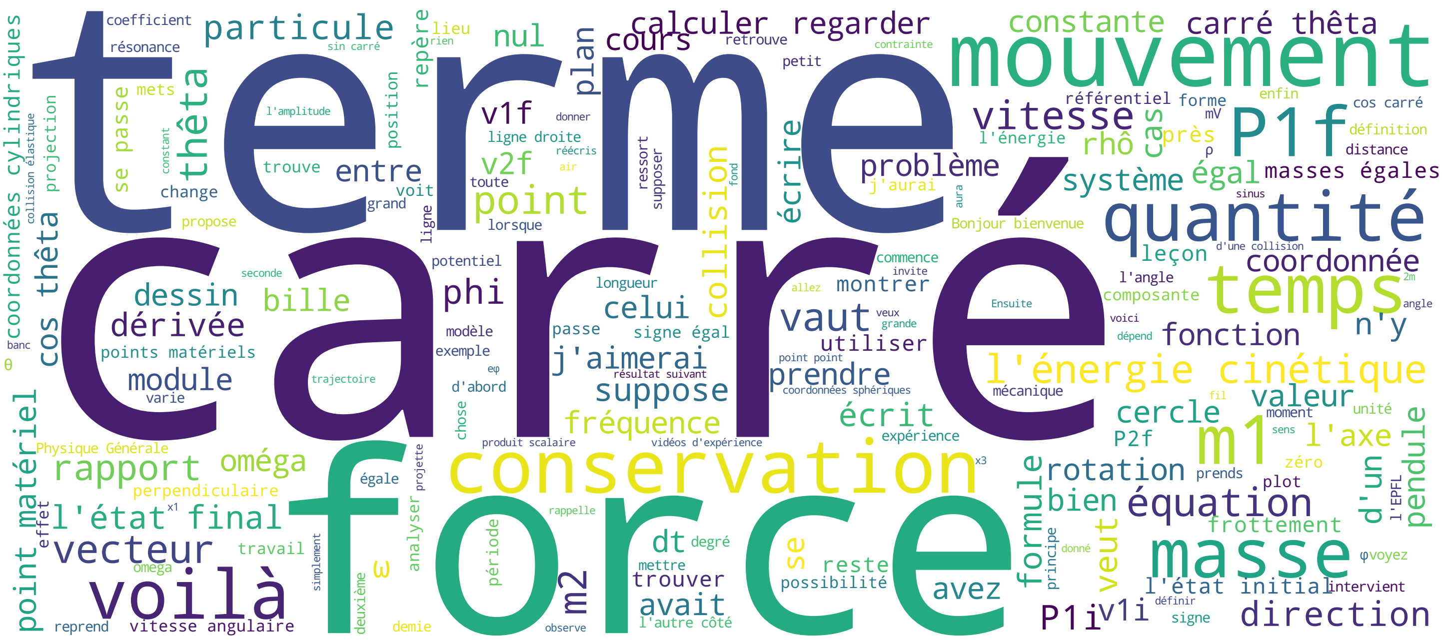
Analyse d'une collision élastique

Mécanique, cours 12.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-12



Search MOOC

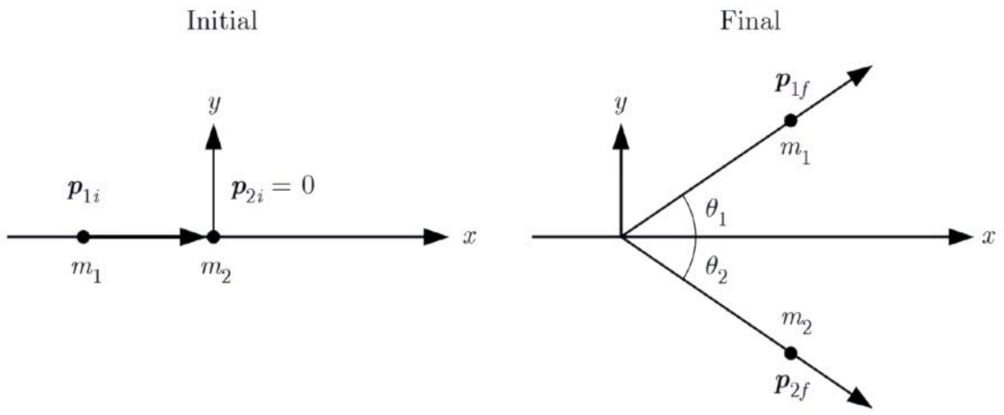
Video

Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Dans cette leçon, on apprend à analyser des collisions entre points matériels en utilisant la conservation de la quantité de mouvement et s'il y a lieu, la conservation de l'énergie cinétique. Dans ce module, je vais regarder exactement le deuxième cas, celui où on a également la conservation de l'énergie cinétique. On va regarder un problème dans le plan, on va appliquer les deux principes de conservation, on va regarder quelles conséquences ça a lorsque on a une collision qui a lieu dans le plan, par opposition à sur une ligne droite, comme un banc à air, on va regarder plutôt ce qui se passe pour une table à air. Ensuite, on va regarder le cas particulier de masses égales, il y a un très joli résultat qui sort lorsque les masses sont égales. Et enfin, on va analyser ce qu'on a vu sur les vidéos d'expériences, ce qui se passe sur une ligne droite.

Notes

Summary

0m 03s



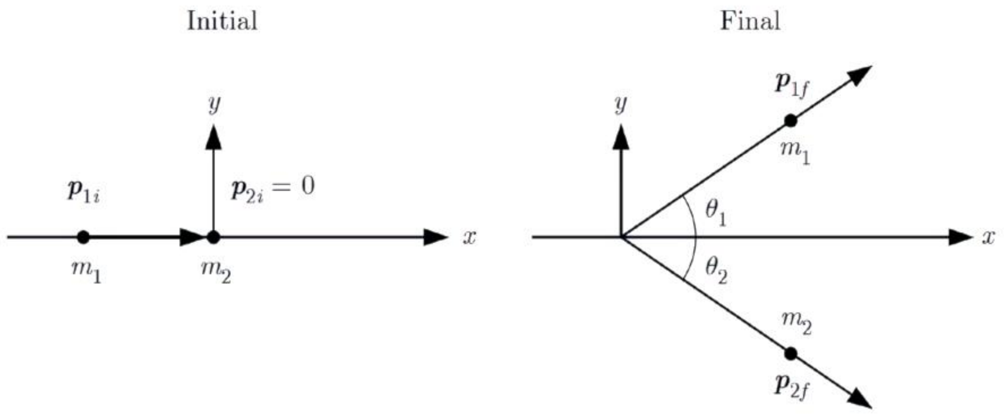
Alors, voilà un dessin, donc dans la logique de l'analyse d'une collision, on regarde l'état initial, l'état final. J'ai deux points matériels, une masse *m1*, une masse *m2*, voilà *m1* et *m2* dans l'état final. Dans l'état initial, je suppose que la masse *m2* est au repos dans le référentiel, et la masse *m1* fait une collision avec *m2*. Je me donne un système d'axes de coordonnées, qu'on retrouve avant et après la collision, j'aligne l'axe des *x* dans la direction de la quantité de mouvement de la particule incidente. Je note *P1i* la quantité de mouvement initiale de la particule 1, *P2i* donc qui est nul, la quantité de mouvement de la particule 2, dans l'état final j'ai *P1f*, *P2f*, et je vous rappelle qu'on fait l'hypothèse que dans l'état final, l'interaction mutuelle entre les deux particules est négligeable, donc ces deux points matériels ont un mouvement rectiligne uniforme et je donne cette direction du mouvement, par l'angle thêta 1 pour la masse *m1*, *thêta 2* pour la masse *m2*. J'ai donc, conservation de la quantité de mouvement parce qu'on suppose qu'il n'y a aucune force extérieure qui agit sur ces deux masses, et j'ai une conservation de l'énergie cinétique par hypothèse.

Notes

Summary

1m 09s

Principes de conservation



$$\boldsymbol{p}_{1i} + \boldsymbol{p}_{2i} = \boldsymbol{p}_{1f} + \boldsymbol{p}_{2f}$$
$$T_{1i} + T_{2i} = T_{1f} + T_{2f}$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit comme ceci, et ici, j'ai écrit la conservation de l'énergie cinétique où *T* est l'énergie cinétique pour la particule 1, pour la particule 2, dans l'état initial, dans l'état final. Je vais maintenant, ici j'ai deux équations parce que j'ai une équation vectorielle, je vais projeter cette équation-là sur l'axe des *x* et sur l'axe des *y*.

Notes

Summary

2m 50s

Choc élastique : calculs

$$p_{1i} = p_{1f} \cos\theta_1 + p_{2f} \cos\theta_2$$
$$0 = p_{1f} \sin\theta_1 - p_{2f} \sin\theta_2$$
$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

Quand je projette *P1f* sur l'axe des *x*, j'ai un *cos thêta 1* qui intervient, quand je projette *P1f* sur l'axe des *y*, j'aurai un *sinus thêta 1* qui intervient, ça donne le résultat suivant, voilà, vous avez les deux équations qui correspondent à la conservation de la quantité de mouvement, et ici, j'ai écrit la conservation de l'énergie cinétique, j'ai écrit *P* carré sur *2m* pour l'énergie cinétique, parce que une demie de *mV* carré, avec *P* qui vaut *mV*, cette énergie cinétique peut aussi s'écrire *P* carré sur *2m*. On peut supposer que *P1i* est une donnée expérimentale, et puis, ce qu'on aimerait connaître, c'est *P1f*, qui est le module de la quantité de mouvement *thêta 1* dans la direction de la particule, et la même chose pour la deuxième. On a donc quatre inconnues et ici, on a écrit trois équations. On ne va pas pouvoir résoudre complètement, mais ça c'est normal, parce que, l'existence de constantes du mouvement, restreint les possibilités de l'état final par rapport à l'état initial, mais si on ne dit rien sur l'interaction, on ne doit pas s'étonner qu'on ne puisse pas tout dire sur l'état final, faudrait quand même avoir un modèle de forces d'interaction pour arriver à conclure sur l'état final, pour des conditions initiales données.

Notes

Summary

3m 18s

Choc élastique : calculs

$$p_{1i} = p_{1f}\cos\theta_1 + p_{2f}\cos\theta_2 \longrightarrow (p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 = p_{2f}^2\cos^2\theta_2$$

$$0 = p_{1f}\sin\theta_1 - p_{2f}\sin\theta_2 \longrightarrow p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2\left(1-\cos^2\theta_2\right)$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

$$(p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 + p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2$$

$$p_{1f}^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 + p_{1i}^2\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

Mécanique | 2013 13

Donc, on ne s'étonne pas de cela. Alors, ce qu'on va faire, c'est qu'on va éliminer quelques variables, je vais commencer par éliminer *cosinus thêta 2*, alors ici j'ai un terme en *cos thêta 2*, je vais élever au carré, je passe ce terme-là de l'autre côté du signe égal, j'élève au carré; ici j'ai un *P2f cos thêta 2* au carré; ici, je peux passer ce terme de l'autre côté du signe égal, élevé au carré, et remplacer *sin carré thêta 2*, par *1 moins cos carré thêta 2*, c'est ce que j'ai fait ici. Maintenant, je peux sommer ces deux équations-là, ça me donne ceci, en effet ce terme-là, quand je fais l'addition, s'annule avec celui-là, ce terme-là, je le retrouve là, ce terme, il est là, et la parenthèse au carré, elle est là. Maintenant, je vais utiliser cette équation-là et celle-là, et éliminer *P2f* entre les deux. Alors, je vais développer ce carré, ça me donne ceci, on va voir...

Notes

Summary

4m 57s

Choc élastique : calculs

$$p_{1i} = p_{1f}\cos\theta_1 + p_{2f}\cos\theta_2$$
$$0 = p_{1f}\sin\theta_1 - p_{2f}\sin\theta_2$$
$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

$$\longrightarrow (p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 = p_{2f}^2\cos^2\theta_2$$

$$\longrightarrow p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2(1-\cos^2\theta_2)$$

$$(p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 + p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2$$

$$p_{1f}^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 + p_{1i}^2\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \left[\cos^2\theta_1 - \left(1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

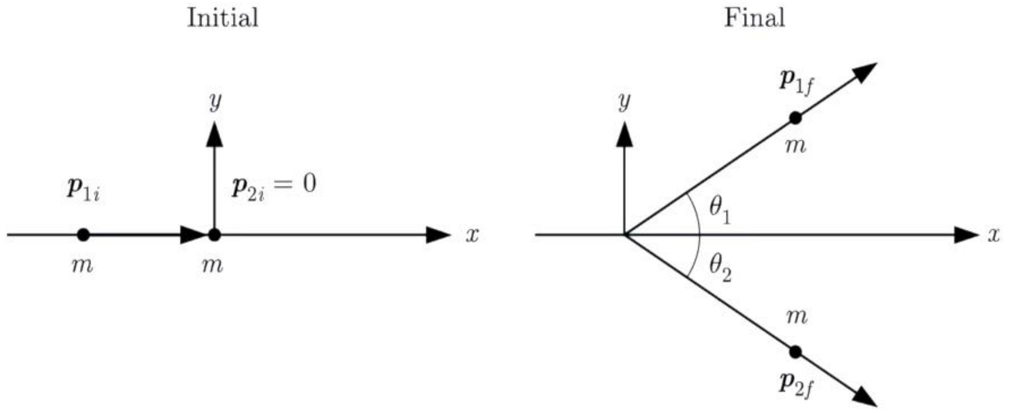
j'ai ce terme qui me donne le *P1i* au carré ici, là j'ai un *P1f* au carré avec un *cos carré thêta*, et là il y a le *sin carré thêta*, donc j'ai *P1f* au carré, c'est ce terme-là, j'ai le double produit, ici, de *P1i P1f cos thêta 1*, que j'ai écrit ici, et maintenant je vais prendre le *P2f* au carré, je vais le mettre de l'autre côté du signe égal, et j'observe de cette équation-là, que j'ai, moins *P2f* au carré, qui vaut *m2*, sur *m1*, et là il y a plus *P1f* au carré, et il y a moins *P1i* au carré. Ce terme ici, c'est celui-là, et ce terme-là, il est là. Donc j'ai rendu compte de tous les termes. J'observe maintenant, que j'ai ici une équation en *P1f* carré, *P1f*, terme indépendant de *P1f*. Je peux d'ailleurs diviser par *P1i* au carré, pour avoir ici *P1f* sur *P1i*, le rapport au carré; ici, j'aurais aussi *P1f* sur *P1i* et là un terme indépendant de *P1f* sur *P1i*, j'utilise la formule binôme du second degré, et voilà, je trouve *P1f* sur *P1i* qui vaut donc *v1f* sur *v1i*, qui est écrit comme ceci.

Notes

Summary

6m 12s

Choc élastique : masses égales



$$\boldsymbol{v}_{1i} = \boldsymbol{v}_{1f} + \boldsymbol{v}_{2f} \longrightarrow \boldsymbol{v}_{1i}^2 = \boldsymbol{v}_{1f}^2 + \boldsymbol{v}_{2f}^2 + 2\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f}$$

$$\boldsymbol{v}_{1i}^2 = \boldsymbol{v}_{1f}^2 + \boldsymbol{v}_{2f}^2$$

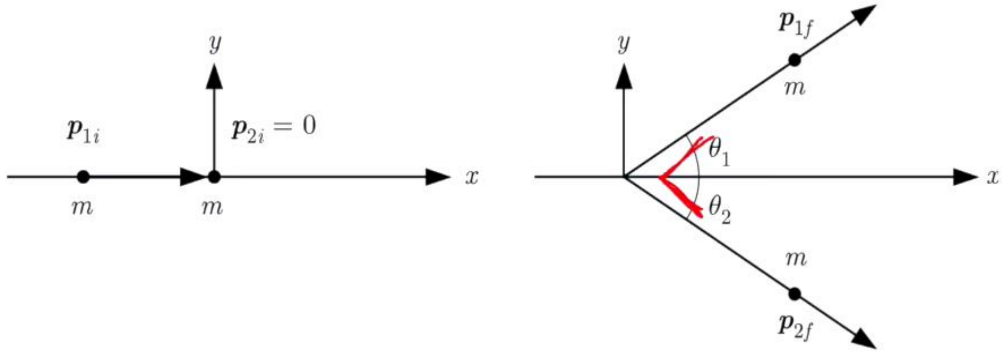
$$\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f} = 0$$

J'aimerais maintenant montrer un cas intéressant, parce qu'il est plus simple du point de vue mathématique, c'est le cas de masses égales. Alors, je reprends, mon même schéma d'analyse d'une collision, j'ai un état initial, un état final, j'ai la même notation, simplement je suppose que j'ai des masses égales. Maintenant, la conservation de la quantité de mouvement s'exprime simplement comme ceci, puisqu'on a *m* devant tous les *v*, donc je peux simplifier par *m*, donc ça c'est l'expression de la conservation de la quantité de mouvement. Et pour la conservation de l'énergie cinétique, qui est supposé être le cas, qu'on suppose qu'on a une collision élastique, on a ici, l'énergie cinétique avant, fois 2 et divisé par *m*, même chose là, après; et maintenant si je prends ce terme-là, je l'élève au carré, j'ai tous ces termes. Et maintenant, je fais appel à la conservation de l'énergie cinétique, ce qui me permet d'éliminer ces trois termes, il ne me reste que ce terme-là, j'ai donc le résultat suivant : *v1f* et *v2f* sont perpendiculaires, produit scalaire est nul, ça veut dire que les deux vecteurs sont perpendiculaires.

Notes

Summary

8m 11s



$$\boldsymbol{v}_{1i} = \boldsymbol{v}_{1f} + \boldsymbol{v}_{2f} \longrightarrow \boldsymbol{v}_{1i}^2 = \boldsymbol{v}_{1f}^2 + \boldsymbol{v}_{2f}^2 + 2\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f}$$

$$\boldsymbol{v}_{1i}^2 = \boldsymbol{v}_{1f}^2 + \boldsymbol{v}_{2f}^2$$

$$\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f} = 0$$

Donc contrairement à l'allure de mon dessin, en fait, ce que je viens de trouver, c'est que là, il y a un angle droit. La prochaine fois que vous jouez au billard, vous verrez que les deux balles, après la collision, s'échappent à peu près à 90 degrés.

Notes

Summary

9m 37s

Choc élastique : sur une ligne droite

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \left[\cos^2\theta_1 - \left(1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$\theta_1 = 0 \implies$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{1 \pm \sqrt{1-\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2}}\right\} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1+m_2} \begin{cases} 1 \\ \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \end{cases}$$

Mécanique | 2013 25

Maintenant, je vais analyser le choc élastique lorsqu'on est sur une ligne droite, je reprends la formule qu'on a obtenue dans le cas plan, où on avait *costhêta 1*, maintenant on suppose qu'on est sur un banc à air, donc qu'il y a une contrainte, qui fait que *thêta 1* est toujours nul. Alors je réécris la formule avec *cos thêta 1* qui vaut 1, ça me donne immédiatement ceci, ici, si je mets au même, ce terme-là, je peux l'écrire comme *m2* au carré, sur *m1* au carré, et je dois en prendre la racine carrée, donc en fait j'ai *m2*, sur *m1*, et puis j'ai 1 plus ou moins ça, que je peux écrire comme *m1*, plus ou moins *m2*, sur *m1*, et maintenant ce *m1* au dénominateur et celui-là s'annulent et il me reste ce que j'ai annoncé ici. J'ai donc deux possibilités, si je prends sin plus, j'ai 1, 1 ça veut dire *v1f* égal *v1i*, donc ça veut dire que la particule 1, passe à travers la collision, sans que rien ne lui arrive, ça veut dire au fond qu'il n'y a pas eu de collision, ce sont toutes nos manipulations algébriques qui ont introduit cette solution, qui n'est pas exclue, sur la base des principes qu'on s'est donnés, sans rien savoir sur la forme de l'interaction.

Notes

Summary

9m 55s

Choc élastique : sur une ligne droite

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \left[\cos^2\theta_1 - \left(1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$\theta_1 = 0 \implies$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{1 \pm \sqrt{1-\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2}}\right\} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1+m_2} \quad \begin{cases} 1 \\ \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \end{cases}$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \qquad \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2}v_{1i}^2\left(1-\frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}\right) = \frac{m_1}{m_2}v_{1i}^2\left(1-\frac{(m_1\pm m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}\right) \quad \begin{cases} 0 \\ v_{2f} = \dfrac{2m_1}{(m_1+m_2)}v_{1i} \end{cases}$$

Mécanique | 2013 30

Et la deuxième solution, la solution non triviale, c'est celle-ci, maintenant j'ai donc *v1f*en fonction du *v1i*, j'aimerais avoir *v2f*, pour ce faire, je peux utiliser la conservation de l'énergie cinétique, que je réécris ici de façon habituelle, et je vais écrire *v2f*, en fonction de *v1f*sur *v1i*, comme ceci. Je peux écrire *v2f*, il y a un *m1* sur *m2*, fois *v1i* au carré, je le mets en évidence et j'ai ce rapport qui est là, qui m'était donné là. Je substitue cette valeur là-dedans, ça me donne ceci, il y a deux possibilités, parce que là j'ai plus ou moins, le plus me donne le 0, donc à *v1* à la vitesse de la particule 1 qui ne change pas, j'ai la particule 2 qui ne change pas non plus, donc c'est vraiment le cas de 0 collision; et sinon pour le cas non trivial, dans le cas de la vitesse 1, pour la vitesse 2, je trouve cette formule-là, qui est particulièrement intéressante si on regarde le cas *m1* égal *m2*, si *m1* égal *m2*, ici on aura 0, donc on va trouver *v1f* est nul, et ici, si *m1* égal *m2*, on va avoir *v2f* égal *v1i*.

Notes

Summary

11m 46s

Choc élastique : sur une ligne droite

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \left[\cos^2\theta_1 - \left(1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$\theta_1 = 0 \implies$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{1 \pm \sqrt{1-\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2}}\right\} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1+m_2}$$

$$1$$

$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \qquad \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

$$v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2}v_{1i}^2\left(1-\frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}\right) = \frac{m_1}{m_2}v_{1i}^2\left(1-\frac{(m_1\pm m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}\right)$$

$$0$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1+m_2)}v_{1i}$$

Mécanique | 2013 30

Ça c'est ce qu'on voit sur les vidéos d'expériences, en effet, si on s'arrange pour avoir une collision élastique avec des masses égales, ce qu'on observe c'est que le plot incident s'arrête, et c'est le plot qui était arrêté qui repart avec la vitesse du plan incident, c'est cette formule-là.

Notes

Summary

13m 21s