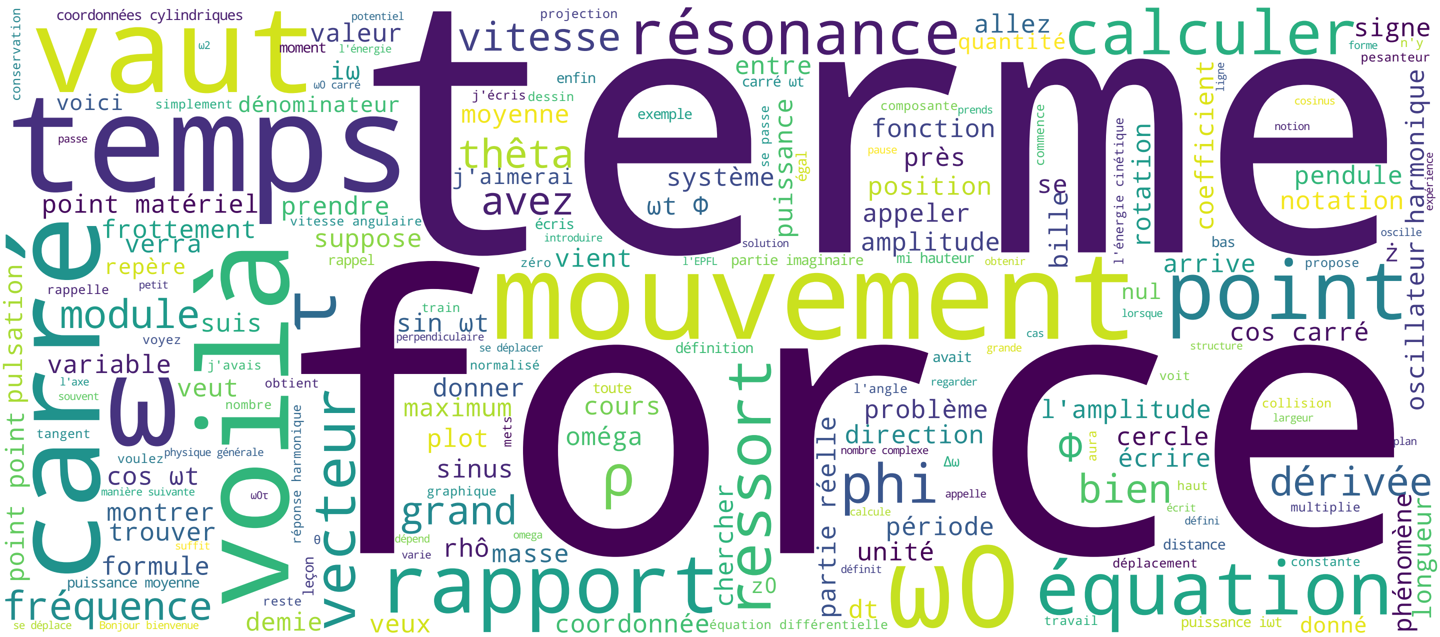
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-10

Le phénomène de résonance

Mécanique, cours 10.2

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

Le phénomène de résonance

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon je vais introduire un concept éminemment important, celui de phénomène de résonance, je le fais ici parce que on va appliquer un nouvel outil, la notion de puissance et on verra que dans ce problème-là on arrive à une bonne description de ce qui se passe en examinant la puissance d'une force. Le phénomène de résonance est très important pour les ingénieurs ceux par exemple qui doivent construire des structures et se préoccupent d'éviter d'avoir des fréquences propres de résonance, comme on le verra, qui sont au voisinage de fréquences de l'usage qu'on fait de ces structures; ou bien vous avez des scientifiques ou des ingénieurs qui doivent développer des capteurs ultrasensibles et on verra pourquoi souvent on fait recours à des résonateurs pour obtenir des mesures extrêmement sensibles.

Notes

Summary

0m 04s

Le phénomène de résonance

- Equation du mouvement
- Réponse harmonique
- Spectre
- Amplitude à la résonance
- Puissance

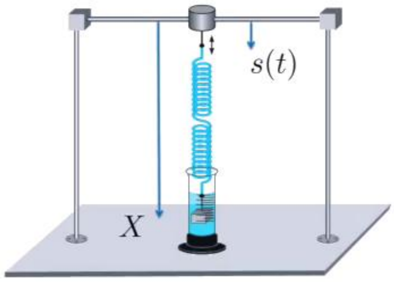
Je vais d'abord poser le problème sous forme d'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique avec une force appliquée, je vais en chercher la réponse harmonique, dans les vidéos d'expérience je montre pratiquement ce que veut dire la réponse harmonique, on le verra ici sous forme mathématique, je vais discuter le spectre, c'est-à-dire quelle amplitude on obtient pour quelle fréquence, on verra une propriété particulière justement la sensibilité des résonateurs lorsque on les excite à la fréquence de résonance et enfin, pour appliquer la leçon précédente, on va calculer la puissance de la force qui sollicite notre résonateur.

Notes

Summary

1m 11s

Equation du mouvement



$$m\ddot{X} = -k\left(X - s(t) - \ell\right) - b\dot{X} + mg$$

Mécanique | 2013 10

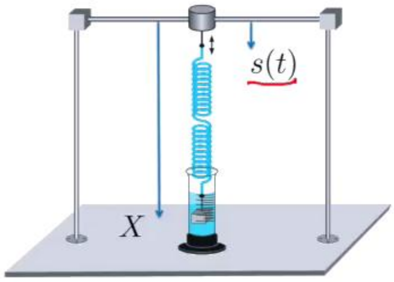
J'imagine la situation suivante : vous avez un ressort, une masse attachée au ressort, on va supposer qu'on ne peut pas négliger les frottements mais que tout de même les frottements sont faibles donc on a beaucoup d'oscillations avant d'avoir un amortissement notoire. On suppose ici que notre système de ressort et de masse, voici le ressort et la masse, est suspendu en ce point là à un pot vibrant, un système électromagnétique, qui secoue ce point d'attache; pour décrire la cinématique du système je n'ai qu'à me donner une coordonnée X qui définit la position du plot et puis s qui dépend du temps, qui est une donnée expérimentale, et qui définit la position du point d'attache; pour écrire l'équation du mouvement il n'y a pas grande difficulté je peux sauter les étapes et tout de suite la présenter comme ceci j'ai appliqué *f=ma* l'accélération est simplement la dérivée seconde de la position J'ai une force de rappel ce que je dois indiquer ici c'est la force qui s'exerce en ce point sur le plot du ressort et donc c'est une force de rappel, d'où le signe "moins", une force proportionnelle à l'élongation car si le coefficient de proportionnalité et l'élongation du ressort c'est *X - s X - s* c'est cette distance-là moins la longueur au repos du ressort; j'ai aussi inclus la force de frottement présumée pour le liquide, et la pesanteur.

Notes

Summary

2m 04s

Equation du mouvement



$$m\ddot{X} = -k\,(X - s(t) - \ell) - b\dot{X} + mg$$

$$F(t) = ks(t)$$

$$x = X - \ell - mg/k$$

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t)$$

$$F(t) = f\cos(\omega t)$$

donné

Mécanique | 2013 14

Maintenant ce que j'aimerais faire c'est montrer que ce problème est équivalent à un problème d'un oscillateur harmonique avec un ressort attaché à un point fixe et une force oscillante appliquée sur le point matériel; pour ce faire je vais faire deux substitutions, d'abord je vais appeler le terme *KsF(t)* suggérant une force ensuite je vais changer de variable je vais considérer petit *x* qui est grand *X* moins *l* (la longueur au repos) et puis j'inclus aussi, comme on l'avait déjà fait une fois, l'effet de la pesanteur dans cette définition là et avec ce changement de variable là bien sûr les dérivées de *x* sont égales aux dérivées de *X* mais mon équation se simplifie pour prendre cette allure-là; maintenant on reconnaît dans cette équation celle qu'on n'aurait pour un oscillateur harmonique définie par la variable *x*, une force de rappel - *kx*, une force de frottement et une force extérieure. Dans ce qui suit on va considérer que cette force extérieure a la forme, une amplitude *fois cos (ωt)*, ce *ω* là, attention, ce *ω* là c'est donné par l'expérience et au fond ça vient de *s(t)*.

Notes

Summary

4m 01s

Passage aux nombres complexes

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t) \qquad F(t) = f\cos(\omega t)$$

On imagine un 'autre' problème :

$$+i \qquad m\ddot{y} = -k\,y - b\dot{y} + F_y(t) \qquad F_y(t) = f\sin(\omega t)$$

$z = x + iy$

$\cos\omega t + i\sin\omega t = e^{i\omega t}$

Mécanique | 2013 17

Voilà, maintenant on va chercher à intégrer cette équation différentielle avec ce *F* et pour ce faire je vous propose d'étendre le problème en considérant un autre problème qui est mathématiquement extrêmement semblable que j'écrirais pour une variable *y* où j'aurais essentiellement la même équation du mouvement mais j'imagine que la force ne serait pas un *cos(ωt)* mais un *sin (ωt)* pourquoi je fais ça ? Parce que vous allez voir après une forme extrêmement compacte que je peux écrire avec des nombres complexes, en effet j'imagine de faire une addition de ces deux équations là, j'ignore le bout de texte, je multiplie par *i* ici et j'additionne et je vais poser $z = x + iy$ alors les dérivées sont immédiates $\dot{z}$ va donner $\dot{x}$ plus $i\dot{y}$, etc donc on voit apparaître ici un $\ddot{x} + i\ddot{y}$ ça va nous donner *z point point* ici on a $x + y$ ça va donner *z* ici $\dot{x} + i\dot{y}$ ça va donner $\dot{z}$ et là on a, peut-être qu'il faudrait le rappeler, on a un *cos ωt + i sin ωt* et ça j'espère que vous l'avez déjà vu sinon je vous l'apprends ça vaut "*e* puissance *iωt*"; avec ça on arrive à cette équation du mouvement en forme complexe.

Notes

Summary

5m 32s

Passage aux nombres complexes

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t) \qquad F(t) = f\cos(\omega t)$$

On imagine un 'autre' problème :

$$m\ddot{y} = -k\,y - b\dot{y} + F_y(t) \qquad F_y(t) = f\sin(\omega t)$$

On multiplie par (i) et on somme :

$$m\ddot{z} = -k\,z - b\dot{z} + f\,e^{i\omega t}$$

Paramètres avec notation explicite :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = \alpha\,e^{i\omega t}$$

Maintenant à partir de la forme complexe comment est-ce qu'on retrouve notre problème original ? C'est facile, il suffit de prendre la partie réelle. Pour simplifier les écritures et comme d'habitude avec des notations qui sont explicites, je vais écrire que le rapport *k* sur *m* je vais l'écrire "*ω0 au carré*" parce que si j'avais un oscillateur harmonique avec juste ces deux termes et sans les deux autres j'aurais une pulsation propre, comme on dit, la pulsation qu'on obtiendrait serait le *ω0* = √*k sur m* donc je choisis d'appeler *k sur m ω0*; si je divise par *m* j'ai un *b* sur *m* qui multiplie *ż* qui doit avoir la même unité que *z point point*, donc *b sur m* a l'unité de *1 sur un temps* ici je choisis la notation *1 sur τ* et enfin *f sur m* j'ai décidé de l'appeler *α*.

Notes

Summary

7m 21s

Passage aux nombres complexes

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t) \qquad F(t) = f\cos(\omega t)$$

On imagine un 'autre' problème :

$$m\ddot{y} = -k\,y - b\dot{y} + F_y(t) \qquad F_y(t) = f\sin(\omega t)$$

On multiplie par (i) et on somme :

$$m\ddot{z} = -k\,z - b\dot{z} + f\,e^{i\omega t}$$

Paramètres avec notation explicite :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = \alpha\,e^{i\omega t}$$

Hypothèse du régime harmonique :

$$z = z_0\,e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 z_0 + \frac{1}{\tau}(i\omega)z_0 + \omega_0^2 z_0 = \alpha \qquad z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)}$$

Mécanique | 2013 22

Maintenant je fais une hypothèse particulière : je ne suis pas en train de chercher la solution générale à cette équation différentielle, je suis en train de chercher une solution dite harmonique, ça veut dire que je suppose que les transitoires qu'on peut observer dans les vidéos d'expérience ces transitoires se sont déjà amorties, j'attends suffisamment longtemps pour n'avoir qu'une oscillation à la même pulsation que la pulsation de la force appliquée, donc je cherche une solution pour cette équation différentielle qui oscille avec la pulsation *ω*. Alors si on met ce *z* dans cette équation là quand on dérive ça par rapport au temps on a *iω* qui vient devant le *z* quand on met un *z point point* on a le carré de *iω* qui fait un - *ω2* voilà le - *ω2* voilà le *iω* voilà le terme "on a pas dérivé" et je peux diviser par le " e puissance iωt" partout, j'ai cette équation là où on a *z0* ici on peut résoudre pour *z0* et voilà ce qu'on trouve voilà le - *ω2* le *ω0 carré* qui est là et le *iω sur τ* qui est là voilà l'amplitude ici on a l'amplitude de notre oscillation du problème complexe.

Notes

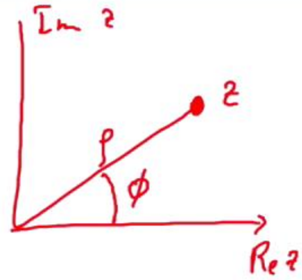
Summary

8m 29s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)}$$

$$z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$



Je vous rappelle la solution qu'on vient de trouver ici c'est ce qu'on appelle la réponse harmonique maintenant vous allez voir qu'il est favorable d'utiliser cette notation-là donc pour rappel si je déssine le plan complexe avec *Réel de z* ici *Imaginaire de z* ici voilà mon nombre complexe z le ρ que j'ai noté ici c'est le module de z et le Φ c'est cet angle là.

Notes

Summary

10m 03s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)} \qquad z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \underline{\rho \cos(\omega t + \phi)}$$

$z = \rho\, e^{i\phi}\, e^{i\omega t} \Rightarrow Re(z) = \rho \cos(\omega t + \phi)$

Alors le module, d'abord je peux écrire *x* si on veut la coordonnée réelle alors c'est simple parce que on a *z* qui vaut *z0* donc *ρ e puissance iΦ fois e puissance iωt* et la partie réelle de *z* ça va donner *ρ cos (ωt + Φ)* c'est ce que j'ai écris ici; voilà, maintenant si on veut calculer le module de *ρ*, ce terme là, et bien, il faut prendre le module du numérateur, c'est *α0*, c'est un réel, puis au dénominateur on prend la partie réelle qui contient ces deux termes là la partie réelle au carré plus la partie imaginaire au carré racine carrée de toutes ça, ça me donne le *ρ*.

Notes

Summary

10m 43s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0 \; (-\omega^2 - i\omega/\tau + \omega_0^2)}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)(-\omega^2 - i\omega/\tau + \omega_0^2)} \qquad z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho \cos(\omega t + \phi) \qquad tg(\phi) = \frac{Im(z_0)}{Re(z_0)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}}$$

Mécanique | 2013 27

Maintenant on doit calculer la phase alors on peut calculer *tangent de Φ* on peut le faire comme ça donc le *tangent de Φ* manifestement si je refais ici mon esquisse le nombre réel *z* avec l'angle *Φ* ici la tangente *Φ* c'est cette distance divisée par celle-là donc c'est la partie imaginaire divisée par la partie réelle, c'est ce que j'ai écris ici; maintenant pour la trouver on peut multiplier ce nombre complexe au dénominateur par son complexe conjugué donc je mets -*iω sur τ + ω0 au carré* je réécris le même terme en haut -*ω carré* - *iω sur τ + ω0 carré* j'écris la même chose en haut et en bas en bas j'ai un nombre fois son complexe conjugué, j'ai donc le module au carré et maintenant je vais pouvoir trouver la partie imaginaire elle est proportionnelle à ce terme -*ω sur τ* c'est ce que j'ai écris ici et la partie réelle avec le même coefficient de proportionnalité *ω0 au carré* - *ω au carré* c'est ce que j'ai écris là.

Notes

Summary

11m 45s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)}$$

$$z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho \cos(\omega t + \phi)$$

$$tg(\phi) = \frac{Im(z_0)}{Re(z_0)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}}$$

$$\sin\phi = \frac{-\omega/\tau}{\sqrt{(\omega/\tau)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\frac{\rho(\omega = \omega_0)}{\rho(\omega = 0)} = \omega_0 \tau \gg 1$$

Mécanique | 2013 29

On peut aussi calculer le sinus avec les mêmes considérations alors le sinus c'était la partie imaginaire divisée par le module donc on a ce terme là divisé par le module qui est ici. Je vous laisse faire une pause si vous voulez pour vérifier ce petit calcul de nombre complexe. Maintenant ce qui est important du point de vue physique le voici je regarde l'amplitude ici si τ est très grand la résonance est à peu près à ω_0 tout à l'heure je vais vous montrer un graphique où vous verrez que c'est pas exactement ω_0 qui a la fréquence de résonance mais plus τ est grand, plus c'est vrai et si on regarde l'amplitude ρ quand ω est à la valeur ω_0 et qu'on la compare à l'amplitude ρ qu'on a lorsque ω est nul c'est un petit calcul algébrique simple vous allez trouver qu'il vous reste ω_0 *fois* τ. Maintenant je vous rappelle qu'on a fait l'hypothèse que ce nombre-là $\omega_0\tau$ sans unité, ce nombre-là est beaucoup plus grand que 1, donc je suis en train de dire que l'amplitude, lorsque la fréquence appliquée est voisine de ω_0, est beaucoup plus grande que l'amplitude que j'ai de façon statique.

Notes

Summary

13m 13s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)} \qquad z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho\cos(\omega t + \phi) \qquad tg(\phi) = \frac{Im(z_0)}{Re(z_0)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}} \qquad \sin\phi = \frac{-\omega/\tau}{\sqrt{(\omega/\tau)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\frac{\rho(\omega = \omega_0)}{\rho(\omega = 0)} = \omega_0 \tau$$

Plus l'oscillateur libre s'amortit lentement, plus l'amplitude à la résonance est grande.

Mécanique | 2013 30

Repensez à votre masse pendue à un ressort le ρ de $\omega = 0$ c'est le déplacement de la masse que vous avez que vous allez infiniment lentement dans votre déplacement s de t et là vous avez le plot qui se déplace d'autant que s se déplace et vous trouvez que si maintenant vous faites ce mouvement-là à la fréquence qui est au voisinage de la fréquence propre de l'oscillateur harmonique vous avez un effet beaucoup, beaucoup plus grand. Voilà ça c'est le premier résultat physique qu'on obtient sur les résonateurs et c'est ce que j'indique ici plus l'oscillateur libre s'amortit lentement plus τ est grand plus l'amplitude à la résonance est grande voici un graphique de ce rapport ρ de ω normalisé au ρ qu'on obtient à fréquence nulle en fonction de la fréquence normalisée par cette fréquence caractéristique $\omega 0$.

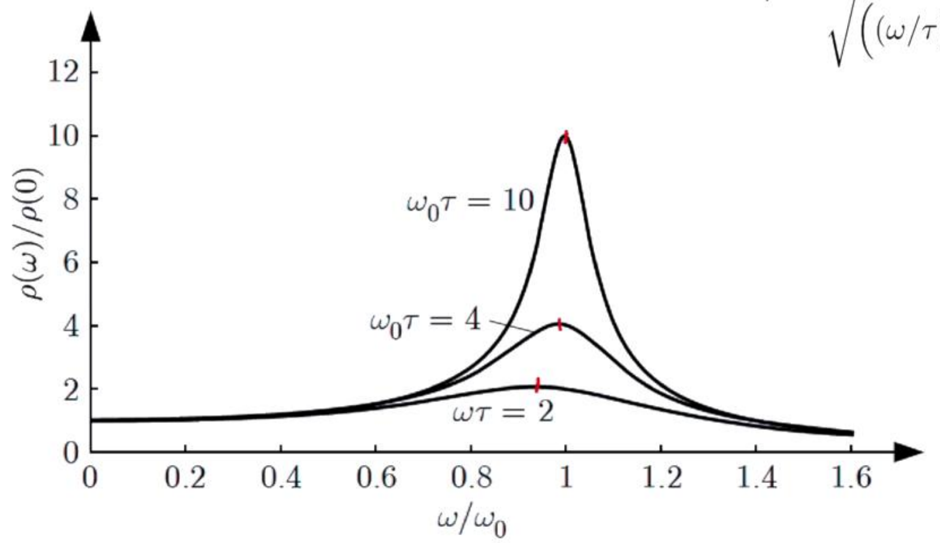
Notes

Summary

14m 46s

Spectre de la réponse harmonique

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}}$$



Alors on voit ici ce que je vais appeler le spectre d'amplitude et on a un maximum à la résonance quand *ω0τ* vaut 10 on a dix fois plus que ce qu'on a à fréquence nulle; quand *ω0τ* vaut 4 on a quatre fois plus, etc. et on détecte ici, on arrive à distinguer plus ou moins un petit décalage, qui devient de moins en moins notoire, de la fréquence au maximum.

Notes

Summary

16m 03s

Puissance moyenne dissipée

Puissance instantanée : $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

Puissance moyenne :

Maintenant puisqu'on a introduit la notion de puissance, on va l'utiliser ici vous allez voir que ça donne une image légèrement différente de notre phénomène de résonance, je commence avec la puissance instantanée *F fois v* maintenant j'aimerais calculer la puissance moyenne pour un ω donné, pourquoi ? Vous imaginez encore une fois ou peut-être vous devez vous imaginer que vous accrochez à votre doigt ce ressort et cette masse et avec la main vous exercez une force sur votre oscillateur harmonique; de temps en temps vous allez avoir le ressort qui rebondit contre vous, et de temps en temps la force ira dans l'autre sens par rapport à la vitesse du point matériel en bas du ressort donc il y aura un aller-retour d'énergie entre le point matériel et votre main; ce qu'on aimerait c'est la moyenne sur un cycle parce que ce qu'on aimerait c'est calculer sur un cycle l'énergie qu'on doit apporter au système pour maintenir cette oscillation.

Notes

Summary

16m 40s

Puissance moyenne dissipée

Puissance instantanée : $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt$$

Puissance moyenne : $\langle P \rangle = \langle \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \rangle = \big\langle f \cos(\omega t) Re\big(\dot{z}\big) \big\rangle$

$$\dot{z} = i\omega\rho\, e^{i\phi}\, e^{i\omega t} = i\omega\rho\big(\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)\big)$$

Mécanique | 2013 37

On est bien d'accord que c'est un oscillateur amorti, si maintenant j'arrête ma force d'excitation l'oscillateur va s'arrêter donc j'aimerais décrire l'apport d'énergie mécanique que je donne à ce système pour maintenir l'oscillation d'amplitude constante malgré les frottements c'est ce calcule là qu'on veut faire donc je veux calculer ce que je vais appeler la puissance moyenne et ici j'introduis c'est une parenthèse angulaire pour signifier la moyenne, donc je définis la moyenne comme l'intégrale de la puissance sur une période entre 0 et *t*, intégrale dans le temps, je divise par la période j'ai bien donc une puissance moyenne *f fois v* ça nous donne le *f cos(ωt)* et le *v* qui est ici c'est, alors comme on a calculé pour *z* on doit prendre la partie réelle de *ż ż* je peux le calculer, ça fait *iω* fois le *z0* fois le *e puissance iωt*, *e puissance iωt*, je l'ai déjà dit, ça fait le cosinus *ωt* + *Φ* plus *i sinus ωt* + *Φ*.

Notes

Summary

17m 56s

Puissance moyenne dissipée

Puissance instantanée : $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt$$

Puissance moyenne : $\langle P \rangle = \langle \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \rangle = \big\langle f \cos(\omega t) Re(\dot{z}) \big\rangle$

$$\dot{z} = i\omega\rho\, e^{i\phi}\, e^{i\omega t} = i\omega\rho\big(\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)\big)$$

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \big\langle f \cos(\omega t) \sin(\omega t + \phi)(-\omega\rho) \big\rangle \\ &= \Big\langle (-\omega\rho f) \cos(\omega t)\big(\sin(\omega t)\cos(\phi) + \cos(\omega t)\sin(\phi)\big) \Big\rangle = \big\langle (-\omega\rho) f \cos^2(\omega t) \sin(\phi) \big\rangle = \frac{-1}{2} f\omega\rho \sin(\phi)\end{aligned}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m\alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1\right)}$$

Mécanique | 2013 40

Maintenant je veux la partie réelle alors là j'ai un terme imaginaire à cause du *i* qui est là devant tandis que là j'ai un *i carré* qui fait *-1* là j'ai un terme réel donc c'est le sinus qui me donne le terme réel, alors ma puissance moyenne c'est donc la moyenne de *f cos(ωt) sin(ωt + Φ)* fois ce terme, le moins vient du *i carré*, *ωρ* sont ici. Maintenant pour calculer cette moyenne je veux me débarrasser de ce *ωt + Φ*, je le fais de la manière suivante : je développe le *sin(ωt + Φ)* en *sin cos, cos, sin* c'est la règle de trigonométrie élémentaire; maintenant ici j'ai un *cos(ωt) fois sin(ωt)*, qui vaut une demie de sinus de 2*ωt*, ce terme là sur une période *t*, oscille et en moyenne vaut 0. Tandis que le terme ici donne un *cos carré ωt* et *cos carré ωt* oscille entre 0 et 1 et sa moyenne vaut une demie. Je vous laisse faire une pause si vous voulez et vérifier cette propriété très simple l'intégrale de *cos carré ωt* sur une période. Donc j'écris ici que la moyenne du *cos carré ωt* vaut une demie j'ai le signe moins que j'ai repris ici et puis j'ai le sinus *Φ*, le sinus *Φ* on l'a déjà calculé.

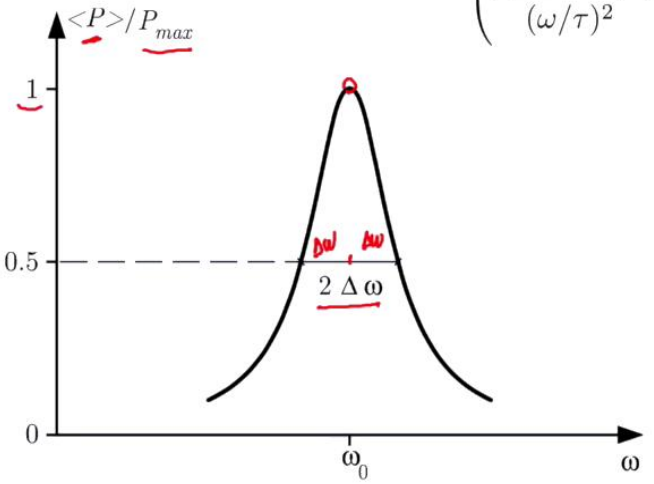
Notes

Summary

19m 25s

Spectre de puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1 \right)}$$



Et si je mets sa valeur j'obtiens cette formule-là : je vais maintenant vous montrer un graphique de cette formule-là voici donc le *P moyen* et ce que je me propose de faire dans ce dessein là c'est de normaliser *P* par rapport à la valeur au maximum. Vous voyez j'ai normalisé pour qu'on ait 1 au maximum alors c'est un petit exercice d'analyse que vous pouvez faire vous pouvez calculer *P moyen* en fonction de *ω* et chercher l'extremum; ce n'est plus tout à fait comme tout à l'heure, on n'a pas exactement la même fonction, parce que si je multiplie par *ω sur τ au carré* ici on a bien le même dénominateur mais là on aura un *ω carré* qui apparaît, donc c'est plus la même fonction si on cherche son maximum on va trouver qu'il est *ω0* quel que soit *τ* et quand *ω* vaut *ω0 carré* ce terme est nul tout ce dénominateur vaut 1 donc on a cette amplitude-là et c'est par rapport à cette amplitude-là, pardon, c'est pas une amplitude, c'est par rapport à cette puissance-là qu'on a normalisé; et maintenant dans la pratique quelque chose qui est extrêmement commode c'est de discuter la largeur de cette résonance alors j'ai ici, imaginez que j'avais *ω0* j'appelle cette largeur *2 fois Δω*, ça veut dire que j'ai un *Δω* ici, et là aussi; maintenant quand est-ce qu'on arrive à la mi-hauteur ?

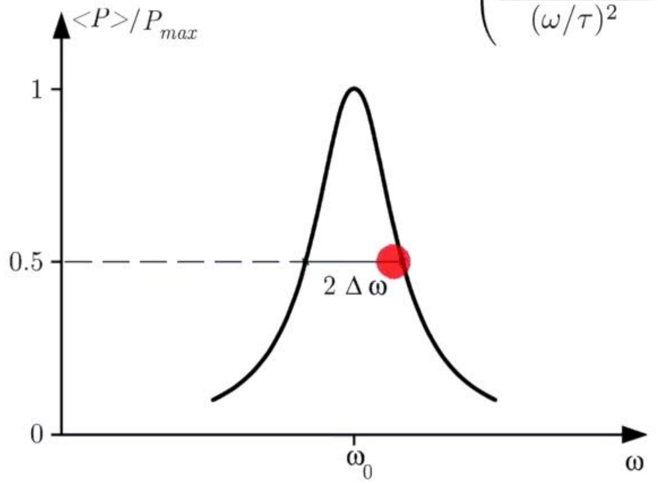
Notes

Summary

21m 10s

Spectre de puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1 \right)}$$



Puissance moitié du maximum :

$$\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} = 1$$

$$|\omega_0 - \omega|(\omega_0 + \omega) = (\omega/\tau)$$

$$\Delta\omega \, 2\omega_0 \cong (\omega_0/\tau)$$

$$\boxed{2\Delta\omega = \frac{1}{\tau}}$$

Ici j'ai 1, ici c'est la mi-hauteur quand est-ce que j'arrive à la mi-hauteur ? ça vaut dire que j'ai de la moitié de ça C'est quand tout ceci vaut 1 parce qu'à ce moment-là j'ai un facteur 2 au dénominateur, donc j'écris que la condition pour arriver à la mi-hauteur c'est ceci : ceci doit valoir 1 ce que je pourrais écrire de la manière suivante : je prends la racine carrée en gardant la valeur absolue donc ici j'ai le *Δω* maintenant je suppose que j'ai une raie étroite je vais faire l'approximation que ce *ω* là c'est à peu près *ω0* et ce *ω* là c'est à peu près *ω0* aussi pour calculer le *Δω*. Cela me donne la formule suivante et si vous simplifiez par *ω0* voilà la formule importante du point de vue pratique qui nous dit que la largeur de la raie vaut 1 sur le temps de décroissance de l'amplitude lorsqu'on laisse l'oscillateur harmonique libre; donc si vous considérez un oscillateur harmonique, vous le secouez et vous le laissez tranquille, vous allez observer la décroissance de l'oscillation qui est caractérisée par *τ*, plus *τ* est grand, plus la résonance est étroite.

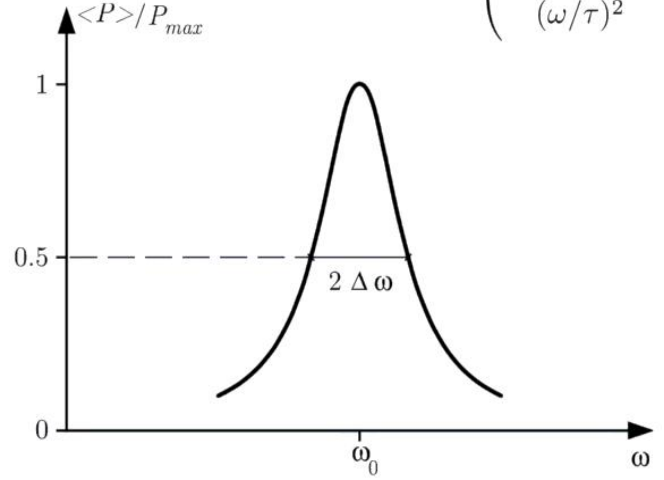
Notes

Summary

22m 59s

Spectre de puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1 \right)}$$



Puissance moitié du maximum :

$$\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} = 1$$

$$|\omega_0 - \omega|(\omega_0 + \omega) = (\omega/\tau)$$

$$\Delta\omega \, 2\omega_0 \cong (\omega_0/\tau)$$

$$\boxed{2\Delta\omega = \frac{1}{\tau}}$$

Mécanique | 2013 46

Donc quand on prend un pendule un oscillateur harmonique formé d'un ressort dans l'air τ est très grand, la raie est très étroite, il suffit de se déplacer un tout petit peu par rapport à $\omega 0$ et l'amplitude chute d'un coup; tandis que lorsqu'on est dans l'eau τ est considérablement plus court donc la raie est considérablement plus large et pour le même décalage fréquentiel on a encore pas mal d'amplitude.

Notes

Summary

24m 41s