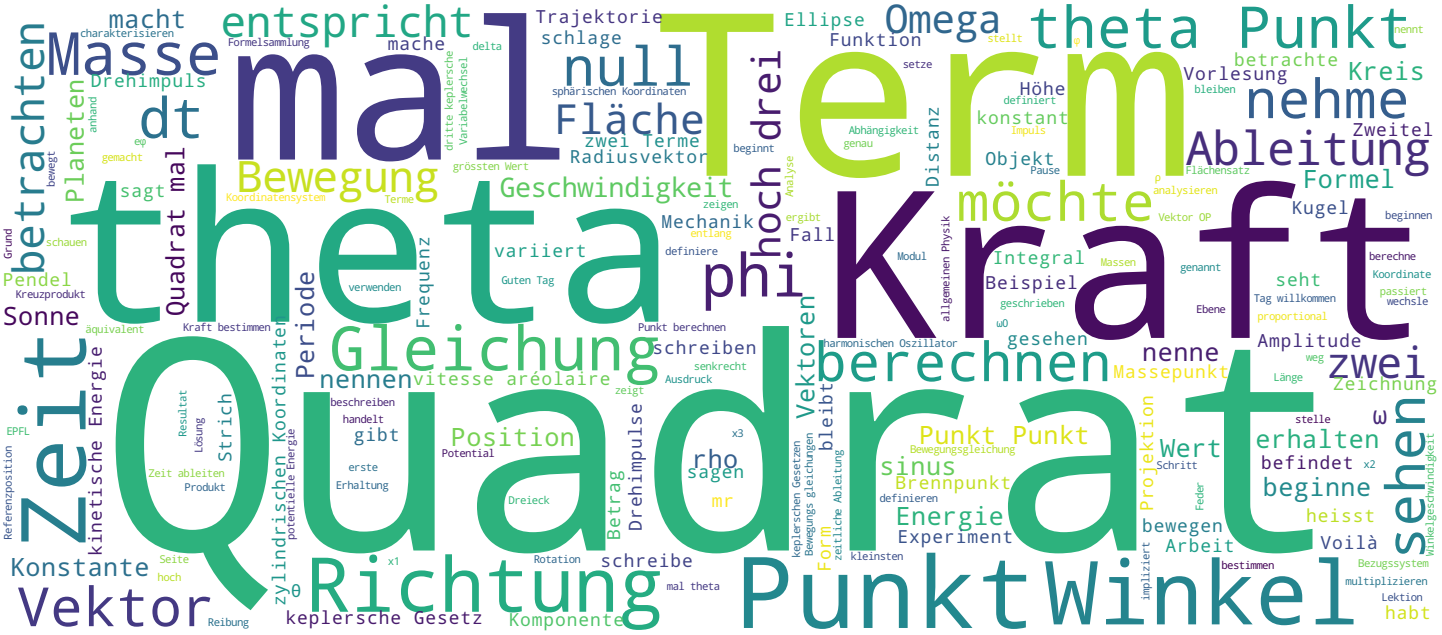
Loi de la gravitation

Mécanique, cours 13.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-13



Video

Loi de la gravitation

- Lois de Kepler
- Equations du mouvement
- Energie

Mécanique | 2013 5

Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. Heute werde ich einen grossen Klassiker der Mechanik einführen: Das Problem der Planeten, welche um die Sonne kreisen. Hier werden eine Analyse kennenlernen, in welcher wir die charakteristischen Eigenschaften der Bewegung kennen und daraus die Kraft bestimmen können. Üblicherweise, in dem was wir bis jetzt gemacht haben, wurde die Kraft als gegeben betrachtet und von dort weg haben wir die Bewegungs- gleichungen aufgestellt. Diese haben wir darauf integriert, um die Form der Bewegung zu besetimmen. In diesem Fall können wir anhand der Bewegung die ausgeübte Kraft bestimmen. Ich werde damit beginnen, die keplerschen Gesetze darzulegen. Diese charakterisieren die Bewegung der Planeten um die Sonne. Wir werden die Bewegungsgleichungen aufstellen, indem wir die Kraft mit einer Abhängigkeit von eins durch die Distanz im Quadrat modellieren. Wir werden sehen, dass die Energie konserviert ist. Dies ist ein spezieller Fall, welchen wir bereits gesehen haben. Wir haben im Allgemeinen gesehen, dass, wenn konservative Kräfte vorhanden sind, die Energie konserviert ist. Dies werden hier aus den Bewegungs- gleichungen ableiten.

Notes

Summary

0m 04s

Loi de la gravitation

- Lois de Kepler
- Equations du mouvement
- Energie
- Trajectoire (ellipse)
- Loi de la gravitation

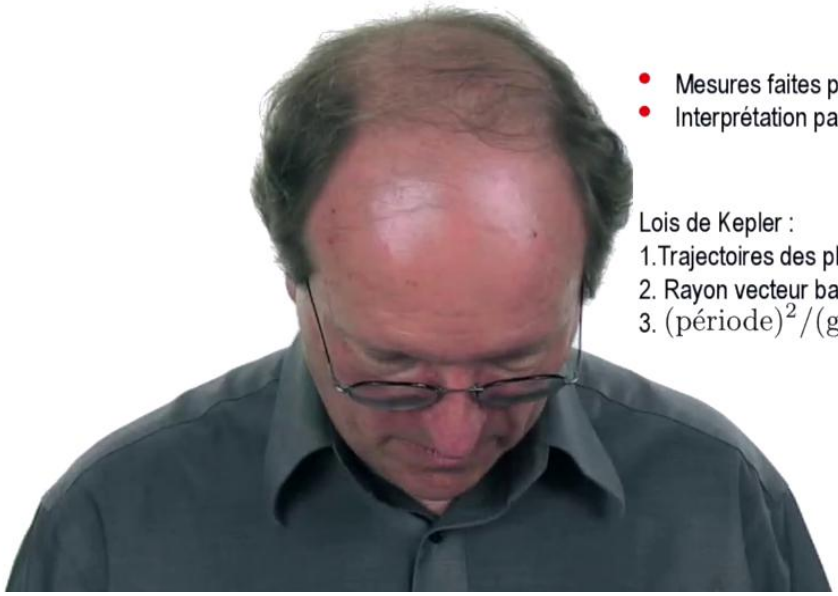
Wir werden die Umlaufbahn der Planeten um die Sonne diskutieren. Wir werden sehen, dass diese Ellipsen sind. Und zum Schluss, mit den keplerschen Gesetzen, werden wir das newtonsche Gravitationsgesetz erhalten.

Notes

Summary

1m 26s

Lois de Kepler



- Mesures faites par Tycho Brahé (1546 -1601)
- Interprétation par Kepler (1571 - 1630)

Lois de Kepler :
1. Trajectoires des planètes : ellipses, Soleil au foyer
2. Rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixé
3. $(\text{période})^2/(\text{grand axe})^3$ pour toutes les planètes

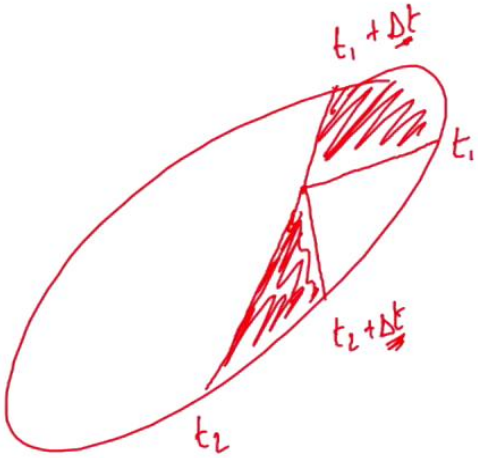
Ich beginne mit den keplerschen Gesetzen. Die Geschichte beginnt im sechzehnten Jahrhundert, als Tycho Brahé sehr präzise Messungen der Planetenumlaufbahnen zu machen beginnt. Das dafür verwendete Instrument hat dieser selbst entwickelt, um die Planeten- umlaufbahnen exakter messen zu können, als es bis anhin möglich war. Kepler, von Tycho Brahé nachgezogen, studiert diese Messungen sehr genau und leitet aus ihnen die folgenden Gesetze ab: Er stellt auf der einen Seite fest, dass die Planetenbahnen Ellipsen darstellen und sich die Sonne im Brennpunkt dieser befindet. Auf der anderen Seite stellt er den Flächensatz auf, welcher besagt, dass die in einer fixierten Zeit überfahrene Fläche des Radiusvektors immer dieselbe ist. Für das muss ich eine Zeichnung machen.

Notes

Summary

1m 47s

Lois de Kepler



- Mesures faites par Tycho Brahé (1546 -1601)
- Interprétation par Kepler (1571 - 1630)

Lois de Kepler :

1. Trajectoires des planètes : ellipses, Soleil au foyer
2. Rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixé
3. $(\text{période})^2/(\text{grand axe})^3$ pour toutes les planètes

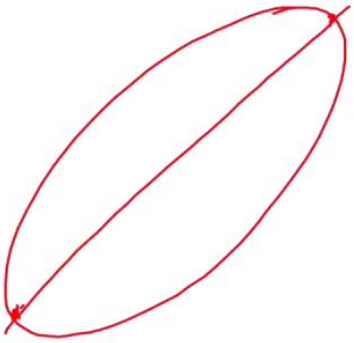
Also, stellt euch vor, ich habe einen sehr exzentrischen Orbit. Dies sollte eine Ellipse darstellen. Hier der Brennpunkt. Ich betrachte also den Radiusvektor zur Zeit *t*1 und zur Zeit *t*1 plus ein gewisses *delta t*. Der Vektor OP überfahrt also diese Zone hier. Nun nehme ich einen späteren Zeitpunkt. Ich nehme eine Zeit *t*2 und eine Zeit *t*2 plus dasselbe *delta t*. Der Flächensatz sagt uns nun, dass der Radiusvektor dieselben Flächen überfahren hat. Es ist dieses Gesetz hier.

Notes

Summary

2m 48s

Lois de Kepler



- Mesures faites par Tycho Brahé (1546 -1601)
- Interprétation par Kepler (1571 - 1630)

Lois de Kepler :

1. Trajectoires des planètes : ellipses, Soleil au foyer
2. Rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixé
3. $(\text{période})^2/(\text{grand axe})^3$ pour toutes les planètes

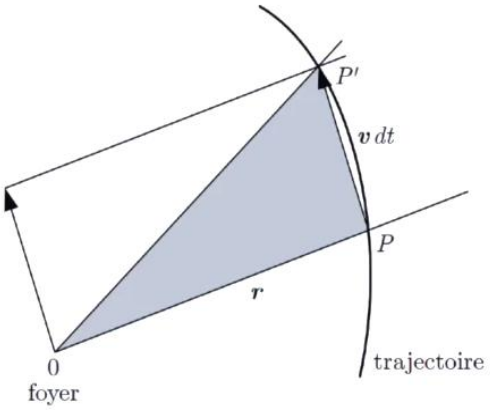
Das dritte keplersche Gesetz sagt uns. Also die Periode enstpricht der benötigten Zeit, um einmal den Orbit zu durchlaufen. Die grosse Achse ist diese Länge hier. Also der Quotient von Periode und dritter Potenz der grossen Achse besitzt denselben Wert für alle Planeten.

Notes

Summary

3m 44s

Loi des aires



$$dA = \text{aire}(OPP') = \frac{1}{2} rv\, dt \sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$

Mouvement dans un plan :

$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$ toujours dans la même direction.

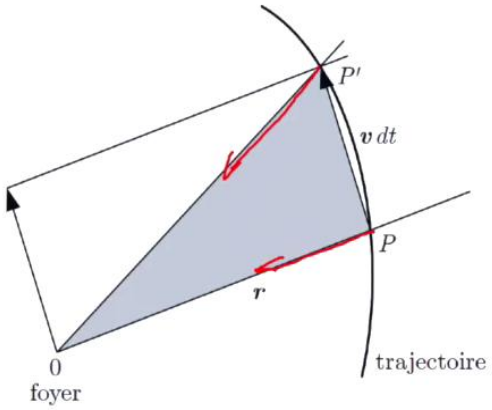
Also beginnen wir damit, den Flächensatz zu analysieren. Ich stelle mir vor, ein Element der Trajektorie, der Brennpunkt, der Vektor OP und der Radiusvektor, welche eine Fläche überfährt. Ich werde die zurückgelegte Strecke zwischen der Zeit *t* und der Zeit *t* plus *dt* betrachten. Ich habe also eine infinitesimale Distanz. Ich habe eine infinitesimale Fläche. Um diese Fläche zu berechnen, welche ich *da* nenne werde, Dies ist äquivalent zu Fläche des Dreiecks O P P Strich. Dies habe ich hier notiert. Dies macht also ein Zweitel der Basis mal die Höhe, dies ist die Dreiecksformel. Ich mache also ein Zweitel von *r* mal die Höhe des Dreiecks. Man muss also den *sinus* dieser Winkel hier berechnen. Hier habe ich praktisch einen Winkel von 90 Grad gezeichnet. Jedoch ist es dieser Winkel hier, welcher in der Formel auftaucht. Ich habe also *vdt* mal diesen *sinus*, was mir die Höhe des Dreiecks ergibt. Voilà, die Formel für die Fläche. Da sich die Bewegung in einer Fläche abspielt, befinden sich die Vektoren *r* und *v* in eben dieser Fläche. Also *r* kreuzt *v* zeigt immer entlang der Normalen dieser Ebene.

Notes

Summary

4m 15s

Loi des aires



$$dA = \text{aire}\left(OPP'\right) = \frac{1}{2} rv\, dt \sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$

Mouvement dans un plan :

$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$ toujours dans la même direction.

1ère et 2ème loi de Kepler :

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v} = \frac{1}{2m}\boldsymbol{L}_O$$ « Vitesse aréolaire »

Moment cinétique constant :

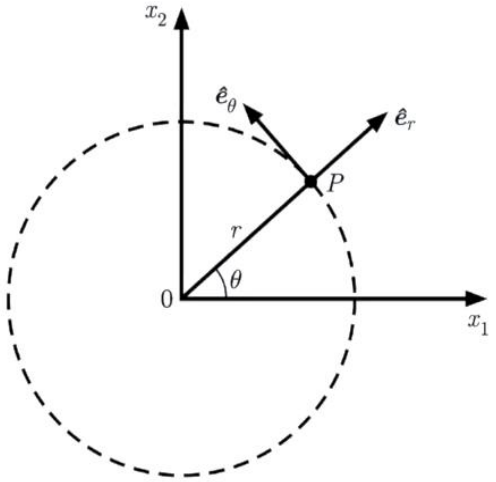
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}) = 0 = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \wedge \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a} \implies$$ Force « centrale »

Schreibt nur diese Formel hier auf. Ihr habt *r, v,* mal den *sinus* dieses Winkels zwischen *r* und *v*. Dies ist das Modul dieses Winkels hier. Das erste und zweite keplersche Gesetz implizieren also, dass ich den Vektor, welchen ich in der folgenden Art konstruieren kann, *r* kreuz *v* mit einem ein Zweitel schreiben kann, eine fixe Richtung besitzt Der Flächensatz sagt uns also, dass auch das Modul konstant ist. Dieser Vektor hier ist eine Konstante. Wir erkennen hier, abgesehen von einem Faktor zwei, den Drehimpuls wieder. Wir hätten *r kreuzt mv* für das Drehmoment. Dies nennt man die "vitesse aréolaire". Wenn der Drehimpuls konserviert ist, ist auch *r kreuzt mv* konserviert. Dies heisst, dass die Ableitung nach der Zeit null ist. Es hat zwei Terme. Der erste ergibt logischer- weise null. Der zweite Term ist *dv durch dt*, respektive *A*. Und *A* entspricht dem Term 1 durch *m* mal *F*. Wiri sehen also, dass der Flächensatz die Kollinearität von *r* und F impliziert. *r* ist also parallel zu F. Wir sagen also, dass F eine zentrale Kraft ist. Das heisst, dass die Kraft während der ganzen in den Brennpunkt, respektive zur Sonne gerichtet ist.

Notes

Summary

5m 47s



Référentiel : un groupe d'étoiles

Coordonnées 'polaires' (cylindrique dans le plan)

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

Ich werde nun die Kinematik dieses Punkts etablieren. Als Bezugssystem nehme ich eine weit entfernte Sterngruppe. Ich werde Polarkoordinaten verwenden. Dies sind einfach auf eine Ebene reduzierte zylindrische Koordinaten. Ich werde die folgende Notation verwenden. Ich wähle dem Bezugssystem zugehörige Achsen. Ich definiere einen Winkel *thêta* im Bezug zur Achse *x*1. Dieser Kreis hier ist die Koordinatenlinie, wenn *theta* variiert. *r* ist das Äquivalent zu *rho* bei den Zylinderkoordinaten. Ich habe zwei Einheitsvektor *er* und *e theta*, welche das zu diesem Koordinatensystem zugehörige Achsensystem bilden. Diese Resultate sind bereits bekannt. Den Positionsvektor notiere ich *r*. Dies ist einfach das Produkt aus der Koordinate *r* und *er*. Die Geschwindigkeit besitzt einen Term *r* Punkt und einen Term *r theta* Punkt. Die Beschleunigung entnehme ich der Formelsammlung. Ich muss nur ein bisschen die Notation verändern, welche in der Formelsammlung für die zylindrischen Koordinaten gewählt wurde.

Notes

Summary

7m 37s

Moment cinétique

$$\boldsymbol{L}_O = m r \boldsymbol{e}_r \wedge \left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z = L\boldsymbol{e}_z$$

Drücken wir nun den Drehimpuls in zylindrischen Koordinaten aus. Ich schreibe also das Kreuzprodukt der Vektoren *r* und *mv*. Das *m* ist hier. Hier haben wir *v* in Polarkoordinaten ausgedrückt. Der erste Term ergibt null. Der zweite Term ergibt *m r* im Quadrat *theta* Punkt. Dies alles in der Richtung des Kreuzprodukts zwischen *er* und *e theta*, welche ich *ez* nenne werde. Dies ist der zur Ebene senkrechte Einheitsvektor.

Notes

Summary

8m 53s

Moment cinétique

$$\boldsymbol{L}_O = m\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_r \wedge \left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z = L\boldsymbol{e}_z$$

$L = mr^2\dot{\theta}$ = constante

Mécanique | 2013 31

Und die Grösse *mr* im Quadrat *theta* Punkt werde ich als L notieren. L ist eine konstante, vergesst das nicht. Diese Konstante werden wir häufig verwenden. Sie ergibt eine Verbindung zwischen *r* und *theta* Punkt.

Notes

Summary

9m 27s

Equation du mouvement

Modèle de force

On procède en posant déjà :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (K > 0)$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2}$$

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

L

Schreiben wir nun die Bewegungsgleichungen. Um sehr strickt zu sein, müssten wir bei den keplerschen Gesetzen beginnen und beweisen, dass die Kraft von der Form eins durch *r* im Quadrat ist. Damit die Formeln eine explizitere Form besitzen, werden wir einfach annehmen, dass die Kraft von der Form eins durch *r* im Quadrat ist. Ich werde K positiv wählen. Die Kraft ist zu *er* entgegengesetzt. Sie ist also ins Zentrum gerichtet. Ich setze also eine anziehende Kraft mit einer Abhängigkeit von eins durch *r* im Quadrat voraus. Dies setze ich für meine Berechnungen voraus. Die Beschleunigung besitzt zwei Komponenten: eine in der Richtung *er* und eine entlang *e theta* Nur in der Richtung *er* ist eine Kraft vorhanden, da wir gezeigt haben, dass sich die Kraft radial auswirkt. Ich beginne nun meine Analyse. Das Erste worauf ich euch aufmerksam machen möchte, ist die Zweite Gleichung. Diese kann ich mit *r* multiplizieren. Ich habe diese zwei Terme hier. Wenn ihr ein bisschen genauer hinschaut, erkennt ihr, dass hier die zeitliche Ableitung des Terms *mr* im Quadrat theta Punkt vorhanden ist. Diesen haben wir L genannt, den Drehimpuls, respektive den Betrag des Drehimpulses.

Notes

Summary

9m 52s

Equation du mouvement

Modèle de force

On procède en posant déjà :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (K > 0)$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2}$$

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$m\left(\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2\right) = m\left(\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{m^2r^3}\right) = \frac{-K\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}\right) = 0$$

Also diese Gleichung hier impliziert die Erhaltung des Drehimpulses. Ich setzte den Wert von L hier ein. Denn nun schlage ich vor, diese Bewegungsgleichung zu nehmen und sie mit *r* zu multiplizieren. Ihr seht, dass *r* Punkt hier,hier,hier und hier auftaucht. Ich werde jetzt L verwenden, um theta Punkt im Quadrat durch eine von *r* abhängige Funktion zu ersetzen. Theta Punkt ist L durch *mr* im Quadrat. Also theta Punkt im Quadrat ist L Quadrt durch *m* im Quadrat mal *r* hoch vier. Es hat ein *r* hier. Es bleibt also nur ein *r* hoch drei übrig. Nun betrachte ich diese Gleichung und erkenne verschiedene Ableitungen wieder. Zum Beispiel ist *r* Punkt mal *r* Punkt Punkt die Ableitung nach der Zeit von einem Zweitel *r* Punkt im Quadrat. Dies habe ich hier aufgeschrieben. Hier haben wir eins durch *r* hoch drei. Dies ist die Ableitung von eins durch *r* im Quadrat. Wenn wir diesen Term nehmen und nach der Zeit ableiten, erhalten wir ein minus zwei, welches sich mit diesem zwei hier vereinfacht. *r* hoch minus drei mal *r* Punkt. Das *r* Punkt ist hier.

Notes

Summary

11m 11s

Equation du mouvement

Modèle de force

On procède en posant déjà :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (K > 0)$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2}$$

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$m\left(\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2\right) = m\left(\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{m^2r^3}\right) = \frac{-K\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}\right) = 0$$

Wenn ich diesen Term hier nach der Zeit ableite, werde ich ein eins durch *r* im Quadrat mal *r* Punkt erhalten. Ich wechsle diesen auf die andere Seite der Gleichung. Ich habe also ein minus *r* Punkt durch *r* im Quadrat. Ich habe also herausgefinden, dass dieser Term hier eine Konstante ist.

Notes

Summary

12m 41s

Constante du mouvement :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{K}{r} \quad = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{K}{r}$$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad V(r) = \int_r^\infty -\frac{K}{r'^2}dr' = K\left[\frac{1}{r'}\right]_r^\infty = \frac{-K}{r}$$

$\frac{-K}{r}$ est l'énergie potentielle.

E est l'énergie mécanique.

Ich fasse zusammen: Ich werde diesen Term hier E nennen, dies ist eine Konstante. Ich nennen ihn Energie, da ich hier die kinetische Energie wieder erkenne. Also auf Grund der Kohärenz der Einheiten kann ich darauf schliessen, dass dieser ganze Term hier die Energie ist. Wenn ich nun anstatt L im Quadrat *r* im Quadrat mal theta Punkt im Quadrat schreibe, erkenne ich sofort die *r*-Komponente und hier die *theta*-Komponente von *v* im Quadrat wieder. Es handelt sich also um eine kinetische Energie. Und dies hier muss die potentielle Energie sein. Wir können kontrollieren, ob dies die Kraft ist. Die Potentielle Energie entspricht der verrichteten Arbeit, um sich von dieser Position *r* zu einer Referenzposition hier zu bewegen. Ich werde diese Referenzposition im Unendlichen wählen. Ich sage also, dass sich das Nullpotential im Unendlichen befindet. Ich berechne die Arbeit dieser Kraft und dieses Integral ergibt mir: Eins durch *r*, also *r* Strich. Die Integrationsvariable nenne ich *r* Strich. Diese möchte ich in der Position *r* und im Unendlichen berechnen. Dies ergibt mir diesen Term hier. Also minus K durch *r* entspricht der potentiellen Energie. Dadurch repräsentiert E effektiv die mechanische Energie.

Notes

Summary

13m 05s

Trajectoire

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable : $q = \frac{1}{r}$ $\qquad \dot{r} = \frac{-1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dq}{d\theta}$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

Nun wechseln wir zur Frage der Trajektorie. Ich beginne mit dieser Bewegungsgleichung, ohne diese Bewegungskonstante, den Drehimpuls, zu vergessen. Ich mache einen Variabelwechsel. Ich muss euch sagen, dass die folgende Passage ad hoc ist. Es braucht kein spezifisches Wissen eine Gleichung zu entwickeln. Betrachten wir jedoch, was passiert, wenn wir diesen Variabelwechsel durchführen. Ich muss *r* Punkt Punkt berechnen. Wir werden dies Schritt für Schritt machen. Zuerst werden wir *r* Punkt berechnen. Hier nehme ich an, dass *r* dem Term eins durch *q* entspricht. *q* ist eine von theta abhängige Funktion. Und theta is eine Funktion von *t*. Ich habe also die Ableitung von eins durch *q*. Dies macht minus eins durch *q* im Quadrat. Wir müssen jedoch noch *q* nach theta und und theta nach der Zeit ableiten. Das letztere ist theta Punkt. Nun eins durch *q* im Quadrat, dies macht *r* im Quadrat. *r* im Quadrat theta Punkt, dies macht L durch *m*. Dies habe ich hier aufgeschrieben. Nun können wir *r* Punkt Punkt berechnen. Wir starten also von hier. Wir haben *d* im Quadrat *q* durch *d* theta im Quadrat mal theta Punkt.

Notes

Summary

14m 30s

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable : $q = \frac{1}{r}$ $\qquad \dot{r} = \frac{-1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dq}{d\theta}$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2}$$

Dies können wir schreiben als L durch *mr* im Quadrat oder L durch *m* mal *q* im Quadrat. Von dort kommt das *q* im Quadrat, welches hier ist. Nun müssen wir *r* Punkt Punkt hier einfügen. Los gehts. *m r* Punkt Punkt, dies macht L im Qudrat durch *m q* im Quadrat. Erlaubt mir diese Terme hier *q* Strich Strich zu nennen. Hier habe ich minus *m r*. r ist eins durch *q*. Theta punkt im Quadrat ist L im Quadrat durch *m* im Quadrat. *r* hoch vier macht *q* hoch minus vier. Dies alles ist gleich minus K mal *q* im Quadrat. Nun können wir die Farbe wechseln. Wir werden durch *q* im Quadrat dividieren. Hier habe ich ein *q* hoch drei. Es bleibt nur ein *q* übrig. Hier dividiere ich durch *q* im Qudarat. Hier werde ich das L im Quadrat setzen. Ich nehme es also hier und hier weg. Ich habe ein *m*, welches ich hierhin bringen werde. Dies erlaubt mir, diese zwei Terme wegzunehmen. Des Weiteren hat es überall Minuszeichen, welche ich wegnehme. Ich habe also die Bewegungsgleichung in *q*, welche die folgende Form hat: *d* im Quadrat *q* durch *d* theta im Quadrat plus *q* gleich K*m* durch L im Quadrat.

Notes

Summary

16m 00s

Trajectoire

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable : $q = \frac{1}{r}$ $\qquad \dot{r} = \frac{-1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dq}{d\theta}$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2} \qquad q = \frac{1}{r} = \frac{Km}{L^2} + C\cos(\theta + \theta_0)$$

Equation polaire d'une ellipse

Ich nehme an, dass ihr diese Bewegungs- gleichung, respektive Differentialgleichung bereits kennt. Ich lade euch ein, eine Pause zu machen, um darüber nachzudenken, wo ihr diese bereits angetroffen habt. Also diese Gleichung hier, ist jene eines harmonischen Oszillators, in welcher *q* der Position der masse entspricht. Theta repräsentiert die Zeit und anstatt hier den Term K durch *m* vorzufinden, haben wir eins. Hier haben wir einen konstanten Term. Bei der an einer Feder befestigten und sich im Gravitationsfeld befindenden Masse hatten wir auch einen konstante Term. Wir kennen also die Lösung für diese Gleichung hier. Die Lösung für *q* ist der konstante Term plus den harmonischen Term. Hier ist die Pulsation eins, da ich hier eins hatte. Ich habe zwei Bewegungskonstanten, respektive zwei Integrationskonstanten theta null und C, welche durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Ich schlage euch nun vor, ein Mathematikbuch zu konsultieren oder bei einem Mathematiker nachzufragen. Dadurch könnt ihr euch vergewissern, dass diese Gleichung hier, eins durch *r* eine Funktion von Theta, die Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten ist.

Notes

Summary

17m 46s

Trajectoire

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable : $q = \frac{1}{r}$ $\qquad \dot{r} = \frac{-1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dq}{d\theta}$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2} \qquad q = \frac{1}{r} = \frac{Km}{L^2} + C\cos(\theta + \theta_0)$$ Equation polaire d'une ellipse

Valeurs extrémales : $\frac{1}{r_1} = \frac{Km}{L^2} + C \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{Km}{L^2} - C \quad (C < Km/L^2)$

In einer Vorlesung zur Mechanik macht es keinen Sinn, dies genauer zu betrachten. Ich brauche nur eine kleine Sache. Wenn ich die Extremalwerte von *r*, respektive den kleinsten und grössten Wert von *r* finden möchte, muss ich den kleinsten und grössten Wert des Kosinus theta des anderen Terms nehmen. Wenn ich eine Zeichnung mache, habt ihr hier den Brennpunkt und hier ist der kleinste Wert von *r* *r*1. Hier befindet sich der grösste Wert von *r* *r*2. Was habe ich hier gemacht? Für *r*1 habe ich den Maximalwert des Kosinus betrachtet. Das heisst eins. Für den grössten Wert *r*2 muss ich den kleinstmöglichen Wert des Kosinus nehmen, also minus eins. Da *r*2 eine Distanz zum Brennpunkt darstellt, ist *r*2 ein positiver Wert. Wir haben also eine Kondition für C. Wir werden dies nicht im Detail betrachten, die Trajektorie entspricht jedoch einer Ellipse, wenn unser Objekt in der Nähe der sonne mit einer nicht allzu grossen Geschwindigkeit abgeschossen wird. Diese Bedingung hängt von der Anziehungskraft, der Masse des Objekts, welches losgeschossen wird und des Drehimpulses ab.

Notes

Summary

19m 23s

3ème loi de Kepler

(vitesse aréolaire) × (période) = aire de l'ellipse $\qquad \frac{L}{2m}T = \text{aire}$

$$\text{aire} = \int_0^T \frac{L}{2m}dt = \int_0^T \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(KM/L^2 + C\cos\theta)^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\pi\left(Km/CL^2\right)}{\left(\left(KM/CL^2\right)^2 - 1\right)^{3/2}}$$

Nun möchten wir das dritte keplersche Gesetz erkunden. Wir habe eine "vitesse aréolaire", welche konstant ist. Wenn wir diese mit der Periode multiplizieren, müssen wir die Fläche der Ellipse erhalten. Die "vitesse aréolaire" ist L durch zwei *m*. Die Periode werde ich T nennen. Dieses Produkt hier ergibt also die Fläche der Ellipse. Wir können auch anders vorgehen, um die Fläche der Ellipse zu bestimmen. Wir können das Integral von 0 bis T der "vitesse aréolaire" mal *dt*; berechnen. Diesen Term hier schreibe ich als *r* im Quadrt mal Theta Punkt. Nun mache ich einen Variabelwechsel. Ich verwende theta als Variabel, was von null bis zwei Pi variiert. Ich habe einen Zweitel *r* im Quadrat mal *d* theta. Dies ist das *r* von theta, welches dem für die Ellipse erhaltenen Resultat entspricht. Dieses Integral hier kann ein Computer oder ein Integrationsprogramm algebraisch lösen. Dadurch habe ich meine Lösung gefunden. Ich habe diese Formel in einen Integrator eingegeben und habe dieses Resultat hier erhalten. Nun erinnert ihr euch, dass das keplersche Gesetz die Periode im Quadrat und die grosse Halbachse hoch drei beinhaltet.

Notes

Summary

20m 53s

3ème loi de Kepler

(vitesse aréolaire) × (période) = aire de l'ellipse $\quad \frac{L}{2m}T = \text{aire}$

$$\text{aire} = \int_0^T \frac{L}{2m}dt = \int_0^T \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(KM/L^2 + C\cos\theta)^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\pi\left(Km/CL^2\right)}{\left(\left(KM/CL^2\right)^2 - 1\right)^{3/2}}$$

Grand axe : $\quad 2a = \frac{1}{\frac{Km}{L^2} - C} + \frac{1}{\frac{Km}{L^2} + C}$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Die grosse Halbachse werden wir 2*a* nenne und werden sie als *r*1 plus *r*2 berechnen. *r*1 und *r*2 habe ich zuvor aufgeschrieben. Voilà, hier sind sie ausgedrückt. Man muss jetzt ein bisschen Algebra betreiben, was nicht besonders interessant ist. Um diesen Term zu vereinfachen, verwenden wir diesen Term hier. Durch das Resultat für die Fläche erhalten wir das T im Quadrat durch *a* hoch drei, welches im dritten keplerschen Gesetz auftaucht. Auf fast magische Art vereinfacht sich alles. Nur diese Terme hier bleiben noch übrig. Es bleibt vier pi im Quadrat *m* durch K. Es macht überhaupt keinen Sinn, Zeit aufzuwenden, diese algebraische Details zu betrachten. Indem wir das machen, lernen wir nichts von der Mechanik.

Notes

Summary

22m 33s

Loi ‘universelle’

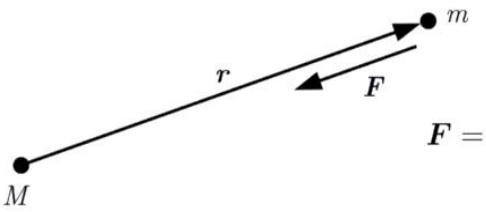
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Newton :
si c’est vrai pour toute planète :

$$K \propto m$$

Newton :
le soleil joue un rôle semblable à celui de la planète

$$K \propto M\,m$$



$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$G = 6.7\ 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Constante gravitationnelle

Mécanique | 2013 71

Nun wird es viel interessanter, da wir den Term T iim Quadrat durch *a* hoch drei gefunden haben. Das dritte keplersche Gesetz besagt, dass dieser Term T im Quadrat durch *a* hoch drei derselbe für alle Planeten ist. Die Planeten besitzen unterschiedliche Massen. Deswegen muss man K proportional zur Masse *m* des Planeten wählen. Newton macht eine sehr schöne Schluss- folgerung. Er sagt: Wenn diese Kraft, welche ich versuche zu charakterisieren, von der masse der Planeten abhängt, so muss diese Kraft wegen der Symmetrie auch von der Masse der Sonne abhängen. Er sagt also K ist proportional zu zwei Massen, der Masse der Sonne und der Masse des Planeten. Zum Schluss schreibt er dann. Ich zeige dies hier geometrisch. Ihr habt die Sonne hier, den Positionsvektor hier. Auf diese Art definiere ich einen Einheitsvektor. Ich habe eine Kraft K durch *r* im Quadrat, wo K eine Konstante ist, mal die beiden Massen. Dies nennt sich die Gravitationskonstante. Ich gebe euch ihren Wert hier. Wir haben also die Analyse dieses Problems beendet.

Notes

Summary

23m 30s