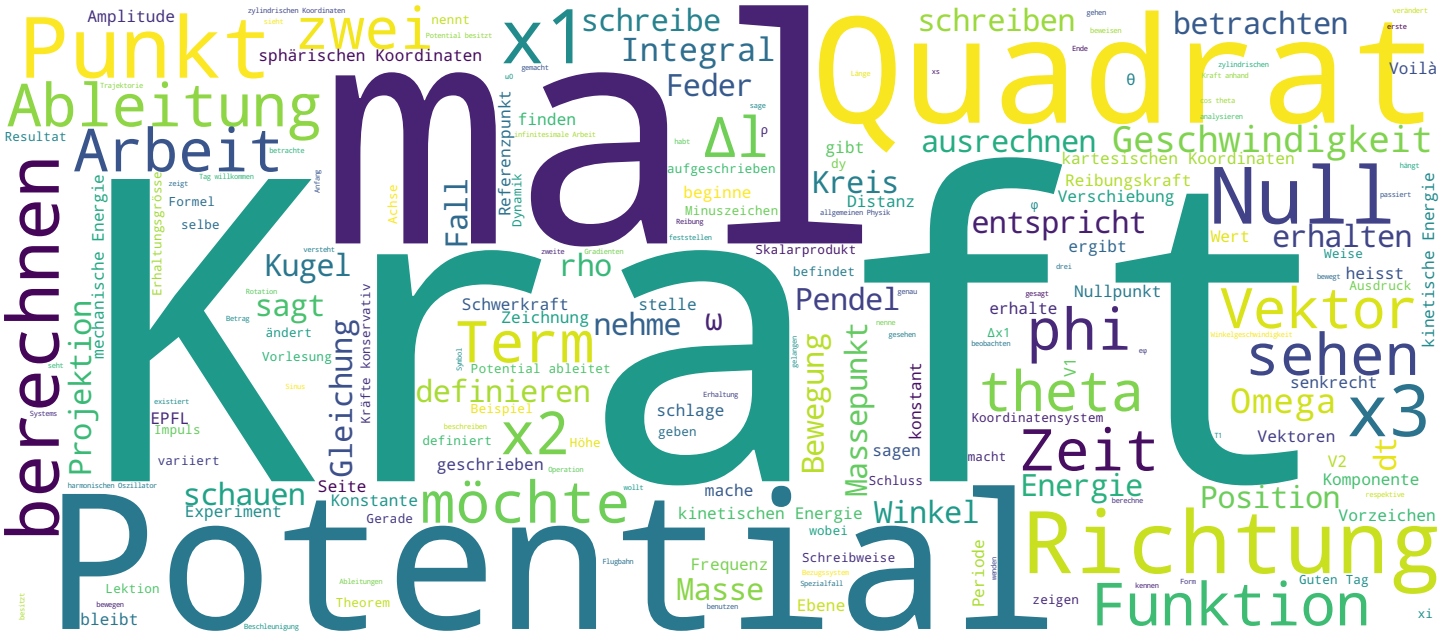
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-11

Potentiel et énergie potentielle

Mécanique, cours 11.1

Jean-Philippe Ansermet



Video

EPFL

Potentiel et énergie potentielle

- Potentiel
- Energie mécanique
- Force dérivant d'un potentiel
- Exemples

Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion möchte die Diskussion über die Energie vortsetzen. Bis hierhin, haben wir von der kinetischen Arbeit und Energie gesprochen und das Theorem der kinetischen Energie sagte uns: wenn die kinetische Energie sich verändert, so wurde eine Arbeit erbracht. Ich möchte dies jetzt damit verfollständigen, dass ich den Begriff des Potentials eines Kraftfelds einführe. Wir werden sehen in welchem Fall ein Kraftfeld ein Potential besitzt, wir werden in diesem Fall die sogenannte mechanische Energie definieren können oder die totale Energie und wir werden sehen, dass in diesen Systemen die Energie eine Erhaltungsgrösse ist, was sehr nützlich sein wird, wenn wir die Dynamik eines Materiensystems studieren. Ich werde definieren was man darunter versteht wenn man sagt, dass eine Kraft sich von einem Potential ableitet und ich werde einige Beispiele zeigen, wo man die Kraft aus dem Potential ableiten kann oder das Gegenteil: aus der Kraft das Potential abzuleiten.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : potentiel d'une force

On considère une force qui dépend de la position et on suppose qu'on peut écrire :

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)$$

(choix du signe justifié plus loin)

Position de référence (convention) : $\boldsymbol{r}_s$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\vec{r}) - V(\vec{r_s})$$

Ich beginne mit der Definition des Potentials einer Kraft. Ich möchte eine Kraft studieren, welche von der Position abhängt. Ich stelle mir vor, dass es möglich ist folgende Definition zu machen. Ich stelle mir vor, dass eine Funktion *V* existiert, so wie hier, sodass die Arbeit der Kraft, um vom Punkt 1 zum Punkt 2 zu gelangen, ganz einfach berechnet werden kann, indem man den Wert dieser Funktion bei ***r1*** und bei ***r2*** kennt. Wenn wir die Arbeit dieser Kraft berechnen, gehen wir der Flugbahn nach und hier haben wir Werte die nur von 2 Positionen auf der Flugbahn abhängen. Hier ist also was Spezielles. Jetzt werdet ihr feststellen, dass in dieser Definition das 1 hier hin kommt und das 2 da. Diese Wahl der Vorzeichen wird sich bald rechtfertigen, sobald wir über die Erhaltung der Energie sprechen werden. Im normalen Gebrauch ist es angenehm einen Referenzpunkt zu benutzen und das Potential als Arbeit, welche nötig ist um von einem Punkt, hier vom Punkt ***r***, zu dem Referenzpunkt, ***r***s zu gelangen, zu definieren. Ihr werdet feststellen, dass, wenn ich diese Definition auf diese Formel anwende, wo werde ich *V* von ***r*** minus *V* von ***r***s erhalten.

Notes

Summary

1m 22s

Définition : potentiel d'une force

On considère une force qui dépend de la position et on suppose qu'on peut écrire :

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)$$

(choix du signe justifié plus loin)

Position de référence (convention) : $\boldsymbol{r}_s$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$: ***potentiel de la force***

Cette définition n'a un sens que si le travail ne dépend pas du cher mais seulement du point de départ et du point d'arrivée.

On dit que la force est ***conservative***.

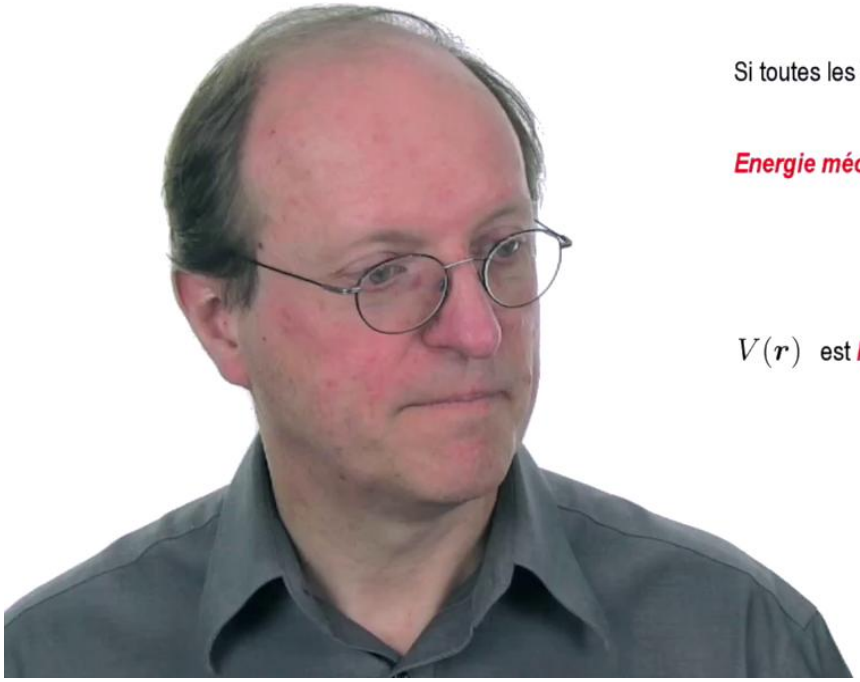
Nun, da wir ein *V* von ***r*** auf beiden Seiten haben, ist es gleichwertig zu sagen, dass *V* von ***r***s gleich null ist. Dies heisst, dass wenn wir den Punkt nehmen wo das Potential gleich Null ist so geben wir den Nullpunkt des Potentials an. Diese Funktion *V* von ***r***, wird Potential des Kräftefelds genannt. Wir hatten also einen Spezialfall und es ist klar, dass wenn wir so was wie eine Reibungskraft hätten, so könnten wir kein Potential haben. Bei einer Reibungskraft ist die Arbeit grösser je länger die Flugbahn ist. Es wäre unmöglich eine Funktion zu definieren, welche die Arbeit nur in Abhängigkeit von den 2 Positionen angibt. Wir werden später einige Beispiele sehen von Kräften, welche ein Potential besitzen. Wenn eine Kraft ein Potential besitzt, so sagt man sie sei konservativ.

Notes

Summary

3m 11s

Définition : énergie mécanique



Si toutes les forces sont conservatives :

Energie mécanique : $E = T + V$

$V(\boldsymbol{r})$ est ***l'énergie potentielle***.

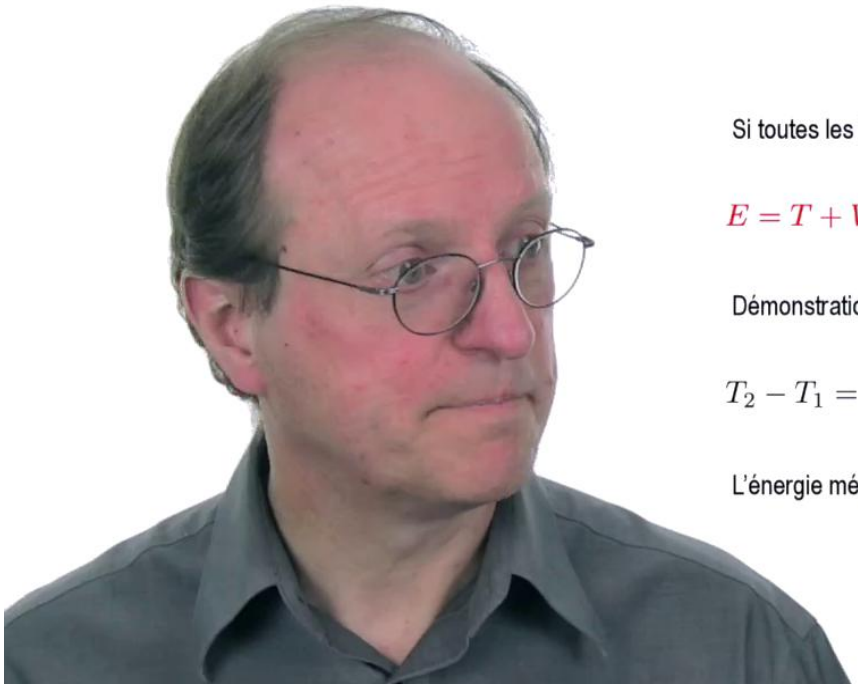
Nun, die mechanische Energie, wenn alle Kräfte konservativ sind, werden wir die mechanisch Energie *T* + *V* nennen, wobei *V* alle Beiträge von allen Potentialen aller Kräftefelder ist. *V* wird potentielle Energie genannt.

Notes

Summary

4m 22s

Propriété : énergie, constante du mouvement



Si toutes les forces sont conservatives :

$$E = T + V = \text{constante}$$

Démonstration : théorème de l'énergie cinétique,

$$T_2 - T_1 = W_{12} = V_1 - V_2 \implies T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

L'énergie mécanique est une ***constante du mouvement***.

Mécanique | 2013 23

Jetzt werde ich eine wesentliche Eigenschaft beweisen, die sagt, dass, wenn alle Kräfte konservativ sind, die Energie eine Erhaltungsgrösse ist. Ich sage also: Die Energie ist eine Konstante. Ich beweise dies auf folgende Weise. Dass die Änderung der kinetischen Energie die Arbeit ist, wissen wir dankt dem Theorem der kinetischen Energie. Und wenn jetzt alle Kräfte konservativ sind, so kann ich die Arbeit als *V1 - V2* berechnen. Wir haben immer 1 bis 2 in dieser Reihenfolge hier. Jetzt versteht ihr wieso wir diese Reihenfolge gewählt haben in der Definition von *W1 2*, oder wenn ihr wollt in der Definition von *V*. Wir gehen in Richtung des Referenzpunktes. Dies macht, dass ich jetzt mein *V2* auf diese Seite hier schreiben kann, das *T1* auf die andere Seite des Gleichheitszeichens. Folglich haben wir: *T2 + V2* gleich *T1 + V1*, das heisst, *T + V* ist konstant. Die mechanische Energie eines Systems mit nur konservativen Kräften is eine Erhaltungsgrösse. Dies ist eine extrem nützliche Eigenschaft, die wir benutzen könne um die Dynamik eines Materiensystems zu Analysieren.

Notes

Summary

4m 45s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{V(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - V(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$$

Ich erkläre nun die Idee einer Kraft, welch sich von einem Potential ableitet. Stellt euch vor wir hätten ein Koordinatensyste, an unser Bezugssystem gehängt und das wir die Position eines Massepunktes mit seinen kartesischen Koordinaten bestimmen. Wenn wir mit den kartesischen Koordinaten arbeiten, so können wir die Kraft anhand des Potentials *V* berechnen, indem wir diese Ableitungen hier machen. Hier ist eine Schreibweise, die möglicherweise neu ist für euch. Was diese Ableitung uns sagt, ist, dass wir hier eine Ableitung von *V* nach *xi* haben, wobei *i* 1, 2 oder 3 ist. Wir nehmen also diese Funktion hier und wir leiten sie nach *x1* oder *x2* oder *x3* ab und wir lassen die anderen Koordinaten fix. Das ist es was diese Schreibweise bedeutet, nichts mehr. Wenn ihr wollt kann ich *d* von *V* über, zum Beispiel, *d* von *x1* schreiben, dies ist der Grenzwert wenn *Δx1* gegen Null geht von *V* von (*x1 + Δx1,x2,x3*) - *V* (*x1,x2,x3*) über *Δx1*. Es ist also die Definition einer Ableitung wo ihr bemerkt, dass ich hier das selbe *x2* habe und hier das selbe *x3*.

Notes

Summary

6m 23s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{V(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - V(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$$

Alles was ich gemacht habe, als ich gesagt habe *∂V* über *∂x1* mit den *∂* (del), wie hier, so bin ich daran eine Funktion mit mehreren Variablen anzuschauen und ich sage: es ändert sich nur die Variabel *x1* und ich fixiere *x2* und *x3*.

Notes

Summary

8m 01s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\quad V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$

Notation : $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ NABLA

↳ gradient de V

Dies ist das Resultat und nun muss ich es noch beweisen aber ich gebe euch noch eine Schreibweise, ich führe das Symbol ein, welches NABLA genannt wird, es ist das Symbol, welches folgende Operation repräsentiert: und man nennt diese Operation den Gradienten von *V* berechnen. Ich habe euch gelehrt den Gradienten von *V* zu berechnen, wenn *V* in kartesischen Koordinaten ausgedrückt wird. Wenn man mit zylindrischen oder sphärischen Koordinaten arbeitet, ist das alles etwas anders aber in diesem Kurs werden wir das nicht brauchen und ich überlasse es anderen Lehrpersonen diese Konzepte einzuführen.

Notes

Summary

8m 19s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\quad V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$ $\quad$ Notation : $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$

Travail dans un déplacement infinitésimal :

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$$

$$d\boldsymbol{r} = \Delta\ell \boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Delta\ell\, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i = F_i\, \Delta\ell = -\left[V(\boldsymbol{r} + \Delta\ell\, \boldsymbol{e}_i) - V(\boldsymbol{r})\right] = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\Delta\ell$$

$i = 1$ $\quad V(x_1 + \Delta\ell, x_2, x_3) - V(x_1, x_2, x_3)$

Mécanique | 2013 31

Jetzt muss ich immer noch diese Eigenschaft hier Beweisen. Ich werde das auf folgende Weise machen. Wir schauen uns eine infinitesimale Arbeit an und wir wenden die Definition von *V* an. Diese infinitesimale Arbeit muss gleich dem *V* von ***r*** am Anfang, das ist ***r***, und dem ***r*** am Schluss, dies ist ***r*** + *d****r***, sein. Dies war mein *V1* - *V2*. Nun nehme ich einen Spezialfall. Ich mache eine Verschiebung um *Δl* in Richtung ***ei***. Und ich stelle ***F***.*d****r*** explizit dar, ich habe hier *Δl* mal ***F*** mal ***ei***, und hier erkenne ich natürlich die Komponente *i* von ***F***. Jetzt werde ich mich um den Ausdruck mit ***V*** kümmern. Wir machen klammern zuerst das - (Minus) aus, dadurch erhalte ich ***V*** von ***r*** +*d****r*** minus ***V*** von ***r***, wo *d****r*** gleich *Δl* mal ***ei*** ist. Hier wende ich nun die Regel der Reihenentwicklung an, da, wenn ich zum Beispiel *i* =1 hier in den Klammern nehme, so erhalte ich ***V*** von (*x1* + *Δl*, *x2*, *x3*) minus ***V*** von (*x1*, *x2*, *x3*).

Notes

Summary

9m 09s

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\quad V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$ $\quad$ Notation : $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$

Travail dans un déplacement infinitésimal :

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$$

$$d\boldsymbol{r} = \Delta\ell \boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Delta\ell \, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i = F_i \, \Delta\ell = -[V(\boldsymbol{r} + \Delta\ell \, \boldsymbol{e}_i) - V(\boldsymbol{r})] = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta\ell$$

$i = 1$ $\quad V(x_1 + \Delta\ell, x_2, x_3) - V(x_1, x_2, x_3)$

Mécanique | 2013 31

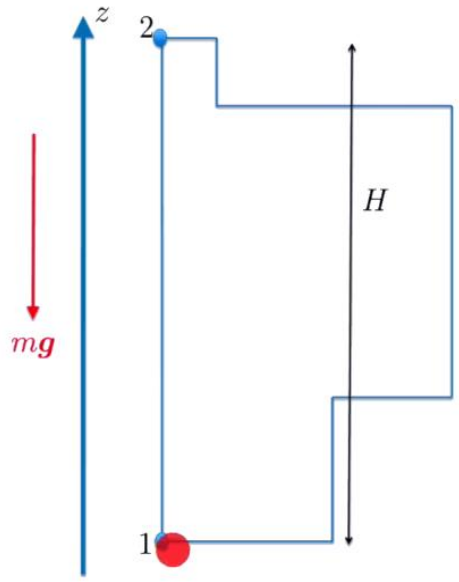
Ich stelle fest, dass *x2* und *x3* wie Konstante sind in dieser Operation und hier habe ich eine Funktion nur von *x1* und ich kann die Regel der Reihenentwicklung anwenden, mit der Ableitung, die Ableitung ist hier mit ∂ gekennzeichnet, da ***V*** eine Funktion mehrerer Variablen ist. Und alles wird mit *Δl*, dem *Δl* von hier, multipliziert. Das Minuszeichen hatten wir schon vorher. Und jetzt sehe ich hier ***Fi*** mal *Δl* und ich habe minus ∂***V*** über ∂*xi* mal *Δl*. Wir haben also, für die Komponente *i* von ***F***, minus ∂***V*** über ∂*xi*, dies habe ich hier aufgeschrieben. Ich habe also diese Eigenschaft bewiesen. Dies nennt man die Kraft aus ihrem Potential ableitet.

Notes

Summary

10m 56s

Exemple : potentiel de la pesanteur



$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_1$$

$$V(\boldsymbol{r}_2) = \int_{\boldsymbol{r}_2}^{\boldsymbol{r}_1} m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{r}$$

$$= m\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = mgH$$

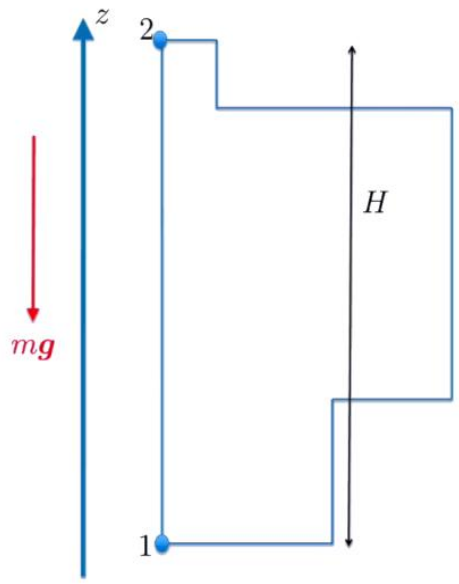
Ich schlage vor, wir schauen uns das Potential der Schwerkraft an. Hier haben wir die Schwerkraft für einen Massepunkt dargestellt. Ich wähle ein Achsensystem, welches nach oben orientiert ist. Und hier sind meine 2 Punkte 1 und 2. Wir einigen uns darauf, den Referenzpunkt des Potentials bei ***r1*** zu wählen. Dies bedeutet, dass, in Position 1 ein Nullpunkt, des Potential der Schwerkraft ist. Das Potential in Position 2 ist das Integral von 2 nach 1 (dieses 1 hier ist da, weil es sich um mein Referenzpunkt handelt) der Kraft mal der Verschiebung *d**r***. Nun kann ich gerade aus von 2 nach 1 gehen oder ich kann Zigzags machen und wen ich *mgdr* berechne, wenn wir hier ein *d**r*** nehmen, welches horizontal ist, so ist dieses *d**r*** senkrecht zu *mg*, hier haben wir also ein Skalarprodukt, welches Null ergibt. Diese Elemente hier geben also keine Beitrag, es sind also nur die vertikalen Teile die etwas Beitragen, ich kann also genau so gut diese Gerade hier ausrechnen. Ich werde *mg* mal (***r1*** - ***r2***) erhalten, der Vektor ***r1*** - ***r2***, hier, ist in Richtung *mg*, daher werden wir *mg* mal der Höhe des Punkts 2 über dem Punkt 1 erhalten.

Notes

Summary

11m 56s

Exemple : potentiel de la pesanteur



$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_1$$

$$V(\boldsymbol{r}_2) = \int_{\boldsymbol{r}_2}^{\boldsymbol{r}_1} m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{r}$$

$$= m\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = mgH$$

$$V(z) = mgz$$

$$F_z = -\frac{dV}{dz} = -mg$$

Dies habe ich hier aufgeschrieben. Jetzt können wir die umgekehrte Arbeit machen, beim Potential anfangen. Ich werde schreiben, dass ***V*** auf der Höhe *z* über dem Nullpunkt des Potentials, ***mgz*** ist und ich kann die Kraft in Richtung ***z*** ausrechnen. Hier habe ich ein normales *d*, da ***V*** hängt nur von ***z*** ab, Ich habe also ***dV*** über ***dz*** wenn ich die vorherige Regel anwende um die Kraft anhand des Potentials zu finden. Und die Ableitung ist gleich ***mg***, mit dem Minuszeichen, das stimmt schon: die Projektion von ***mg*** auf diese Achse, welche nach oben zeigt, hat ein minus ***mg***.

Notes

Summary

13m 36s

Exemple : potentiel de la force d'un ressort

Force:

$$F(x) = -kx$$

$$x_s = 0$$

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(y)\,dy \quad = \int_0^x ky\,dy = \frac{1}{2}kx^2$$

Als zweites Beispiel nehme ich das Potential der Kraft einer Feder. Drücken wir die Kraft der Feder so aus. Wir sagen dass die Ruheposition der Feder den Nullpunkt des Potentials definiert. Ich wenden nun meine Definition des Potentials ***V*** an. Ich schreibe also ***V*** als die Arbeit um von *x* nach *xs* zu gelangen. Und das Integral, ich schreibe es hier mit ***F*** von *ydy*, um nicht dieses *x* hier mit der Funktion der Position zu verwechseln. *xs* ist gleich Null, ich habe also ein Integral von Null bis *x* mit anderem Vorzeichen. Ich habe die Kraft ***F*** von *y*, welche gleich minus *k* mal *y* ist, die 2 Vorzeichen lösen sich auf. Es bleibt *kydy*, und das Integral von *ydy* ist gleich *y Quadrat* über 2 bei *x* und Null zu berechnen. Das mach 1/2 von *kx Quadrat*. Es passiert leider häufig, dass sich die Studenten sagen: Die Kraft ist *k x*, die Verschiebung *x*, daher ist die Arbeit gleich *kx quadrat*. Das ist eine falsche Überlegung, die Kraft, während *x* sich verändert, und hier habe ich extra *y* geschrieben, *y* entwickelt sich von Null zu *x*, und dabei ändert sich die Kraft immer.

Notes

Summary

14m 23s

Exemple : potentiel de la force d'un ressort

Force:

$$F(x) = -kx$$

$$x_s = 0$$

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(y)\,dy \quad = \int_0^x ky\,dy = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx$$

Man muss also wirklich dieses Integral da Ausrechnen, wenn man die Arbeit kennen will. Jetzt können wir in die andere Richtung arbeiten. Wenn wir das Potential ***V*** von *x* kennen, dann können wir die Kraft in Richtung *x* ausrechnen indem wir den Gradienten ausrechnen. Dies ist gleich *d**V*** über *dx* und wir finden hier ein minus *k x*, was auch korrekt ist, das ist was wir uns am Anfang vorgenommen haben.

Notes

Summary

15m 56s