Le phénomène de résonance

Mécanique, cours 10.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-10

Video

Le phénomène de résonance

Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion werde ich ein eminent wichtiges Konzept einführen, das der Resonanz. Ich mach es hier, da wir ein neues Werkzeug anwenden werden, die Definition der Leistung. Wir werden sehen, dass man für dieses Problem hier eine gute Beschreibung erhält, wenn man die Leistung einer Kraft betrachtet. Das Phänomen der Resonanz ist für die Ingenieure sehr wichtig. Ingenieure, welche mechanische Teile oder Gebäude konstruieren, müssen aufpassen, dass keine Eigenfrequenzen vorhanden sind, welche in der Nähe der Gebrauchfrequenz dieser Teile oder Gebäude sind. Dies werden wir später noch sehen. Aber auch Naturwissenschaftler oder Ingenieure, welche ultrasensible Sensoren konstruieren müssen, berufen sich häufig auf das Phänomen der Resonanz, wie wir noch sehen werden, um die Sensibilität ihrer Messungen zu erhöhen. Zuerst werde ich das Problem in der Form einer Bewegungsgleichung eines angeregten harmonischen Oszillators stellen. Ich werde versuchen, die harmonische Antwort zu finden. In den Videos mit den Experimenten zeige ich praktisch, was die harmonische Antwort bedeutet. Hier werden wir dieser nur in mathematischer Form begegnen.

Notes

Summary

0m 04s

Le phénomène de résonance

- Equation du mouvement
- Réponse harmonique
- Spectre
- Amplitude à la résonance
- Puissance

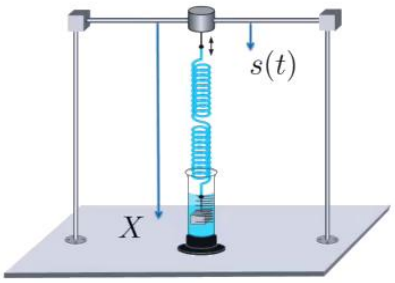
Ich werde auch das Spektrum diskutieren. Das heisst, ich werde beobachten, welche Amplitude man für welche Frequenz erhält. Wir werden eine Eigenschaft sehen, die Sensibilität eines Resonators, wenn wir dieses mit der Resonanzfrequenz anregen. Und zum Schluss, um die vorherige Lektion anzuwenden, werden wir die Leistung der Kraft berechnen, welche den Resonator anregt.

Notes

Summary

1m 36s

Equation du mouvement



$$m\ddot{X} = -k\left(X - s(t) - \ell\right) - b\dot{X} + mg$$

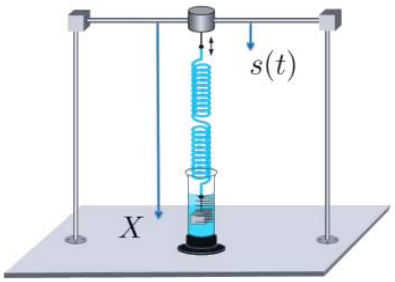
Ich stelle mir die folgende Situation vor: Ihr habt eine Feder, an welcher eine Masse befestigt ist. Wir nehmen an, dass die Reibung nicht vernachlässigbar ist, jedoch schwach ist. Deswegen werden wir viele Oszillationen beobachten, bevor die Effekte der Reibung erkennbar sind. Wir nehmen hier an, dass unser System aus Feder und Masse, hier die Feder und die Masse, in diesem Punkt an einem vibrierenden Element befestigt ist. Ein elektromagnetisches System, welchen diesen Befestigungspunkt vibrieren lässt. Um die Kinematik des Systems zu beschreiben, muss ich eine Koordinate X definieren, welche die Position des vibrierenden Elements definiert, und eine Koordinate s, welche von der Zeit abhängt, eine experimentelle Grösse ist und die Position des Befestigungspunktes definiert. Um die Bewegungsgleichung aufzuschreiben, existieren keine grossen Hindernisse. Ich kann diese Etappen überspringen und dies sofort so präsentieren: Ich wende das Gesetz: F = ma an. Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung der Position. Ich habe eine Rückstellkraft. Ich muss hier noch anmerken, dass die Kraft, welche sich in diesem Punkt auf die Masse auswirkt, eine Rückstellkraft darstellt.

Notes

Summary

2m 04s

Equation du mouvement



$$m\ddot{X} = -k\left(X - s(t) - \ell\right) - b\dot{X} + mg$$

$$F(t) = ks(t)$$

$$x = X - \ell - mg/k$$

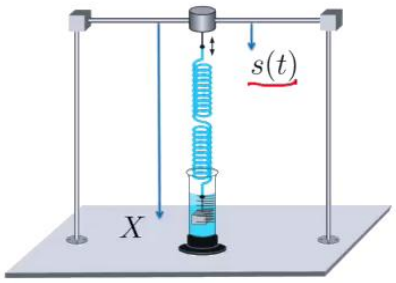
Deswegen haben wir hier ein negatives Vorzeichen. Eine Kraft, welche proportional zur Ausdehnung des Pendels ist. Dies ist der Proportionalitätskoeffizient und die Ausdehnung der Feder entspricht dem Term: *X - s*. *X - s* ist diese Distanz hier minus die Länge der Feder in der Ruhelage. Ich habe auch die Gewichtskraft und die Reibungskraft miteinbezogen. Die letztere wurde für ein Liquid formuliert. Nun möchte ich zeugen, dass dieses Problem äquivalent zum Problem des harmonsichen Oszillators ist, respektive einer an einem fixen Punkt angemachten Feder mit einer oszillierenden Kraft, welche auf den Massepunkt ausgeübt wird. Um dies zu machen, werde ich zwei Substitutionen machen. Zuerst werde ich den Term *Ks* als *F(t)* bezeichnen, was eine Kraft suggeriert. Danach werde ich einen Variabelwechsel machen. Ich werde das kleine *x* betrachten, was dem grossen *X* minus *l* (der Länge der Feder in der Ruhelage) entspricht. Mit dieser Definition, wie wir es bereits einmal getan haben, beziehe ich auch den Effekt der Gewichtskraft mit ein. Mit diesem Variabelwechsel sind die Ableitungen von *x* und *X* dieselben.

Notes

Summary

3m 30s

Equation du mouvement



$$m\ddot{X} = -k\,(X - s(t) - \ell) - b\dot{X} + mg$$

$$F(t) = ks(t)$$

$$x = X - \ell - mg/k$$

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t)$$

$$F(t) = f\cos(\omega t)$$

donné

Jedoch vereinfacht sich meine Gleichung. Sie hat nun diese Form hier. In dieser Gleichung erkennen wir jene wieder, welche wir für den harmonischen Oszillator erhalten haben, welcher durch eine Variable *x*, eine Rückstellkraft *-kx*, einer Reibungskraft und einer externen Kraft gewesen ist. Im Folgenden nehmen wir an, dass die externe Kraft von der folgenden Form ist: eine Amplitude *mal cos (ωt)*. Passt auf! Das *ω*, hier, ist durch das Experiment gegeben und kommt eigentlich von *s(t)*.

Notes

Summary

4m 52s

Passage aux nombres complexes

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t) \qquad F(t) = f\cos(\omega t)$$

On imagine un 'autre' problème :

$$m\ddot{y} = -k\,y - b\dot{y} + F_y(t) \qquad F_y(t) = f\sin(\omega t)$$

+ i

$z = x + iy$

$\cos\omega t + i\sin\omega t = e^{i\omega t}$

Nun versuchen wir, diese Gleichung mit diesem *F* zu integrieren. Um dies zu tun, schlage ich euch vor, das Problem auszuweiten und ein anderes Problem zu studieren, welches mathematisch sehr ähnlich ist. Diese Gleichung werde ich für eine Variable *y* aufstellen, wobei ich im Wesentlichen die gleiche Bewegungsgleichung erhalte. Jedoch wird die Kraft in der Form eines *sin (ωt)* sein anstatt eines *cos (ωt)*. Wieso mache ich das? Ihr werdet sehen, dass anschliessend die Gleichung sehr kompakt dargestellt werden kann, wenn mit komplexen Zahlen gearbeitet wird. Eigentlich stelle ich mir vor, dass ich diese beiden Gleichungen hier addiere. Ich ignoriere den Schluss des Textes. Ich multipliziere hier mit *i* und addiere. Ich definiere $z = x + iy$. Die Ableitungen sind naheliegend. $\dot{z}$ ergbit $\dot{x}$ plus $i\dot{y}$. Also taucht hier ein $\ddot{x} + i\ddot{y}$ auf. Dies wird uns *z point point* ergeben. Hier haben wir $x + y$, was *z* ergibt. Hier haben wir $\dot{x} + i\dot{y}$. Dies entspricht $\dot{z}$. Und hier, vielleicht muss ich euch daran erinnern, haben wir ein $\cos\omega t + i \sin\omega t$,ich hoffe, dass ihr dem bereits begegnet sind und sonst bringe ich euch dies bei, welcher dem Term "*e* hoch *iωt*" entspricht.

Notes

Summary

5m 32s

Passage aux nombres complexes

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t) \qquad F(t) = f\cos(\omega t)$$

On imagine un 'autre' problème :

$$m\ddot{y} = -k\,y - b\dot{y} + F_y(t) \qquad F_y(t) = f\sin(\omega t)$$

On multiplie par (i) et on somme :

$$m\ddot{z} = -k\,z - b\dot{z} + f\,e^{i\omega t}$$

Paramètres avec notation explicite :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = \alpha\,e^{i\omega t}$$

Hypothèse du régime harmonique :

$$z = z_0\,e^{i\omega t}$$

Damit erhalten wir diese komplexe Bewegungsgleichung. Nun, wie können wir von der komplexen Form unser ursprüngliches Problem ableiten. Dies ist einfach. Es genügt, den reellen Teil zu nehmen. Um die Schreibweise zu vereinfachen und da wir gewöhnlicherweise mit expliziten Notation arbeiten, werde ich den Bruch *k* durch *m* mit "*ω0 im Quadrat*" ersetzen. Denn wenn ich einen harmonischen Oszillator nur mit diesen beiden Terme und ohne diese beiden anderen betrachte, habe ich eine Eigenpulsation. Die Pulsation, welche wir erhalten würden, entspricht dem Term *ω0 = √k durch m*. Deswegen entscheide ich, *k durch m ω0 im Quadrat* zu nennen. Wenn ich durch *m* dividiere habe ich ein *b* durch *m*, welches *ż* multipliziert. Dieser Term muss die gleiche Einheit besitzen wie *z Punkt Punkt*. Also *b durch m* hat die Einheit *1 durch eine Zeit*. Ich wähle hier die Schreibweise *1 durch τ*. Schliesslich nenne ich *f durch m α*. Nun mache ich eine spezielle Hypothese. Ich bin nicht dabei, die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zu suchen. Ich suche nur die harmonische Lösung.

Notes

Summary

7m 13s

Passage aux nombres complexes

$$m\ddot{x} = -k\,x - b\dot{x} + F(t) \qquad F(t) = f\cos(\omega t)$$

On imagine un 'autre' problème :

$$m\ddot{y} = -k\,y - b\dot{y} + F_y(t) \qquad F_y(t) = f\sin(\omega t)$$

On multiplie par (i) et on somme :

$$m\ddot{z} = -k\,z - b\dot{z} + f\,e^{i\omega t}$$

Paramètres avec notation explicite :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = \alpha\,e^{i\omega t}$$

Hypothèse du régime harmonique :

$$z = z_0\,e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 z_0 + \frac{1}{\tau}(i\omega)z_0 + \omega_0^2 z_0 = \alpha \qquad z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)}$$

Ich nehme also an, dass die Übergangs- zustände, welche man in den Videos mit den Experimenten beobachten kann, bereits gedämpft sind. Ich warte, bis nur noch eine Oszillation in der Frequenz der ausgeübten Kraft vorhanden ist. Ich suche also eine Lösung für diese Differentialgleichung, welche mit der Pulsation *ω* oszilliert. Wenn wir also *z* in diese Gleichung einfügen und nach der Zeit ableiten, erhalten wir ein *iω* vor dem *z*. Wenn man ein *z point point* einfügen, erhält man das Quadrat von *iω*, respektive - *ω2*. Voilà das - *ω2* und das *iω*. Diesen Term haben wir nicht abgeleitet. Ich kann alles durch " e hoch iωt" dividieren. Ich habe diese Gleichung hier, in welcher wir ein *z0* haben. Hier können wir die Gleichung für *z0* auflösen. Was wir finden: Das - *ω2*, das *ω0 carré*, welches hier ist, und das *iω sur τ*, welches hier ist. Voilà die Amplitude. Hier haben wir die Amplitude unserer Oszillation des komplexen Problems.

Notes

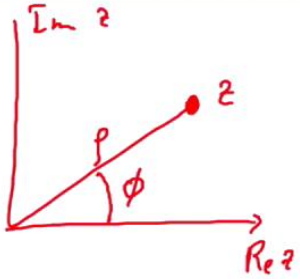
Summary

8m 43s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)}$$

$$z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$



Ich erinnere euch daran, dass die Lösung, welche wir hier finden, der harmonischen Antwort entspricht. Nun, ihr werdet sehen, dass diese Notation hier vorteilhaft ist. Als Erinnerung, wenn ich die komplexe Ebene zeichne, mit dem *reellen Teil von z* hier mit dem *imaginären Teil von z* hier. Voilà, meine komplexe Zahl *z*. Das *ρ*, welches ich hier aufgeschrieben habe, ist das Modul von *z*. *Φ* entspricht diesem Winkel hier.

Notes

Summary

10m 03s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)}$$

$$z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho\cos(\omega t + \phi)$$

$z = \rho e^{i\phi} e^{i\omega t} \Rightarrow Re(z) = \rho\cos(\omega t + \phi)$

Also das Modul. Zuerst kann ich *x* schreiben, Wenn ich die reelle Koordinate möchte, dies ist einfach, da *z* gleich *z0* ist, also *ρ e hoch iΦ mal e hoch iωt*. Der reelle Anteil von *z* wir mir also *ρ cos (ωt + Φ)* ergeben. Dies habe ich hier aufgeschrieben.

Notes

Summary

10m 43s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)} \qquad z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho\cos(\omega t + \phi) \qquad tg(\phi) = \frac{Im(z_0)}{Re(z_0)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}}$$

Wenn wir nun das Modul *ρ* berechnen möchten, diesen Term hier, müssen wir das Modul des Zählers nehmen, welches *α0* ist, eine reelle Zahl. Im Nenner nehmen wir den reellen Teil, welcher diese beiden Terme enthält. Den reellen Teil im Quadrat plus den imaginären Teil im Quadrat und alles in der Wurzel; dies ergibt mir *ρ*. Nun müssen wir die Phase berechnen. Also können wir den *Tangens von Φ* berechnen. Dies können wir so machen. Also der *Tangens von Φ*. Wenn ich hier meine Zeichnung noch einmal mache, den reellen Teil von *z* mit dem Winkel *Φ* hier. Die Tangente von *Φ* ist diese Distanz hier dividiert durch diese hier. Es ist also der imaginäre Teil dividiert durch den reellen Teil. Dies habe ich hier geschrieben. Um nun den Tangens zu finden, können wir diese komplexe Zahl im Nenner mit ihrer Konjugation multiplizieren. Ich setzte also *-iω sur τ + ω0 im Quadarat*. Ich schreibe den gleichen Term oben, *-ω carré - iω sur τ + ω0 im Quadrat* Ich habe also oben und unten das gleiche geschrieben. Unten habe ich eine mit ihrer Konjugation multiplizierte Zahl. Ich habe also das Quadrat des Moduls. Nun kann ich den imaginären Teil finden.

Notes

Summary

11m 15s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)} \qquad z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho\cos(\omega t + \phi) \qquad tg(\phi) = \frac{Im(z_0)}{Re(z_0)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}}$$

Dieser ist proportional zu -*ω durch τ*. Dies habe ich hier geschrieben. Der reelle Teil mit demselben Proporitonalitäts- koeffizienten: *ω0 im Quadrat - ω im Quadrat*. Dies habe ich hier geschrieben.

Notes

Summary

12m 59s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)} \qquad z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho\cos(\omega t + \phi) \qquad tg(\phi) = \frac{Im(z_0)}{Re(z_0)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}} \qquad \sin\phi = \frac{-\omega/\tau}{\sqrt{(\omega/\tau)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\frac{\rho(\omega = \omega_0)}{\rho(\omega = 0)} = \omega_0\tau \gg 1$$

Wir können auch den Sinus mit denselben Betrachtungen berechnen. Der Sinus ist der imaginäre Teil dividiert durch das Modul. Wir haben also diesen Term durch das Modul dividiert, welches hier ist. Ich lasse euch eine Pause machen, um, wenn ihr möchtet, um diese kleine Berechnung einer komplexen Zahl zu überprüfen. Aus einem physikalischen Standpunkt ist jedoch das Folgende wichtig, ich betrachte Amplitude hier, wenn τ sehr gross ist, ist die Resonanz ungefähr bei $\omega 0$. Bald werde ich euch eine Graphik zeigen, auf welcher ihr sehen werdet, dass es nicht exakt $\omega 0$ die Resonanzfrequenz ist. Jedoch desto grösser τ, desto eher ist dies korrekt. Wenn wir die Amplitude ρ betrachten, mit ω, welches dem Term $\omega 0$ entspricht, und wir es mit der Amplitude vergleichen, wenn ω null ist, dies ist ein bisschen Algebra, findet ihr, dass ein $\omega 0$ *mal* τ übrig bleibt. Nun erinnere ich euch an die von uns gemachte Hypothese, dass diese Nummer ohne Einheiten hier, $\omega 0\tau$, viel grösser ist als eins. Ich bin also dabei zu sagen, dass, wenn die auferlegte Frequenz in der Nähe von $\omega 0$ ist, die Amplitude viel grösser ist als jene, die ich im statischen Fall erhielte.

Notes

Summary

13m 13s

Réponse harmonique

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{\left(-\omega^2 + (i\omega/\tau) + \omega_0^2\right)} \qquad z_0 = \rho\, e^{i\phi}$$

$$x = Re(z) = \rho\cos(\omega t + \phi) \qquad tg(\phi) = \frac{Im(z_0)}{Re(z_0)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}} \qquad \sin\phi = \frac{-\omega/\tau}{\sqrt{(\omega/\tau)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\frac{\rho(\omega = \omega_0)}{\rho(\omega = 0)} = \omega_0\tau$$

Plus l'oscillateur libre s'amortit lentement,
plus l'amplitude à la résonance est grande.

Denkt noch einmal an eure an eine Feder angehängte Masse. *ρ* von *ω = 0* entspricht der von der Masse zurückgelegten Distanz, wenn die Bewegung *s* von *t* unendlich langsam ist. Hier habt ihr das vibrierende Element, wessen Bewegung durch *s* beschrieben ist. Wenn ihr nun diese Bewegung hier mit einer Frequenz in der Nähe der Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators macht, habt ihr einen viel, viel grösseren Effekt. Voilà, dies ist das erste physikalische Resultat, welches wir für den Resonator erhalten haben. Was ich hier notiert habe, desto weniger der freie Oszillator gedämpft ist, desto grösser ist *τ* und desto grösser ist die Amplitude im Resonanzfall.

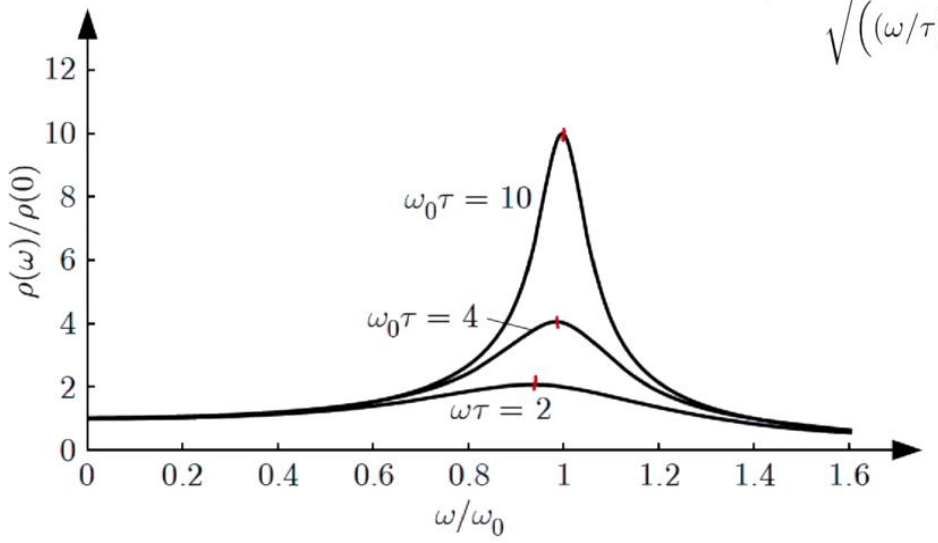
Notes

Summary

14m 46s

Spectre de la réponse harmonique

$$\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left((\omega/\tau)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right)}}$$



Hier habt ihr eine Graphik dieses mit *ρ* normalisierten Verhältnisses von *ρ* von *ω*, welches man bei einer Frequenz von null erhält, in Funktion der mit *ω0* normalisierten Frequenz. Hier seht ihr, was ich Amplitudenspektrum nenne. Wir beobachten ein Maximum im Resonanzfall. Wenn *ω0τ* 10 ist, existiert eine zehn mal grössere Amplitude als bei einer Frequenz von null. Wenn *ω0τ* vier ist, haben wir eine vier mal so grosse, etc. Wir stellen hier fest, dass eine kleine Verschiebung vorhanden ist, welche zur Frequenz beim Maximum immer kleiner wird.

Notes

Summary

15m 46s

Puissance moyenne dissipée

Puissance instantanée : $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

Puissance moyenne :

Da wir den Begriff der Leistung bereits eingeführt haben, werden wir diesen hier verwenden. Ihr werdet sehen, dass dies euch ein leicht anderes Bild des Phänomens der Resonanz geben wird. Ich beginne mit der Momentanleistung *F fois v*. Nun, Ich möchte die durchschnittliche Leistung für eine gegebenes ω berechnen, wieso? Stellt euch noch einmal vor, dass ihr diese Feder mit der Masse an eurem Daumen aufhängt. Mit eurer Hand übt ihr eine Kraft auf den harmonischen Oszillator aus. Von Zeit zu Zeit wird euch die Feder wegspringen. Und von Zeit zu Zeit wird die ausgeübte Kraft sich der Geschwindigkeit des Massepunkts am Ende der Feder entgegensetzen. Es existiert also ein Hin und Zurück von Energie zwischen dem Massepunkt und eurer Hand. Was uns interessiert, ist der Durchschnitt auf einem Zyklus. Wir möchten berechnen, wie viel Energie man dem System beifügen muss, um die Oszillation aufrechtzuerhalten. Wir sind uns einig, dass es sich um einen gedämpften Oszillator handelt. Wenn nun die Feder nicht mehr angeregt wird, stoppt der Oszillator. Ich möchte also die Energiemenge beschreiben, welche nötig ist, um die Amplitude der Oszillation trotz der Reibung konstant zu halten.

Notes

Summary

16m 40s

Puissance moyenne dissipée

Puissance instantanée : $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

Puissance moyenne : $\langle P \rangle = \langle \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \rangle = \langle f \cos(\omega t) Re(\dot{z}) \rangle$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt$$

$$\dot{z} = i\omega\rho\, e^{i\phi}\, e^{i\omega t} = i\omega\rho\big(\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)\big)$$

$$\langle P \rangle = \langle f \cos(\omega t) \sin(\omega t + \phi)(-\omega\rho) \rangle$$

Diese Berechnung werden wir machen. Ich werde also die durchschnittliche Leistung berechnen. Was ich hier einführe, sind die dreieckigen Klammern, welche den Durchschnitt signifizieren. Ich definiere den Durchschnitt, als das Integral der Leistung über einer Periode von null zu t dividiert durch die Periode. Ich habe also eine Durchschnittsleistung. *f mal v*, das ergibt *f cos(ωt)*. Für das *v*, welches hier ist, müssen wir dieselben Berechnungen wie zuvor für *z* anstellen. Wir müssen den reellen Teil von *ż* nehmen. *ż* kann ich berechnen. Dies macht *iω* mal *z0* mal *e hoch iωt*. *e puissance iωt*, wie ich bereits sagte, das macht cosinus *ωt + Φ* plus *i sinus ωt + Φ*. Nun möchte ich den reellen Teil. Ich habe hier einen imaginären Teil, durch das *i*, welches hier davor ist, Wohingegen hier habe ich ein *i im Quadrat*, was *-1* ergibt und dadurch habe ich hier ein reeller Term. Es ist also der Sinus, welcher den reellen Teil ergibt. Die Durchschnittsleistung ist also der Durchschnitt von *f cos(ωt) sin(ωt + Φ)* mit diesem Term multipliziert. Das Minus kommt vom *i im Quadrat</i. ωρ sind hier.*

Notes

Summary

18m 18s

Puissance moyenne dissipée

Puissance instantanée : $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

Puissance moyenne : $\langle P \rangle = \langle \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \rangle = \big\langle f \cos(\omega t) Re\big(\dot{z}\big) \big\rangle$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt$$

$$\dot{z} = i\omega\rho\, e^{i\phi}\, e^{i\omega t} = i\omega\rho\big(\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)\big)$$

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \big\langle f \cos(\omega t) \sin(\omega t + \phi)(-\omega\rho) \big\rangle \\ &= \big\langle (-\omega\rho f) \cos(\omega t) \big(\sin(\omega t)\cos(\phi) + \cos(\omega t)\sin(\phi)\big) \big\rangle = \big\langle (-\omega\rho) f \cos^2(\omega t) \sin(\phi) \big\rangle = \frac{-1}{2} f\omega\rho \sin(\phi)\end{aligned}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m\alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1 \right)}$$

Um diesen Durchschnitt auszurechnen, möchte ich dieses ωt + Φ loswerden. Ich mache dies auf folgende Weise. Ich entwickle den sin(ωt + Φ) in einen sin cos. Dies ist eine elementare Regel der Trigonometrie. Nun habe ich hier einen cos(ωt) mal sin(ωt), welcher umgeformt ein Zweitel sinus von 2ωt ergibt. Dieser Term hier, während einer Periode t, oszilliert und ist im Durchschnitt null. Jedoch dieser Term hier ergibt cos im Quadrat ωt, welcher zwischen null und eins oszilliert. Sein Durchschnitt ist ein zweitel. Ich lasse euch eine Pause machen, um, wenn ihr möchtet, dies simple Eigenschaft, das Integral von cos im Quadrat ωt über eine Periode, zu beweisen. Ich schreibe also hier, dass der Durchschnitt von cos im Quadrat ωt ein Zweitel ist. Ich habe ein minus Zeiche, welches von hier stammt. Dann habe ich den sinus Φ, welchen wir bereits berechnet haben. Wenn ich diesen Wert einsetze, erhalte ich die folgende Formel hier. Ich werde euch nun eine Graphik dieser Formel zeigen.

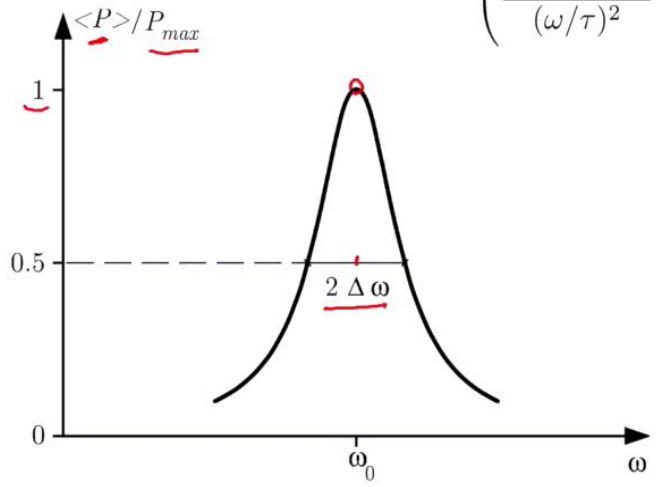
Notes

Summary

19m 54s

Spectre de puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1 \right)}$$



Hier ist der Durchschnitt von P. In dieser Zeichnung hier, normalisiere ich P mit dem Wert im Maximum. Seht, ich habe die Kurve normalisiert, damit im Maximum eins ist. Dies ist eine kleine Analysis-Aufgabe, welche ihr lösen könnt. Ihr könnt den Durchschnitt von P berechnen in Abhängigkeit von ω und sein Extremum suchen. Es ist nicht genau das gleich wie zuvor. Wir haben nicht mehr die gleiche Funktion, denn wenn ich mit ω durch τ im Quadrat hier multipliziere, haben wir denselben Nenner, jedoch würde hier ein ω im Quadrat auftauchen. Dies ist also nicht mehr dieselbe Funktion. Wenn wir sein Maximum suchen würden, fänden wir, dass dieses ω0 ist, unabhängig von τ. Wenn ω ω0 im Quadrat ist, ist dieser Term hier null und der Nenner ist eins. Wir haben also diese Amplitude hier und es ist im Verhältnis zu dieser Amplitude hier. Entschuldigung, dies ist keine Amplitude. Es ist im Verhältnis zu dieser Leistung hier, zu welcher wir normalisieren. Nun, in der Praxis ist es gebräuchlich, die Weite dieser Resonanz zu diskutieren. Stellt euch vor ich hätte ω0. Ich nenne diese Weite 2 fois Δω.

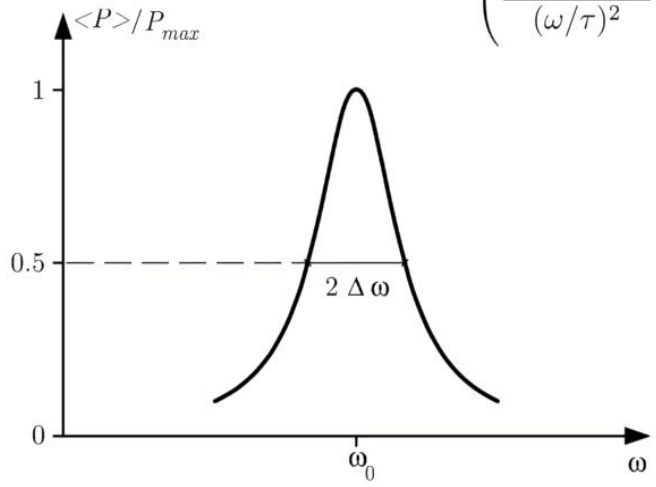
Notes

Summary

21m 22s

Spectre de puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1 \right)}$$



Puissance moitié du maximum :

$$\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} = 1$$

$$|\omega_0 - \omega|(\omega_0 + \omega) = (\omega/\tau)$$

$$\Delta\omega \, 2\omega_0 \cong (\omega_0/\tau)$$

$$2\Delta\omega = \frac{1}{\tau}$$

Dies bedeutet, ich habe ein Δω hier und eines hier. Nun wann erreichen wir die halbe Höhe? Hier habe ich eins und hier ist die halbe Höhe. Wann erreiche ich die halbe Höhe? Dies will heissen, ich habe die Hälfte von dem. Dies ist, wenn alles hier eins ist.1 Denn in diesem Moment, habe ich einen Faktor zwei im Nenner.2 Ich notiere also die Bedingung, um in der halben Höhe anzukommen. Es ist das folgende: Dies muss eins sein.1 Ich könnte es auch auf folgende Art und Weise schreiben: Ich nehme die Quadratwurzel, indem ich den Betrag betrachte. Also hier habe ich den Δω. Nun nehme ich an, dass ich hier einen schmalen Scheitel habe. Ich mache die Annäherung, dass ω in etwa ω0 ist. Dieses ω ist auch ungefähr ω0. Diese Annäherungen sind dazu da, Δω zu berechnen. Dies ergibt mir die folgende Formel. Wenn wir mit ω0 vereinfachen, voilà: Eine in der Praxis sehr wichtige Formel, welche uns sagt, dass die Weite des Scheitels eins ist während der Abnahme der Amplitude, wenn eine freie harmonische Oszillation vorhanden ist. Wenn ihr also einen harmonischen Oszillator beobachtet, ihn einmal spannt und danach frei oszillieren lässt, werdet ihr die Abnahme der Amplitude beobachten, welche durch τ charakterisiert ist.

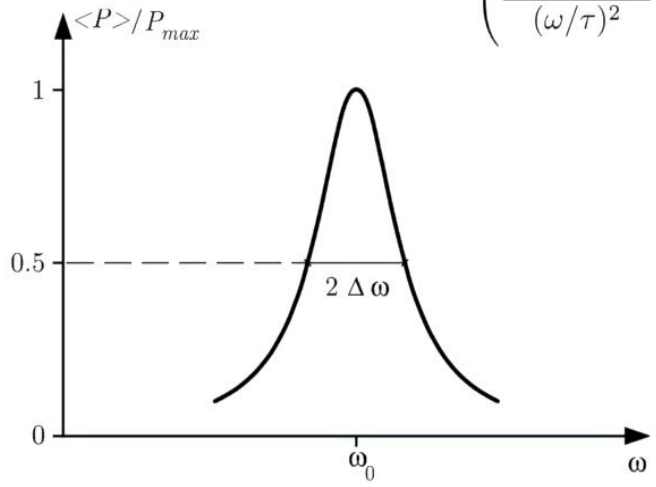
Notes

Summary

22m 51s

Spectre de puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} + 1 \right)}$$



Puissance moitié du maximum :

$$\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{(\omega/\tau)^2} = 1$$

$$|\omega_0 - \omega|(\omega_0 + \omega) = (\omega/\tau)$$

$$\Delta\omega \, 2\omega_0 \cong (\omega_0/\tau)$$

$$2\Delta\omega = \frac{1}{\tau}$$

Desto grösser τ, desto enger ist der Resonanz- bereich. Also wenn wir ein Pendel, respektive einen harmonischen Oszillator bestehend aus einer mit Luft umgebenen Feder nehmen und τ sehr gross ist, dann wird man einen sehr schmalen Scheitel vorfinden. Es ist ausreichend, sich nur ein bisschen von ω0 wegzubewegen und die Amplitude verkleinert sich massiv. Wenn man dasselbe Experiment jedoch im Wasser macht, ist ω0 viel kleiner, und deswegen existiert auch eine viel breitere Scheitel. Für dieselbe Abweichung von der Resonanz- frequenz beobachtet man noch eine relativ grosse Amplitude.

Notes

Summary

24m 35s