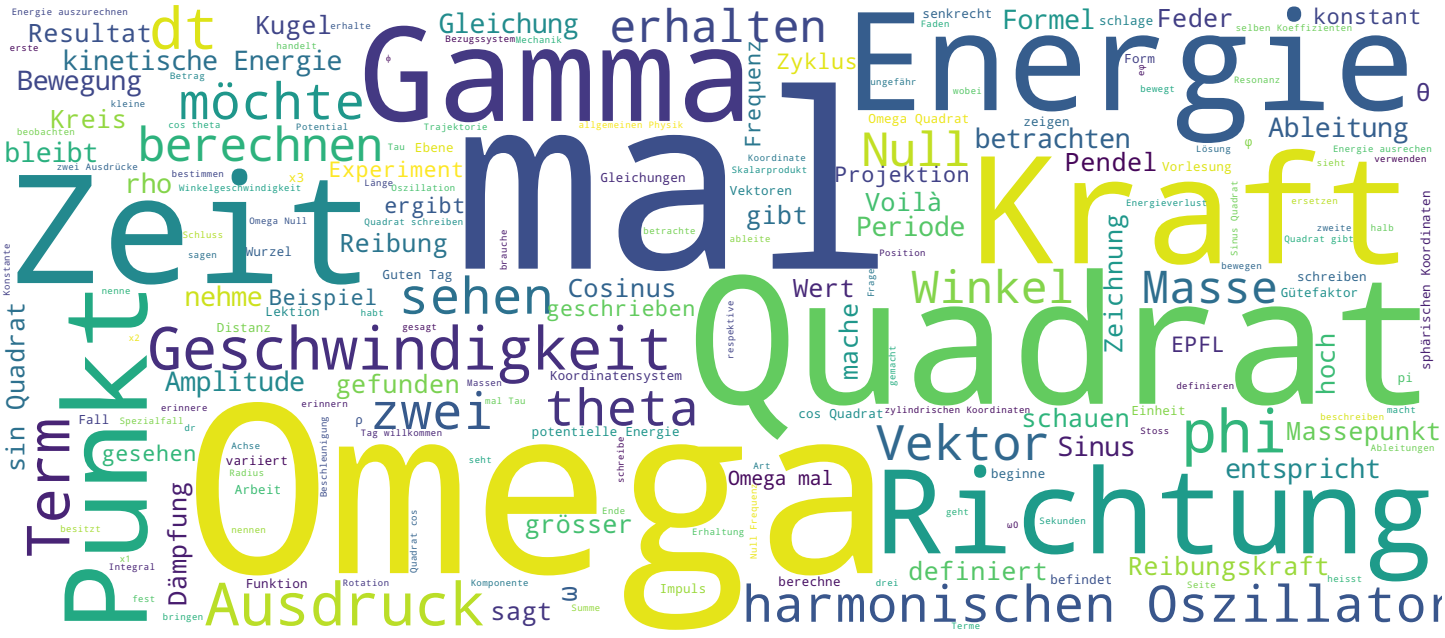
Energie de l'oscillateur harmonique

Mécanique, cours 11.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-11



Video

Energie de l'oscillateur harmonique

Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion führe ich den Begriff der potentiellen Energie und die Erhaltung der Energie ein. Wir werden jetzt sehen wie das aussieht im Beispiel eines harmonischen Oszillators. Nun, ich werde zuerst die Energie des freien harmonischen Oszillators berechnen und dann für einen harmonischen Oszillator mit Reibung. Wir schauen uns den sogenannten *Gütefaktor* an.

Notes

Summary

0m 04s

Energie, sans amortissement

Oscillateur harmonique sans amortissement :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

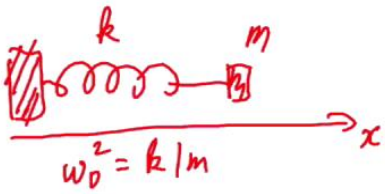
Ich fange mit der Energie eines harmonischen Oszillators an, bei dem es keine Reibung hat. Ich nehme also an, dass ich so etwas hier habe.

Notes

Summary

0m 40s

Energie, sans amortissement



Oscillateur harmonique sans amortissement :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

Wir haben eine Halterung die zum Bezugssystem gehört, eine Feder eine Masse und eine *x* Koordinate, welche die Bewegung des Objekts beschreibt. Ich weiss nun, dass, in Abwesenheit der Dämpfung, x die Form eines Cosinus mit Omega 0, welches Wurzel k über m ist, hat, wenn ich hier ein k und Omega Null im Quadrat habe, welche k über m ist. Eine kleine Erinnerung. Hier also das x und jetzt werde ich die Energie ausrechnen.

Notes

Summary

0m 53s

Energie, sans amortissement

Oscillateur harmonique sans amortissement :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie cinétique :

$$\dot{x} = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \Phi)$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mC^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie potentielle :

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie mécanique :

$$E = \frac{1}{2} mC^2\omega_0^2 = \text{constante}$$

Mécanique | 2013 13

Zuerst werde ich die kinetische Energie ausrechen, dazu brauche ich die Geschwindigkeit, die Ableitung des Cosinus gib *minus* [-] Sinus mit einem Omega 0. Ich berechne die kinetische Energie, ein halb mx Punkt *Quadrat* [²]. Nun habe ich Sinus Quadrat und C und Omega 0 Quadrat. Nun, für die potentielle Energie haben wir gesehen, dass sie gleich ein halb k x Quadrat ist. Jetzt anstelle von k werde ich "m Omega 0 Quadrat" schreiben. Ich kann "k=m Omega 0 Quadrat" schreiben. Dies habe ich hier gemacht. Und jetzt rechen ich die totale Energie aus, welche gleich der kinetischen plus die Potentielle Energie ist. Ich habe die selben Koeffizienten vor den Sinus Quadrat, den Cosinus Quadrat, die Summe der sin Quadrat cos Quadrat gibt 1. Es bleibt die mechanische Energie, welche gleich ein halb m C Quadrat Omega Null Quadrat ist. Ich berechne T+V. Ich habe die selben Koeffizienten hier und Sin Quadrat Cos Quadrat gibt eins. Hier also meine Energie und sie ist, wie vorhergesagt, konstant.

Notes

Summary

1m 36s

Energie, avec amortissement faible

Oscillateur harmonique faiblement amorti :

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \qquad \gamma \ll \omega_0$$
$$\dot{x} = C\, e^{-\gamma t}\{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$
$$\cong C\, e^{-\gamma t}\{-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

Ich schaue nun den harmonischen Oszillator mit Dämpfung, aber nur schwacher Dämpfung, an. Wir haben eine Lösung mit folgender Form gefunden. Wir hatten ein *e* hoch *minus Gamma t* mal einen Cosinus. Wir hatten auch Omega 1 leicht anders als Omega 0. Wir können eine Phasenverschiebung haben. Von diesem x ausgehen rechen ich x Punkt aus um die kinetische Energie auszurechnen. Wenn ich nun hier ableite, ich habe ein Produkt zweier Ausdrücke, so werde ich zwei Ausdrücke erhalten. Einen Ausdruck wenn ich e hoch *minus Gamma t* ableite, ich habe ein *minus Gamma t* mal den Cosinus. Wenn ich den Cosinus ableite: *minus Omega mal Sinus*. Ich habe also zwei Ausdrücke. Jetzt, wie so oft in der Physik, benützen wir diese Gleichungen um einen Spezialfall zu berechnen. Der Spezialfall den wir haben ist, dass die Dämpfung nur schwach ist. Ich möchte nicht alle diese Ausdrücke mit mir herumschleppen ohne vorher gebrauch gemacht zu haben, von dem Fakt, dass wir uns in einer physikalischen Situation befinden wo Gamma viel kleiner als Omega ist. Das mache ich hier. Ich habe einen Ausdruck mit Gamma hier, ich habe einen Ausdruck mit Omega hier.

Notes

Summary

3m 09s

Energie, avec amortissement faible

Oscillateur harmonique faiblement amorti :

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\dot{x} = C\, e^{-\gamma t}\{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$\cong C\, e^{-\gamma t}\{-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \cong \left[\frac{1}{2} mC^2\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \Phi) + \frac{1}{2} kC^2 \cos^2(\omega_1 t + \Phi)\right] e^{-2\gamma t}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} kC^2\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

Omega 1 ist nahe an Omega 0, daher ist dieser Ausdruck viel grösser als dieser da. Um nun diese Situation zum Ausdruck zu bringen, werde ich von der Geschwindigkeit nur den Ausdruck mit *Sinus Omega t* behalten. Wenn ich die gesamte Energie ausrechen, so habe ich die kinetische Energie plus die potentielle Energie. Und wenn ich die Rechnung mache, so habe ich den Ausdruck den wir gefunden haben mit *C Quadrat* Omega *1 im Quadrat* mal *sin Quadrat*. Und hier haben wir k mal *x Quadrat*, ich habe *x Quadrat* hier geschrieben. Dies ist einfach mein x Quadrat mit dem exponentiellen Teil den ich raus genommen hab. Jetzt erinnere ich euch an die Formel, die wir für Omega 1 aufgestellt haben. Wenn Gamma viel kleiner als Omgea 1 ist, Omega 1 ist ungefähr gleich Omega 0, welches gleich Wurzel k über m ist. In dieser Formel hier werde ich das Omega 1 im Quadrat mit k über m ersetzen. Jetzt habe ich *mal m* Es bleibt also nur noch das k mal C Quadrat über, es ist der selbe Koeffizient den wir hier haben. Un wir haben noch ein mal einen sin Quadrat und einen cos Quadrat. Ich säubere all das. Hier ist das Resultat. Für eine Energie, welche jetzt von der Zeit abhängt.

Notes

Summary

4m 32s

Energie, avec amortissement faible

Oscillateur harmonique faiblement amorti :

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\dot{x} = C\, e^{-\gamma t}\{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$\cong C\, e^{-\gamma t}\{-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \cong \left[\frac{1}{2} m C^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \Phi) + \frac{1}{2} k C^2 \cos^2(\omega_1 t + \Phi)\right] e^{-2\gamma t}$$

$[2\gamma] = \frac{1}{t}$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k C^2 e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

Es gibt hier keinen Widerspruch, wir haben gesagt, dass wir einen gedämpften harmonischen Oszillator haben. Nun haben wir eine Reibungskraft. Wie ich esch vorhin im anderen Modul gesagt habe. Eine Reibungskraft ist keine Kraft die sich aus einem Potential ableiten lässt. Die Energie ist also nicht konstant, wie wir das erwartet hätten. Wenn man einen harmonischen Oszillator mit Reibung schwingen lässt, so wird er stoppen. Seine Energie wird gegen 0 streben. Dies ist was wir hier erhalten haben. Ich habe Tau als eins über *2 Gamma <\i> definiert. Das 2 Gamma hier mal das 2 Gamma hier, mal die Zeit, als muss die Einheit von 2 Gamma eine Zeit sein und das habe ich als Tau geschrieben. Dies ist das selbe Tau, welches wir in der letzten Lektion schon hatten.*

Notes

Summary

6m 06s

Facteur de qualité

$$Q = 2\pi \frac{(\textit{énergie emmagasinée dans l'oscillateur})}{\textit{énergie dissipée dans un cycle}}$$

$$\textit{énergie emmagasinée dans l'oscillateur} = E \qquad E(t) = \frac{1}{2} kC^2 e^{-t/\tau}$$

$$\textit{énergie dissipée dans un cycle} = \frac{2\pi}{\omega_1} \left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{1}{\tau} E \qquad Q = \omega_1 \tau$$

Jetzt kann ich den Gütefaktor definieren. In der Technik definiert man den Gütefaktor mit der Formel: 2 pi mal die Energie, welche im Oszillator gespeichert ist, dividiert durch die Energie, welche in eine Zyklus verloren geht, während einem Zyklus, wenn ihr wollt. Ich erinnern: die Energie, das ist das E welches wir gefunden haben. Erinnert euch an den Wert von E. Um die, während einem Zyklus, verlorene Energie auszurechnen, sagen wir, dass es gleich diesem Ausdruck ist: Was ist das? Das ist die Periode mal dE über dt. Wir haben einen Energieverlust pro Zeiteinheit hier, mal die Zeit; das ist während einem Zyklus, daher multipliziert man mit der Periode um den Energieverlust eines Zyklus zu erhalten. Wenn nun dies die Energie ist, dann ist dE über dt gleich 1 über Tau mal E. Also ist dE über dt gleich 1 über Tau mal E. Ich habe 2 pi über Omega 1 für die Periode. Wenn ich nun den Energieverlust hier hin mache, die Energie da, dann kürzen sich die E's raus, es bleibt die Information, dass Q gleich Omega 1 mal Tau ist. Dies ist ein Resultat, welches sehr oft verwendet wird in der Technik. Ihr werdet feststellen, dass es von Tau abhängt.

Notes

Summary

7m 06s

Facteur de qualité

$$Q = 2\pi \frac{(\textit{énergie emmagasinée dans l'oscillateur})}{\textit{énergie dissipée dans un cycle}}$$

$$\textit{énergie emmagasinée dans l'oscillateur} = E \qquad E(t) = \frac{1}{2} kC^2 e^{-t/\tau}$$

$$\textit{énergie dissipée dans un cycle} = \frac{2\pi}{\omega_1} \left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{1}{\tau} E \qquad Q = \omega_1 \tau$$

Amplitude à la résonance $\qquad \dfrac{\rho(\omega = \omega_0)}{\rho(\omega = 0)} = \omega_0 \tau \cong Q$

Tau drückt die Zeit aus während welcher die Amplitude abnimmt. Je mehr ein Oszillator frei schwingen kann, umso grösser ist sein Gütefaktor. Wir können jetzt die Frage nach der Amplitude der Resonanz wieder aufnehmen. Hier ist Rho bei Null Frequenz, wir haben ausgerechnet, dass dies gleich Omega 0 mal Tau ist. Omega 0 ist nicht sehr unterschiedlich von Omega 1, daher ist dies, was wir hier gefunden haben, gleich Q. Man versteht wieso Q Gütefaktor genannt wird, es ist weil es uns sagt wie fest die Amplitude verstärkt wird bei der Resonanzfrequenz im Vergleich zu der Amplitude die man bei Null Frequenz hätte. Dies sagt uns also tatsächlich etwas über die Qualität eines Resonators.

Notes

Summary

8m 44s