici, la planète, le rayon vecteur, je définis un vecteur unité de cette manière-là. Et j'ai force en K sur *r* carré, où K est une constante, fois les deux masses. Cette constante s'appelle la constante gravitationnelle, je vous donne sa valeur ici, et donc, on a conclu l'analyse de ce problème.

Notes

Summary

23m 30s