Analyse d'une collision élastique

Mécanique, cours 12.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-12

Analyse d'une collision élastique

- Principes de conservation
- Dans un plan
- Masses égales
- Sur une ligne droite

Mécanique | 2013 6

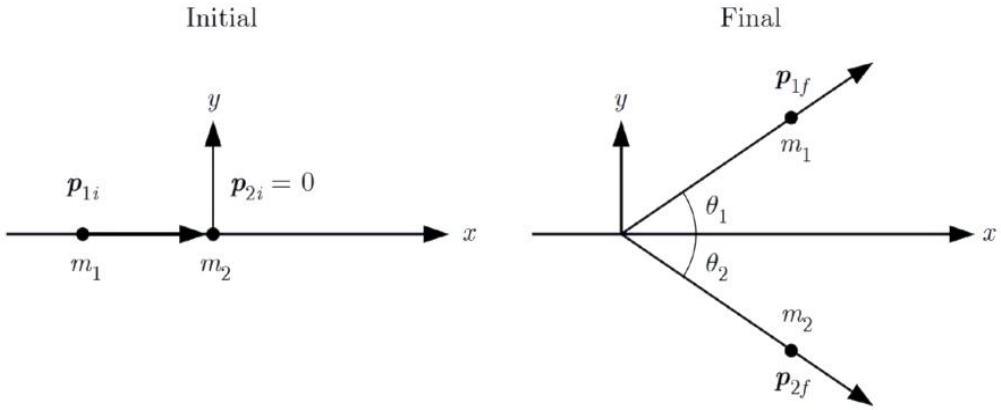
Hallo, willkommen zur Vorlesung "Allgemeine Physik" der EPFL. In dieser Lektion lernen wir Zusammenstösse zwischen Massepunkten zu analysieren mit Hilfe der Erhaltung des Impuls und wenn es sie gibt, der Erhaltung der kinetische Energie. Hier werden wir den zweiten Fall anschauen, wo die kinetische Energie auch erhalten wird. Die Situation ist zweidimensional. Wir werden beide Erhaltungsprinzipien einsetzen, und schauen was es für Konsequenzen gibt wenn der Stoss auf einer Ebene statt einer Linie geschieht. Unsere Luftkissenbahn wird jetzt durch einen Luftkissentisch ersetzt. Dann betrachten wir den Fall mit gleichen Massen. Es gibt ein sehr schönes Ergebnis wenn die Massen gleich sind. Am Ende analysieren wir was wir schon in den Videos gesehen haben, nämlich was auf einer Gerade passiert.

Notes

Summary

0m 03s

Principes de conservation



$$\boldsymbol{p}_{1i} + \boldsymbol{p}_{2i} = \boldsymbol{p}_{1f} + \boldsymbol{p}_{2f}$$
$$T_{1i} + T_{2i} = T_{1f} + T_{2f}$$

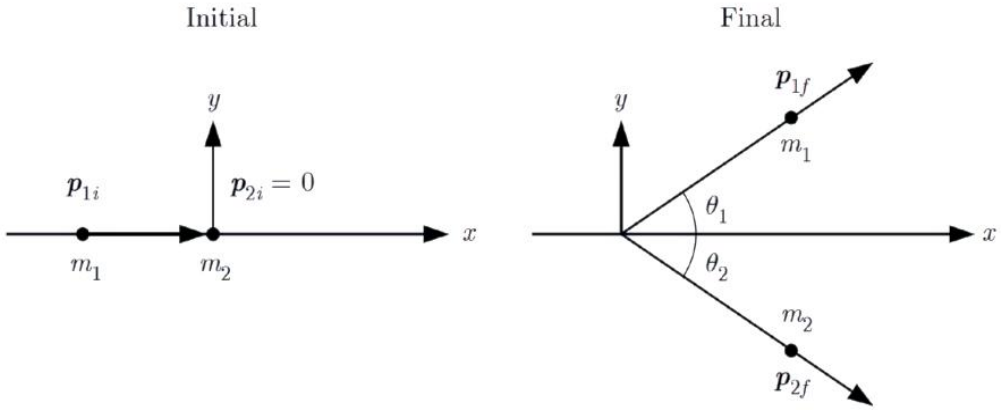
Hier ist ein Schema der Situation. Wir behalten dieselbe Logik für Zusammenstösse : wir betrachten den Anfangszustand und der Endzustand. Ich habe zwei Massepunkte, eine Masse m1, eine Masse m2. Da sind m1 und m2 im Endzustand. Im Anfangszustand behaupte ich, dass m2 im Ruhezustand ist in meinem Bezugssystem, und die Masse m1 stosst mit m2 zusammen. Ich definiere ein Koordinatensystem, welches man vor und nach dem Stoss benutzen kann, ich definiere x in die Richtung des zukommenden Impuls. P1i ist der initiale Impuls der Partikel 1, P2i ist null, , der Impuls für Partikel 2. Am Ende habe ich P1f, P2f, und ich erinnere Sie daran, dass wir behauptet haben, die Interaktion zwischen den Partikeln sei im Anfangszustand vernachlässigbar. Beide Punkte machen eine geradlinige, gleichförmige Bewegung. Diese Richtung beschreibe ich mit dem Winkel Theta 1 für die Masse m1, theta 2 für m2. Der Impuls wird erhalten weil man davon ausgeht, dass keine externe Kraft auf die Massen wikrt. Ich habe auch behauptet, dass die kinetische Energie erhalten wird. Die Impulserhaltung lässt sich so ausdrücken, und hier habe ich die Erhaltung der kinetische Energie geschrieben.

Notes

Summary

1m 09s

Principes de conservation



$$\boldsymbol{p}_{1i} + \boldsymbol{p}_{2i} = \boldsymbol{p}_{1f} + \boldsymbol{p}_{2f}$$
$$T_{1i} + T_{2i} = T_{1f} + T_{2f}$$

T ist die kinetische Energie für die Partikel 1, für die Partikel 2, im Anfangszustand, im Endzustand. Ich habe hier zwei Gleichungen weil dies Vektoriell ist. Ich projiziere sie auf x und y. Bei der Projektion von P1f auf x entsteht einen cos Theta 1, bei der Projektion von P1f auf y ist es einen sin Theta 1.

Notes

Summary

2m 58s

Choc élastique : calculs

$$p_{1i} = p_{1f}\cos\theta_1 + p_{2f}\cos\theta_2 \longrightarrow (p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 = p_{2f}^2\cos^2\theta_2$$
$$0 = p_{1f}\sin\theta_1 - p_{2f}\sin\theta_2 \longrightarrow p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2(1-\cos^2\theta_2)$$
$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

Das Resultat sieht so aus, voilà. Hier stehen beide Gleichungen für die Impulserhaltung und hier steht die Energieerhaltung. Ich habe P Quadrat durch 2m geschrieben, weil mv Quadrat durch zwei mit P gleich mv, sich auch so ausdrücken lässt : P Quadrat durch 2m. Wir behaupten, dass P1i gemessen werden kann. Was wir wollen ist P1f, also die Norm des Impuls, theta1 und dasselbe für die zweite Partikel. Es sind also vier Unbekannten und da stehen drei Gleichungen. Wir können also das Problem nicht komplett lösen aber das geht in Ordnung : dass manche Grössen bei der Bewegung konstant bleiben, heisst, dass die Endzustand Möglichkeiten beschränkt sind aber wenn man über die Interaktion nichts sagt, dann ist es nicht erstaunlich, dass man nicht alles vom Endzustand wissen kann. Man müsste ein Model für die Interaktionskräfte haben um für bestimmte Anfangsbedingungen einen Endzustand haben. Dies überrascht uns also nicht. Was wir jetzt machen, ist manche Unbekannten herauszunehmen. Nehmen wir zuerst das cos Theta 2. Hier habe ich so einen cos Theta 2 Term. Ich nehme das Quadrat. Diesen Term nehme ich auf diese Seite. Hier nehme ich das Quadrat. Da ist ein P2f cos Theta 2 Quadrat.

Notes

Summary

3m 28s

Choc élastique : calculs

$$p_{1i} = p_{1f}\cos\theta_1 + p_{2f}\cos\theta_2 \qquad 0 = p_{1f}\sin\theta_1 - p_{2f}\sin\theta_2$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

$$(p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 = p_{2f}^2\cos^2\theta_2$$

$$p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2(1-\cos^2\theta_2)$$

$$(p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 + p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2$$

$$p_{1f}^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 + p_{1i}^2\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$-p_{2f}^2 = \frac{m_2}{m_1}\left(p_{1f}^2 - p_{1i}^2\right)$$

Dieser Term schocke ich auf die andere Seite der Gleichung, hoch zwei, und sin Theta 2 hoch zwei durch 1 minus cos Theta 2 Quadrat ersetzen. Dies habe ich hier gemacht. Nun kann ich die Summe von den Gleichungen nehmen. Und jetzt habe ich das hier. Wenn ich sie zusammenzähle, wird dieser Term durch diesen aufgehoben, dieser finde ich erneut da, dieser Term ist hier, und die Klammeren hoch zwei sind da. Jetzt brauche ich diese Gleichung hier und diese da um P2f herauszunehmen. Ich nehme das hoch zwei, dieser Term gibt mir P1i hoch zwei da, da habe ich ein P1f Quadrat mit einem cos Theta hoch zwei, und da ist der sin Theta Quadrat. Ich habe also P1f Quadrat : dieser Term, den Produkt von P1i P1f cos Theta 1 steht da, und jetzt nehme ich P2f hoch zwei. Ich nehme es auf die andere Seite der Gleichung und stelle fest, dass ich bei dieser Gleichung minus P2f hoch zwei gleich m2 durch m1 habe, und da ist plus P1f hoch zwei und minus P1i Quadrat. Dieser Term ist dieser da, und der da ist der da. Ich habe also alle Terme. Hier habe ich eine Gleichung mit P1f Quadrat, P1f ein Term der von P1f nicht abhängt.

Notes

Summary

5m 20s

Choc élastique : calculs

$$p_{1i} = p_{1f}\cos\theta_1 + p_{2f}\cos\theta_2 \quad \longrightarrow \quad (p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 = p_{2f}^2\cos^2\theta_2$$

$$0 = p_{1f}\sin\theta_1 - p_{2f}\sin\theta_2 \quad \longrightarrow \quad p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2(1-\cos^2\theta_2)$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

$$(p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 + p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2$$

$$p_{1f}^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 + p_{1i}^2\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \left[\cos^2\theta_1 - \left(1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

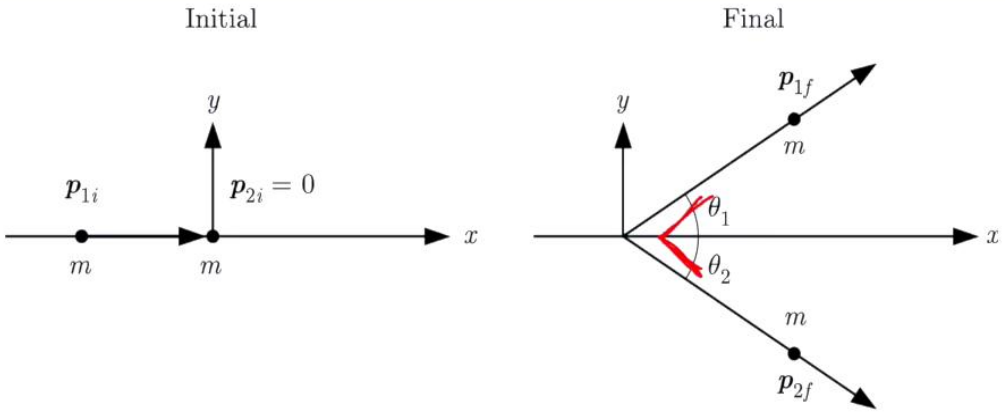
Ich kann hier alles durch P1i Quadrat teilen, um hier P1f durch P1i zu haben, das Verhältnis hoch zwei; hier habe ich auch P1f durch P1i und da ein Term unabhängig von P1f durch P1i. Ich benutze den binomische Lehrsatz und voilà, ich finde P1f durch P1i gleich v1f durch v1i, so ausgedrückt.

Notes

Summary

7m 42s

Choc élastique : masses égales



$$\boldsymbol{v}_{1i} = \boldsymbol{v}_{1f} + \boldsymbol{v}_{2f} \longrightarrow \boldsymbol{v}_{1i}^2 = \boldsymbol{v}_{1f}^2 + \boldsymbol{v}_{2f}^2 + 2\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f}$$

$$\boldsymbol{v}_{1i}^2 = \boldsymbol{v}_{1f}^2 + \boldsymbol{v}_{2f}^2$$

$$\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f} = 0$$

Nun möchte ich den interessanten Fall besprechen, weil es mathematisch einfacher ist. Nehmen wir an, die Massen sind gleich. Ich benutze immer dasselbe Schema um meine Analyse durchzuführen : ich habe einen Anfangszustand, einen Endzustand, dieselbe Notation, nur sind die Massen jetzt gleich. Die Impulserhaltung wird einfach so ausgedrückt denn wir haben m vor allen v und deshalb verschwinden alle m. Dies ist also der Ausdruck der Impulserhaltung. Und für die Erhaltung der kinetischen Energie, welche wir ja behaupten in dem wir behaupten unser Stoss sei elastisch, haben wir die Energie zuvor mal 2 durch m, und dasselbe da, danach. Wenn ich jetzt diesen Term betrachte, das Quadrat nehme, dann habe ich alle Terme. Jetzt setze ich die Erhaltung der kinteischen Energie ein. Damit verschwinden diese drei Termen und es bleibt mir nur den Term da. Wir haben also folgendes : v1f und v2f sind orthogonal. Bzw. ihr Skalarprodukt ist null, also sind sie orthogonal. Meine Zeichnung stimmt hier also nicht ganz : was ich gerade festgestellt habe, ist dass da einen rechten Winkel ist. Sollten Sie einmal Billard spielen, dann würden Sie merken, dass die Kugeln mit zirka 90 Grad von einander wegkommen.

Notes

Summary

8m 13s

Choc élastique : sur une ligne droite

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \left[\cos^2\theta_1 - \left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$\theta_1 = 0 \implies$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}}\right\} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \quad \begin{cases} 1 \\ \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Jetzt analysiere ich den elastischen Fall wenn wir uns auf einer Linie befinden. Ich brauche erneut die Formel die wir für die Ebene gefunden haben, da hatten wir cos Theta 1. Nun behaupte ich, dass wir eine Luftkissenbahn haben und, dass damit Theta 1 immer null ist. Ich schreibe sie wieder mit cos Theta 1 gleich 1, welches mir sofort dies gibt. Dieser Term hier, kann ich so schreiben : m2 hoch zwei durch m1 hoch zwei, davon nehme ich die Wurzel, also habe ich m2 durch m1. Und ich habe 1 plus oder minus dies. Das kann ich so ausdrücken : m1 plus oder minus m2 durch m1, und jetzt heben sich dieses m1 am Nenner und dieses da, und da bleibt mir das hier. Ich habe also zwei Möglichkeiten. Nehme ich den plus, habe ich 1. Das entspricht v1f gleich v1i, anders gesagt, dass die Partikel 1 von dem Stoss nicht beeinflusst wird. Das heisst eigentlich, dass es gar keinen Stoss gibt. Dies ist eine Möglichkeit, die wir durch unsere Berechnungen gefunden haben, weil wir einfach die Prinzipien angeschaut haben, ohne zu erwähnen was die Interaktion wirklich ist. Die zweite Möglichkeit, weniger trivial, ist die hier. Jetzt habe ich v1f als Funktion von v1i. Ich möchte v2f kennen.

Notes

Summary

9m 55s

Choc élastique : sur une ligne droite

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \left[\cos^2\theta_1 - \left(1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$\theta_1 = 0 \implies$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{1 \pm \sqrt{1-\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2}}\right\} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1+m_2} \quad \begin{cases} 1 \\ \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \end{cases}$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \qquad \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2}v_{1i}^2\left(1-\frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}\right) = \frac{m_1}{m_2}v_{1i}^2\left(1-\frac{(m_1 \pm m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}\right) \quad \begin{cases} 0 \\ v_{2f} = \dfrac{2m_1}{(m_1+m_2)}v_{1i} \end{cases}$$

Dafür kann ich die kinetische Energie Erhaltung benutzen. Die schreibe ich hier. Und dann schreibe ich v2f als Funktion von v1f durch v1i, so. Ich kann schreiben, dass v2f, da ist ein m1 durch m2 mal v1i hoch zwei, dieser nehme ich hervor, und dann habe ich dieses Verhältnis da. Diesen Wert setze ich da ein, und dann haben wir dies. Es gibt zwei Möglichkeiten, weil da ein plus oder minus steht. Plus gibt mir 0, also v1, die Geschwindigkeit der Partikel 1 die unverändert bleibt. Partikel 2 verändert sich auch nicht. Dies ist also wirklich der Fall mit 0-Stoss. Die nicht triviale Möglichkeit, im Fall der Geschwindigkeit 1, für die Geschwindigkeit 2, finden wir diese Formel. Diese ist sehr interessant wenn man den Fall betrachtet in dem m1 gleich m2. Wenn m1 gleich m2, werden wir hier 0 haben. Wir finden also, dass v1f null ist, und hier, wenn m1 leich m2, v2f gleich v1i. Das ist was wir schon auf den Videos gesehen haben. Tatsächlich, wenn man einen elastischen Stoss mit gleichen Massen betrachtet, dann merkt man das der erste Gleiter anhält, und, dass der zweite mit derselbe Geschwindigkeit weiter prallt : das ist unsere Formel hier.

Notes

Summary

11m 56s