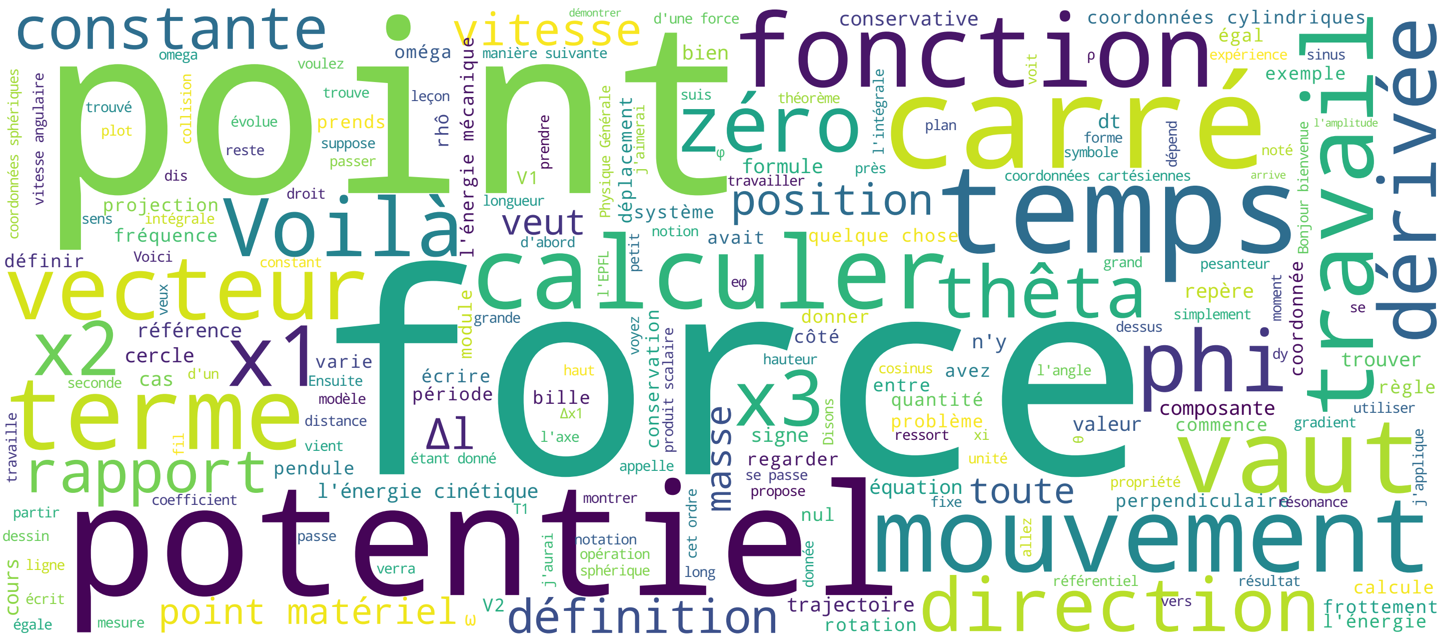
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Potentiel et énergie potentielle

Mécanique, cours 11.1

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-11



Search MOOC

Video

EPFL

Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Dans cette leçon, j'aimerais continuer à discuter la notion d'énergie. Jusqu'à maintenant, on a vu la notion de travail et d'énergie cinétique, et le théorème de l'énergie cinétique nous disait : si l'énergie cinétique a changé, c'est qu'un travail a été produit. J'aimerais maintenant compléter cette vision avec l'introduction de la notion de potentiel d'une force. Alors, on va voir dans quels cas une force admet un potentiel, on va pouvoir dans ces cas-là définir ce qu'on appelle l'énergie mécanique, ou l'énergie totale, et on verra que, dans ces systèmes-là, l'énergie est une constante du mouvement, ce qui sera très utile pour l'analyse de la dynamique de système matériel. Je vais définir ce qu'on veut dire quand on dit qu'une force dérive d'un potentiel, et je vais montrer quelques exemples où on dérive la force étant donné le potentiel, ou l'inverse, étant donné la force, on trouve le potentiel.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : potentiel d'une force

On considère une force qui dépend de la position et on suppose qu'on peut écrire :

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)$$

(choix du signe justifié plus loin)

Position de référence (convention) : $\boldsymbol{r}_s$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_s)$$

Mécanique | 2013 10

Je commence avec la définition du potentiel d'une force. Je veux considérer une force qui dépend de la position. Et j'imagine qu'il est possible de faire la définition suivante. J'imagine qu'il existe une fonction *V*, comme ceci, telle que le travail de la force pour aller du point 1 au point 2 peut être calculé simplement en connaissant la valeur de cette fonction en ***r****1* et en ***r****2*. Quand on calcule le travail de la force, on va le long de la trajectoire, et ici, on a des valeurs qui ne dépendent que de 2 positions de la trajectoire. Donc c'est quelque chose de particulier. Maintenant, vous noterez que dans cette définition, le 1 vient ici, le 2 là. Ce choix de signe se justifiera bientôt quand on discutera la conservation de l'énergie. Dans la pratique, il est commode d'utiliser un point de référence, et on calcule le potentiel comme étant le travail pour aller du point considéré, ici on va du point ***r***, à un point ***r****s*, appelé point de référence. Vous noterez que si j'applique cette définition-là à cette formule, ici, je vais trouver *V* de ***r*** moins *V* de ***r****s*.

Notes

Summary

1m 22s

Définition : potentiel d'une force

On considère une force qui dépend de la position et on suppose qu'on peut écrire :

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)$$

(choix du signe justifié plus loin)

Position de référence (convention) : $\boldsymbol{r}_s$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$: ***potentiel de la force***

Cette définition n'a un sens que si le travail ne dépend pas du cher mais seulement du point de départ et du point d'arrivée.

On dit que la force est ***conservative***.

Mécanique | 2013 13

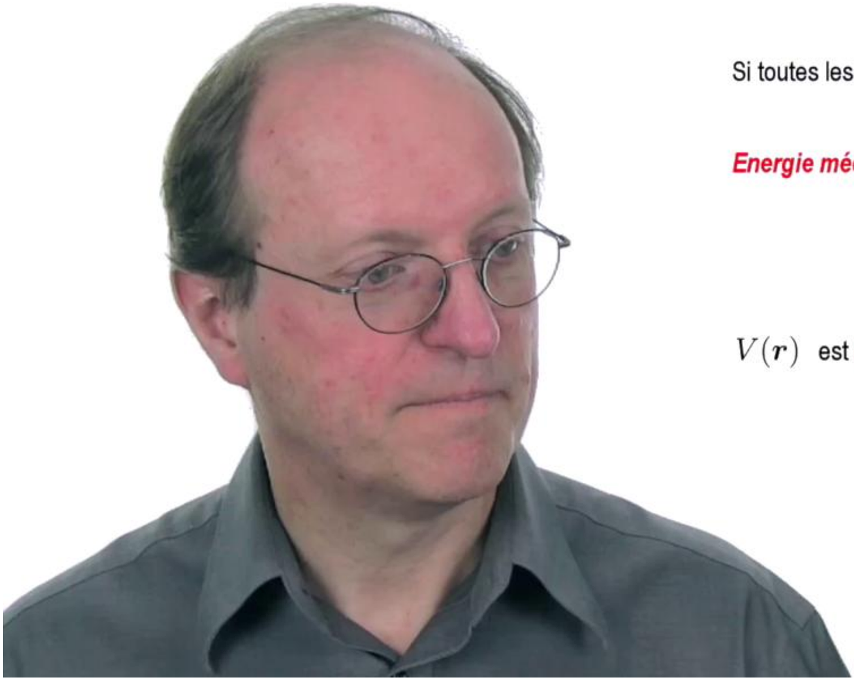
Alors, comme on a *V* de ***r*** des 2 côtés, c'est équivalent à dire *V* de ***r****s* est nul. Donc se donner ce point ***r****s*, c'est dire là où le potentiel est nul, c'est de donner le zéro du potentiel. Cette fonction *V* de ***r***, on l'appelle le potentiel de la force. On avait donc une situation particulière, et on voit bien que, si on a quelque chose comme une force de frottement, notamment, on ne peut pas avoir un potentiel. Quand on a une force de frottement, plus la trajectoire est longue, plus le travail de la force sera grand. Ce sera impossible de définir une fonction qui donne le travail simplement en fonction des 2 positions, initiale et finale. On verra plus tard quelques exemples de forces qui admettent un potentiel. Lorsqu'une force admet un potentiel, on dit que cette force est conservative.

Notes

Summary

3m 11s

Définition : énergie mécanique



Si toutes les forces sont conservatives :

Energie mécanique : $E = T + V$

$V(\boldsymbol{r})$ est ***l'énergie potentielle***.

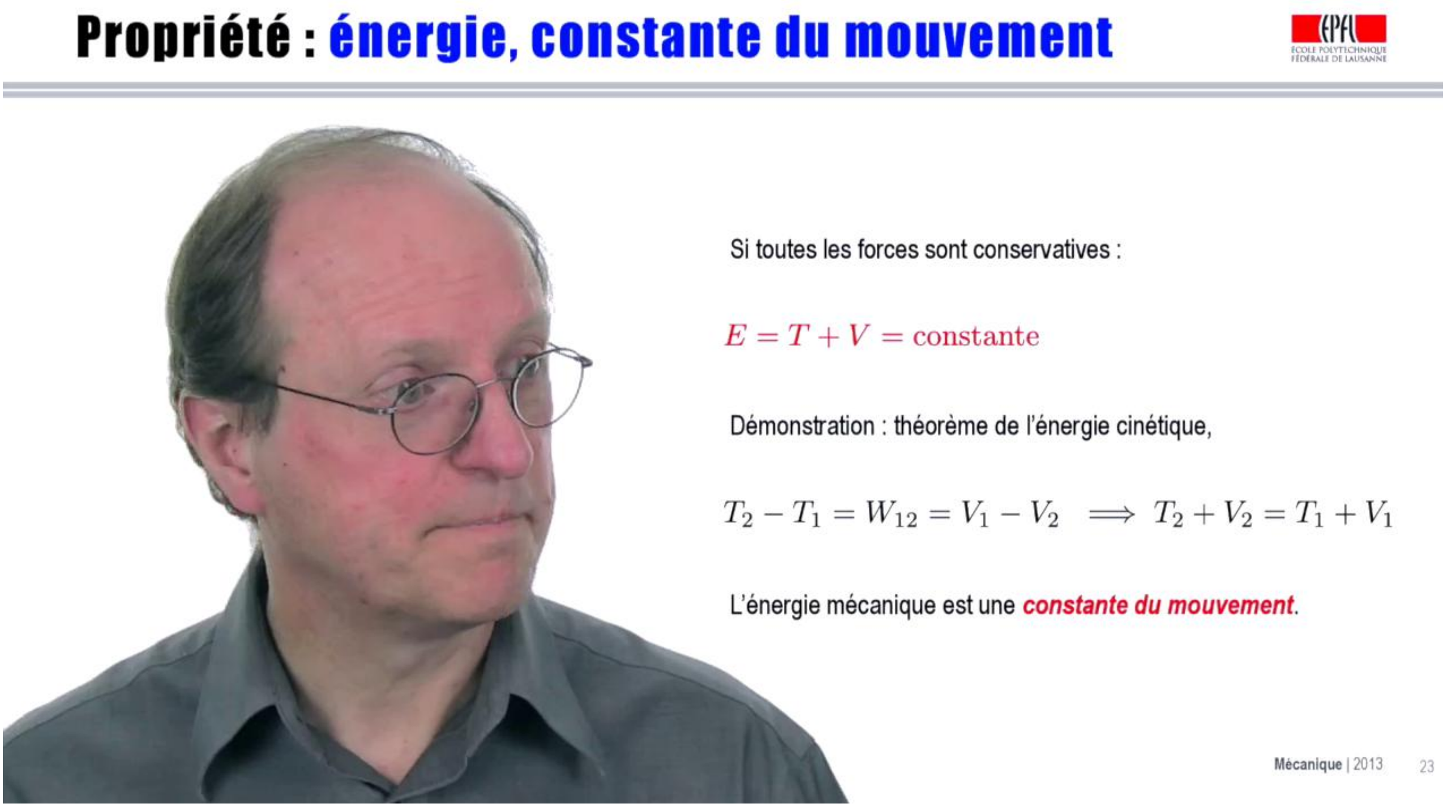
Mécanique | 2013 17

Maintenant, l'énergie mécanique, si toutes les forces sont conservatives, on va appeler l'énergie mécanique *T* + *V*, où *V* c'est toutes les contributions des potentiels de toutes les forces. Et il est d'usage d'appeler *V* l'énergie potentielle.

Notes

Summary

4m 22s



Maintenant, je montre une propriété essentielle, c'est que l'énergie est une constante du mouvement, lorsque toutes les forces sont conservatives. Donc je vais dire : l'énergie est une constante. Je le démontre de la manière suivante. Vous regardez la variation de l'énergie cinétique, ça vaut le travail, ça c'est le théorème de l'énergie cinétique qui nous le donne. Et maintenant, si toutes les forces sont conservatives, je peux calculer ce travail comme *V1 - V2*, on a toujours de 1 à 2 dans cet ordre-là. Et maintenant vous comprenez pourquoi on a donné cet ordre-là dans la définition de *W1 2*, ou si vous voulez dans la définition de *V*. On va vers la référence, ça fait que maintenant je peux passer mon *V2* de ce côté-là, passer le *T1* de l'autre côté du signe égal. J'ai donc *T2 + V2* qui vaut *T1 + V1*, ça veut dire *T + V* est constant. L'énergie mécanique d'un système où toutes les forces sont conservatives est une constante du mouvement, c'est une propriété extrêmement utile qu'on peut utiliser pour analyser la dynamique d'un système matériel.

Notes

Summary

4m 45s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\quad V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{V(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - V(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$$

Mécanique | 2013 27

Maintenant, j'explique l'idée qu'une force dérive de son potentiel. Vous supposez qu'on a attaché un repère à notre référentiel, et on va repérer la position d'un point matériel par ses coordonnées cartésiennes. Si on travaille en coordonnées cartésiennes, on peut calculer la force à partir du potentiel *V*, en faisant ces dérivées-là. Voici une notation qui est probablement nouvelle pour vous. Ce que cette dérivée veut dire, ici on a une dérivée de *V* par rapport à *xi*, où *i* vaut 1, 2 ou 3. Donc on prend cette fonction-là, et on la dérive par rapport à *x1* ou *x2* ou *x3* en laissant les autres coordonnées fixes, c'est ça que veut dire cette notation, il n'y a rien de plus à trouver là-dedans. Si vous voulez, je peux écrire *d* de *V*, par exemple sur *d* de *x1*, c'est la limite lorsque *Δx1* tend vers zéro de *V* de (*x1* + *Δx1*,*x2*,*x3*) - *V* (*x1*,*x2*,*x3*) sur *Δx1*. C'est donc la définition d'une dérivée où vous remarquez qu'ici j'ai le même *x2*, et là j'ai le même *x3*. Donc tout ce que j'ai fait, quand je dis ∂*V* sur ∂*x1* avec des ∂ (d rond) comme ça, je suis en train de traiter une fonction de plusieurs variables, et je dis : il n'y a que la variable *x1* qui varie, je fixe *x2*, je fixe *x3*.

Notes

Summary

6m 22s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\quad V(x_1, x_2, x_3)$

NABLA

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \underline{\sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i}} \boldsymbol{e}_i$ $\quad$ Notation : $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$

$\hookrightarrow$ gradient de V

Mécanique | 2013 28

Alors, ça c'est le résultat que j'annonce, et maintenant je dois encore le démontrer, mais je vous donne une notation, j'introduis ici un symbole qu'on appelle un NABLA, c'est le symbole qui représente cette opération-là; et on appelle cette opération-là calculer le gradient de *V*. Je vous ai appris à calculer le gradient de *V* dans le cas où *V* est exprimé en coordonnées cartésiennes. Si on travaille en coordonnées cylindriques ou sphériques, les choses se passent autrement, mais on n'en aura pas besoin dans le cadre de ce cours, c'est quelque chose que je laisse à d'autres enseignants.

Notes

Summary

8m 19s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\qquad V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$ $\qquad$ Notation : $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$

Travail dans un déplacement infinitésimal :

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$$

$$d\boldsymbol{r} = \Delta\ell\,\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Delta\ell\,\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i = F_i\,\Delta\ell = -\left[V(\boldsymbol{r} + \Delta\ell\,\boldsymbol{e}_i) - V(\boldsymbol{r})\right] = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\Delta\ell$$

$i=1 \quad V(x_1 + \Delta\ell, x_2, x_3) - V(x_1, x_2, x_3)$

Mécanique | 2013 31

Maintenant, je dois encore démontrer cette propriété que j'ai annoncé ici, et je vais le faire de la manière suivante. Examinons un travail infinitésimal, et on applique la définition de *V*, donc ce travail infinitésimal doit être *V* de ***r*** initial, c'est ***r***, et le ***r*** final c'est ***r*** + *d**r***. C'était mon *V1* - *V2*. Maintenant, je prend un cas particulier. Je fais un déplacement *Δl* dans la direction ***ei***. Et j'explicite le ***F***.*d**r***, j'ai donc le *Δl* fois ***F*** fois ***ei***, et là, bien sûr, je reconnais la composante *i* de ***F***. Maintenant, je vais travailler cette expression en ***V*** en mettant le - (moins) en évidence, comme ça j'aurai ***V*** de ***r*** +*d**r*** moins ***V*** de ***r***, avec le *d**r*** qui vaut *Δl* fois ***ei***. Et ici, j'applique la règle du développement limité, parce que si je prends la composante, si je prends *i* =1, par exemple, dans la parenthèse, ici, j'ai ***V*** de (*x1* + *Δl*, *x2*, *x3*) moins ***V*** de (*x1*, *x2*, *x3*).

Notes

Summary

9m 09s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\quad V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$ $\quad$ Notation : $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$

Travail dans un déplacement infinitésimal :

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$$

$$d\boldsymbol{r} = \Delta\ell \boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Delta\ell\, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i = F_i\, \Delta\ell = -[V(\boldsymbol{r} + \Delta\ell\, \boldsymbol{e}_i) - V(\boldsymbol{r})] = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta\ell$$

$i=1 \quad V(x_1 + \Delta\ell, x_2, x_3) - V(x_1, x_2, x_3)$

Mécanique | 2013 31

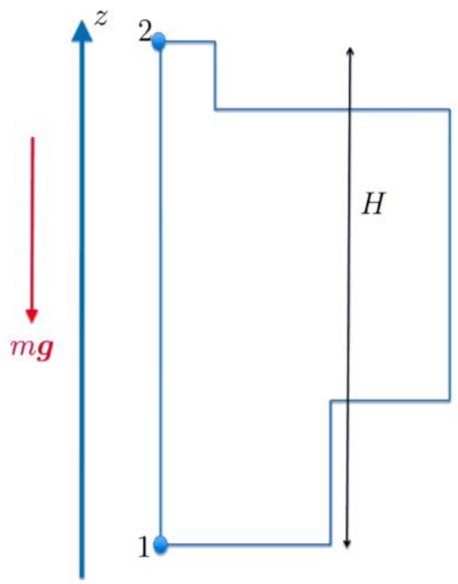
Et je note que *x2* et *x3* sont comme des constantes dans cette opération, et ici j'ai comme une fonction de *x1* seulement, et je peux appliquer ma règle du développement limité, avec la dérivée, la dérivée, ici, est donnée en ∂ parce que ***V*** est une fonction de plusieurs variables. Et j'ai donc fois le *Δl*, le *Δl* qui apparait là. Le signe moins, on l'avait déjà avant. Et maintenant, je vois ***Fi*** ici, fois *Δl*, et j'ai moins ∂***V*** sur ∂*xi* fois *Δl*. Donc j'ai trouvé que pour la composante *i* de ***F***, j'ai moins ∂***V*** sur ∂*xi*, c'est ce que j'ai noté ici. Donc j'ai démontré cette propriété. C'est ce qu'on appelle dériver la force de son potentiel.

Notes

Summary

10m 56s

Exemple : potentiel de la pesanteur



$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_1$$

$$V(\boldsymbol{r}_2) = \int_{\boldsymbol{r}_2}^{\boldsymbol{r}_1} m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{r}$$

$$= m\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = mgH$$

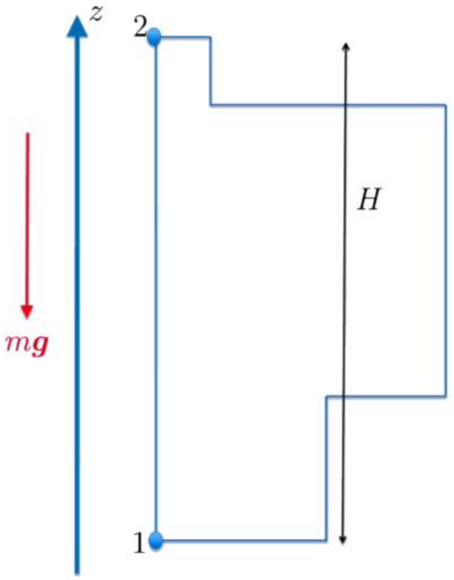
Je vous propose de regarder le potentiel de la pesanteur. Voilà ce qui symbolise la pesanteur pour un point matériel de masse *m*. Je choisis un système d'axe dirigé vers le haut. Voilà mes 2 points, 1 et 2. Disons que je convienne que le point de référence du potentiel est à ***r****1*. Ça veut dire que j'admets un zéro du potentiel de la pesanteur à la position 1. Le potentiel à la position 2, c'est l'intégrale qui va de 2 à 1 (ce 1 là, parce que c'est ma référence) de la force fois le déplacement *d****r***. Maintenant, je peux aller tout droit de 2 à 1, mais je peux faire des zigzags, et quand je calcule un *mgd****r***, si j'ai un *d****r***, ici, qui est horizontal, ce *d****r*** est perpendiculaire à *m****g***, là on a un produit scalaire qui donne zéro, donc on n'aura aucune contribution de tous ces éléments-là, il n'y a que les parties verticales qui contribuent, donc je peux tout aussi bien calculer cette ligne droite. Je vais trouver *m****g*** fois (***r****1* - ***r****2*), le vecteur ***r****1* - ***r****2*, il est là, il est dans le sens de *m****g***, donc on finit par trouver *mg* fois la hauteur du point 2 au dessus du point 1, c'est ce que j'ai noté ici.

Notes

Summary

11m 56s

Exemple : potentiel de la pesanteur



$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_1$$

$$V(\boldsymbol{r}_2) = \int_{\boldsymbol{r}_2}^{\boldsymbol{r}_1} m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{r}$$

$$= m\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = mgH$$

$$V(z) = mgz$$

$$F_z = -\frac{dV}{dz} = -mg$$

Mécanique | 2013 41

On peut maintenant faire le travail inverse, partir du potentiel. Je vais écrire que ***V*** à la hauteur *z* au dessus du zéro de mon potentiel, c'est *m**gz***, et je peux calculer la force dans la direction ***z***. Ici j'ai un *d* droit parce que ***V*** n'est fonction que de ***z*** seulement. J'ai donc moins *d**V*** sur *d**z***, en appliquant la règle que je viens de donner pour trouver la force à partir du potentiel. Et la dérivée vaut *m**g***, avec le signe moins, c'est bien correct : la projection de *m**g*** sur cet axe, qui est vers le haut, a un moins *m**g***.

Notes

Summary

13m 39s

Exemple : potentiel de la force d'un ressort

Force:

$$F(x) = -kx$$

$$x_s = 0$$

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(y)\,dy \;= \int_0^x ky\,dy = \frac{1}{2}\,kx^2$$

Mécanique | 2013 46

Comme deuxième exemple, je prends le potentiel de la force d'un ressort. Exprimons la force du ressort comme ceci. Disons que la position repos du ressort définit le zéro du potentiel. J'applique maintenant ma définition du potentiel ***V***. Alors, j'écris ***V*** comme le travail pour aller de *x* à *xs*. Et le calcul, l'intégrale, je l'écris ici avec ***F*** de *ydy*, pour qu'on ne confonde pas ce *x* là et la fonction de la position. *xs* vaut zéro, donc je fais une intégrale de zéro à *x* en changeant de signe. J'ai la force ***F*** de *y* qui vaut moins *k* fois *y*, les 2 signes s'annulent. Il reste *kydy*, et ça, l'intégrale de *ydy*, ça fait *y carré* sur 2, à évaluer à *x* et à zéro, ça fait 1/2 de *kx carré*. Il arrive très souvent, malheureusement, que des étudiants se disent : la force vaut *k x*, le déplacement, c'est *x*, donc le travail c'est *kx carré*. Ça, c'est un raisonnement faux, la force, au fur et à mesure que *x* évolue, et là j'ai fait exprès d'écrire *y*, *y* évolue de zéro à *x*, et à chaque fois, la force change, donc c'est bien cette intégrale-là qu'il faut calculer pour calculer le travail.

Notes

Summary

14m 23s

Exemple : potentiel de la force d'un ressort

Force:

$$F(x) = -kx$$

$$x_s = 0$$

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(y)\,dy \;\; = \int_0^x ky\,dy = \frac{1}{2}\,kx^2$$

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx$$

Mécanique | 2013 46

On peut maintenant travailler dans l'autre sens, étant donné le ***V*** de *x*, on peut calculer la force dans la direction *x* en calculant le gradient, qui est simplement moins ***dV*** sur *dx*, et on trouve bien moins *k x*, ce qui est correct, c'est ce qu'on avait donné au début.

Notes

Summary

16m 05s