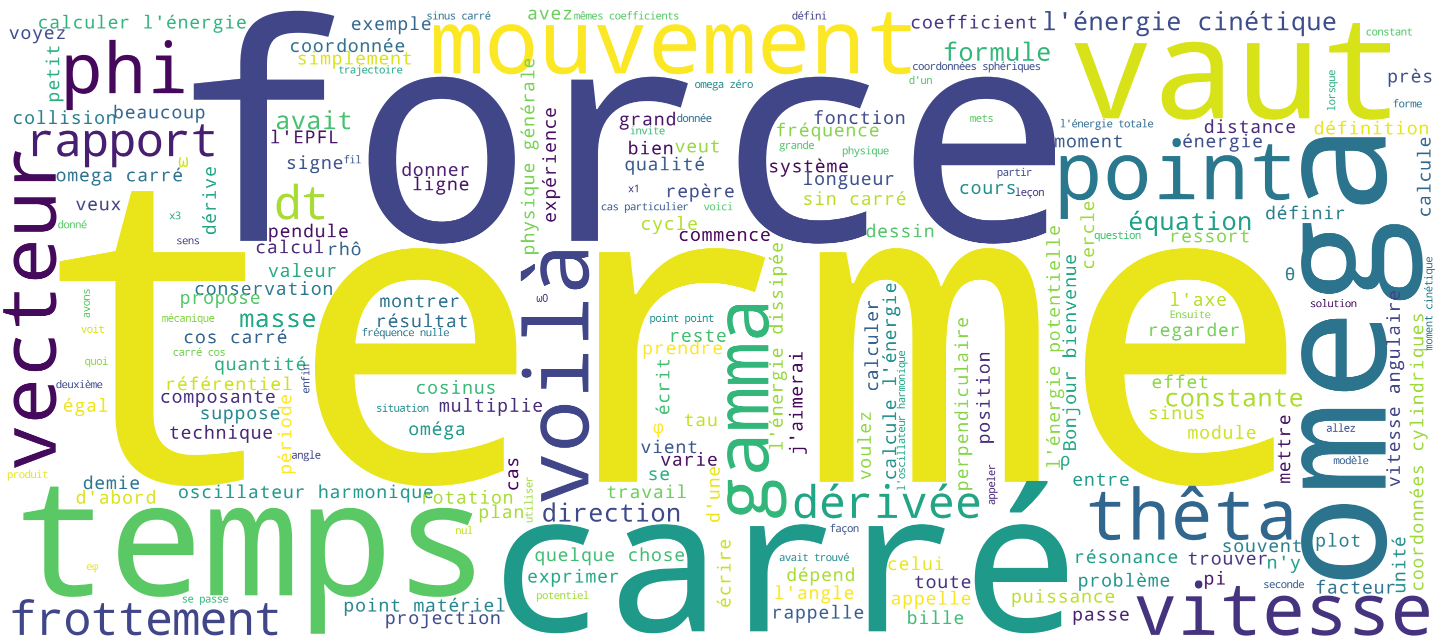
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-11

Energie de l'oscillateur harmonique

Mécanique, cours 11.2

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, j'introduis la notion d'énergie potentielle et de conservation de l'énergie. On va voir maintenant de quoi cela a l'air lorsqu'on regarde un oscillateur harmonique. Alors, je vais d'abord calculer l'énergie de l'oscillateur harmonique libre puis un oscillateur harmonique avec frottements. On regardera alors ce que dans la technique on appelle le *coefficient de qualité*.

Notes

Summary

0m 04s

Oscillateur harmonique sans amortissement :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

Mécanique | 2013 7

Je commence avec l'énergie d'un oscillateur harmonique lorsqu'il n'y a pas de frottements. Je suppose que j'ai donc quelque chose comme ceci.

Notes

Summary

0m 40s

Energie, sans amortissement

$\omega_0^2 = k/m$

Oscillateur harmonique sans amortissement :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

Vous avez un appui qui appartient au référentiel, un ressort, une masse et j'ai une coordonnée *x* qui décrit le mouvement de cet objet. J'ai donc trouvé qu'en l'absence d'amortissement, x a la forme d'un cosinus avec le omega 0 qui valait racine de k sur m quand ici j'ai k et omega zéro au carré qui vaut k sur m. Un petit rappel. Donc voilà le x, et maintenant je vais calculer l'énergie.

Notes

Summary

0m 53s

Energie, sans amortissement

Oscillateur harmonique sans amortissement :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie cinétique :

$$\dot{x} = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \Phi)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mC^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie potentielle :

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2\cos^2(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie mécanique :

$$E = \frac{1}{2}mC^2\omega_0^2 = \text{constante}$$

Mécanique | 2013 13

D'abord je vais calculer l'énergie cinétique, il me faut la vitesse, la dérivée du cosinus va me donner *moins* [-] le sinus avec un omega 0 Je calcule l'énergie cinétique, une demie de mx point *carré* [²]. Alors j'ai le sinus carré et un C carré omega 0 carré. Maintenant pour l'énergie potentielle on a vu que ça valait une demie de k x carré. Maintenant pour k, je vais écrire "m omega 0 carré". Encore une fois je peux écrire "k = m omega 0 carré". C'est ce que j'ai fait ici. Et maintenant, je calcule l'énergie totale qui vaut l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle. J'ai les mêmes coefficients devant les sinus carrés, les cos carrés, somme des sin carré cos carré donne 1. Il me reste l'énergie mécanique qui vaut une demie de m C carré omega zéro carré. Je calcule T+V. J'ai les mêmes coefficients ici et sin carré cos carré qui donne un. Donc voilà mon énergie et j'ai trouvé que l'énergie était en effet une constante, comme annoncé.

Notes

Summary

1m 36s

Energie, avec amortissement faible

Oscillateur harmonique faiblement amorti :

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= C\, e^{-\gamma t}\left\{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\right\} \\ &\cong C\, e^{-\gamma t}\left\{-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\right\}\end{aligned}$$

Je regarde maintenant l'oscillateur harmonique en présence d'amortissements, mais d'amortissements faibles. On avait trouvé une solution de la forme suivante. On avait un *e* puissance *moins gamma t* qui multipliait un cosinus. On avait omega 1 légèrement différent de omega 0. On peut avoir un déphasage. A partir de ce x, je calcule x point 1 pour calculer l'énergie cinétique. Alors, si je dérive, là j'ai le produit de deux termes, je vais me retrouver avec deux termes. Un terme quand je dérive e puissance *moins gamma t* j'ai le *moins gamma* qui apparaît fois le cosinus. Si je dérive le cosinus : *moins omega fois sinus*. Donc là, j'ai deux termes. Maintenant comme souvent en physique, on utilise ces équations pour exprimer un cas particulier. Le cas particulier que nous avons c'est que l'amortissement est faible. Je ne veux pas traîner avec moi tous ces termes sans au préalable exprimer le fait que je veux me mettre dans une situation physique où gamma est beaucoup plus petit que omega. Alors je le fais ici. J'ai un terme en gamma ici, j'ai un terme en omega ici. Omega 1 est voisin de omega 0 donc ce terme est beaucoup plus grand que celui-là.

Notes

Summary

3m 09s

Energie, avec amortissement faible

Oscillateur harmonique faiblement amorti :

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\dot{x} = C\, e^{-\gamma t}\{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$\cong C\, e^{-\gamma t}\{-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \cong \left[\frac{1}{2} mC^2\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \Phi) + \frac{1}{2} kC^2 \cos^2(\omega_1 t + \Phi)\right] e^{-2\gamma t}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} kC^2\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

Mécanique | 2013 20

Alors pour exprimer cette situation-là, de la vitesse, je ne vais garder que le terme en *sinus omega t*. Quand je calcule l'énergie totale, j'ai l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle. Et quand je fais le calcul, j'ai le terme qu'on vient de trouver ici en *C carré* omega *1 au carré* fois le *sin carré*. Et puis ici on a k fois *x carré*, j'ai écrit le *x carré* ici. Ça c'est simplement mon x carré avec la partie exponentielle que j'ai sortie. Maintenant, je vous rappelle une formule qu'on avait établie pour omega 1. Si gamma est beaucoup plus petit que omega 1, omega 1 est à peu près égal à omega 0 qui vaut racine de k sur m. Donc dans la formule ici, le omega 1 au carré, je vais le remplacer par k sur m. A ce moment-là, j'ai *fois m*. Donc il ne reste plus que le k fois C carré, c'est le même coefficient qu'on a ici. Et encore une fois, on se retrouve avec un sin carré et un cos carré. Je nettoie tout ça. Voilà le résultat qu'on obtient. Pour l'énergie qui maintenant dépend du temps. Il n'y a pas de contradiction, on a dit qu'on avait un oscillateur harmonique amorti. Donc maintenant, on a une force de frottement.

Notes

Summary

4m 37s

Energie, avec amortissement faible

Oscillateur harmonique faiblement amorti :

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\dot{x} = C\, e^{-\gamma t}\{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$\cong C\, e^{-\gamma t}\{-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \cong \left[\frac{1}{2} mC^2\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \Phi) + \frac{1}{2} kC^2 \cos^2(\omega_1 t + \Phi)\right] e^{-2\gamma t}$$

$$[2\gamma] = \frac{1}{6}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} kC^2\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

Mécanique | 2013 20

Comme je le disais tout à l'heure, dans l'autre module. une force de frottement n'est pas une force qui peut dériver d'un potentiel. Donc on n'a pas la constante de l'énergie exactement comme on s'attend à le trouver. Si on laisse osciller un oscillateur harmonique avec frottements, il va s'arrêter. Son énergie va tendre vers 0. C'est ce que j'ai obtenu ici. J'ai défini tau comme un sur *2 gamma*. Le *2 gamma* ici multiplie ce *2 gamma* ici, multiplie le temps, donc les unités de *2 gamma*, ça doit être un temps et ça on l'a écrit comme le tau. C'est le même tau qu'on avait dans la leçon précédente.

Notes

Summary

6m 15s

Facteur de qualité

$$Q = 2\pi \frac{(\text{énergie emmagasinée dans l'oscillateur})}{\text{énergie dissipée dans un cycle}}$$

$$\text{énergie emmagasinée dans l'oscillateur} = E \qquad E(t) = \frac{1}{2} kC^2 e^{-t/\tau}$$

$$\text{énergie dissipée dans un cycle} = \frac{2\pi}{\omega_1}\left|\frac{dE}{dt}\right| = \frac{2\pi}{\omega_1}\frac{1}{\tau}E \qquad \boxed{Q = \omega_1 \tau}$$

Maintenant, je peux définir le facteur de qualité. On définit dans la technique un facteur de qualité avec cette formule-là : *2 pi* fois l'énergie emmagasinée dans l'oscillateur divisée par l'énergie dissipée dans un cycle, pendant un cycle si vous voulez. Alors je vous rappelle, l'énergie c'est le E que je viens de trouver. Je vous rappelle ce que vaut E. Pour calculer l'énergie dissipée dans un cycle, on va dire que ça vaut ce terme-là : c'est quoi ça ? C'est la période fois *dE* sur *dt*. Vous avez une perte d'énergie par unité de temps ici, fois le temps; c'est pendant un cycle donc on multiplie par la période pour obtenir l'énergie dissipée dans un cycle. Or, si ceci c'est l'énergie, *dE* sur *dt* ça fait *1 sur tau* fois *E*. Donc *dE* sur *dt* vaut 1 sur tau fois E. J'ai le *2 pi* sur omega 1 pour la période. Si maintenant je mets cette énergie dissipée ici, l'énergie E là, les E se simplifient, il reste que le Q défini ici vaut omega 1 fois tau. Voilà un résultat qui est souvent utilisé dans le monde de la technique, Vous remarquez qu'il dépend du tau.

Notes

Summary

7m 06s

Facteur de qualité

$$Q = 2\pi \frac{(\acute{e}nergie\ emmagasin\acute{e}e\ dans\ l'oscillateur)}{\acute{e}nergie\ dissip\acute{e}e\ dans\ un\ cycle}$$

$$\acute{e}nergie\ emmagasin\acute{e}e\ dans\ l'oscillateur = E \qquad E(t) = \frac{1}{2}\,kC^2\,e^{-t/\tau}$$

$$\acute{e}nergie\ dissip\acute{e}e\ dans\ un\ cycle = \frac{2\pi}{\omega_1}\left|\frac{dE}{dt}\right| = \frac{2\pi}{\omega_1}\frac{1}{\tau}\,E \qquad Q = \omega_1\tau$$

Amplitude à la résonance $$\frac{\rho(\omega=\omega_0)}{\rho(\omega=0)} = \omega_0\tau \cong Q$$

Mécanique | 2013 28

Tau exprimait le temps sur lequel l'amplitude décroissait plus on a un oscillateur qui oscille librement pendant longtemps plus son facteur de qualité Q est grand. On peut reprendre la question de l'amplitude à la résonance. Voilà rho rapporté à la fréquence nulle, on avait trouvé que ça valait omega 0 fois tau Omega 0 n'est pas très différent de omega 1 donc ici ce qu'on vient de trouver c'est Q. On comprend pourquoi les gens appellent Q le facteur de qualité, parce qu'en effet ça nous dit à quel point l'oscillation sera amplifiée à la fréquence de résonance par rapport à ce qu'on aurait à une fréquence nulle. C'est donc bien quelque chose qui nous dit la qualité d'un résonateur.

Notes

Summary

8m 44s