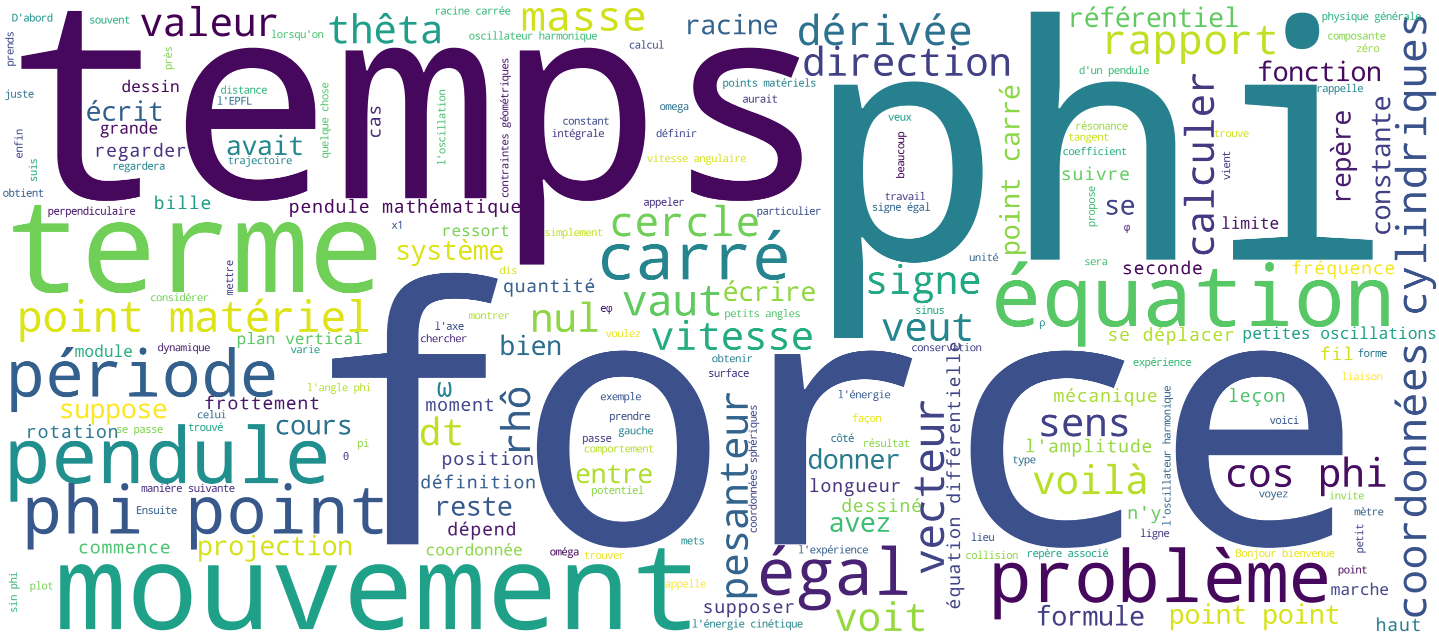
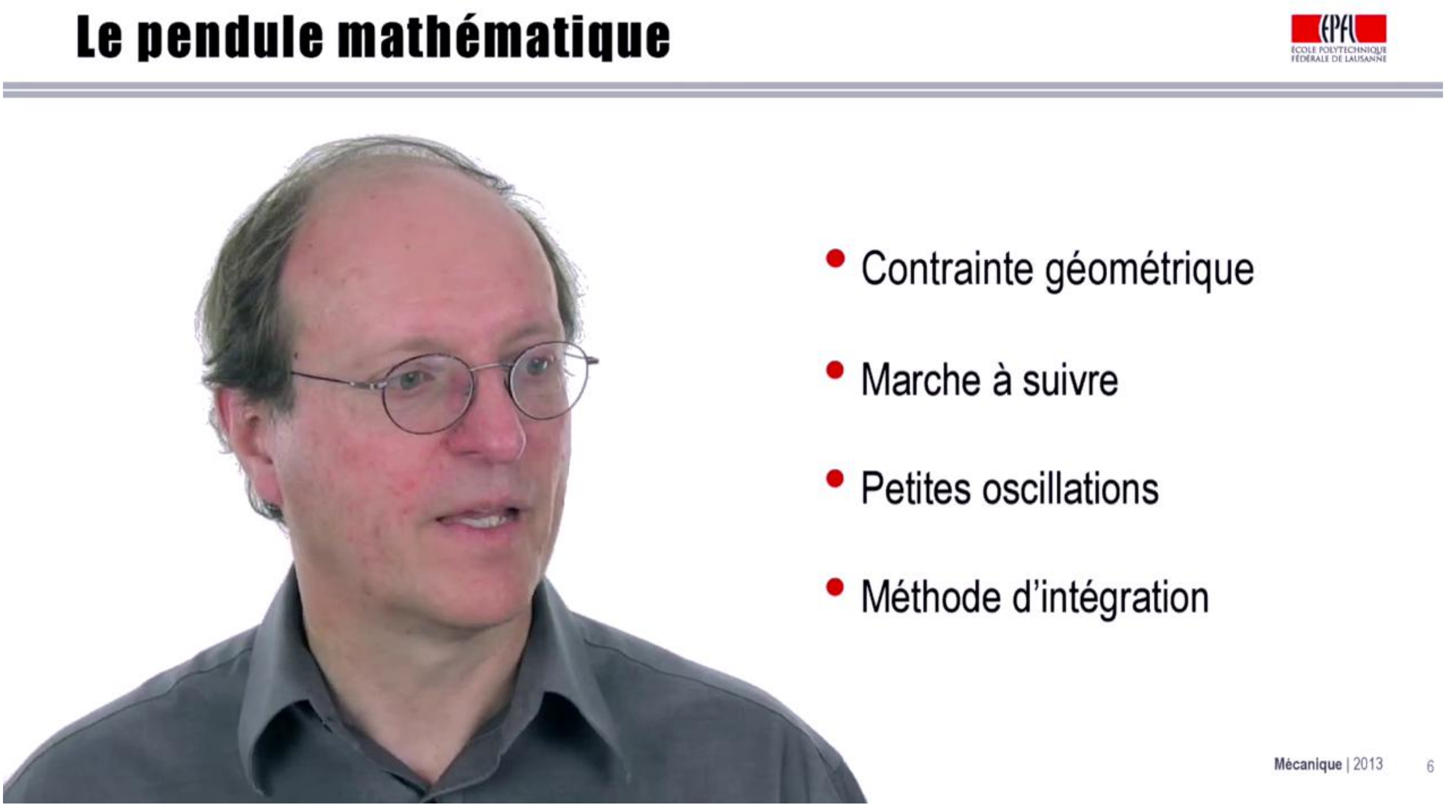
Le pendule mathématique

Mécanique, cours 9.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-9



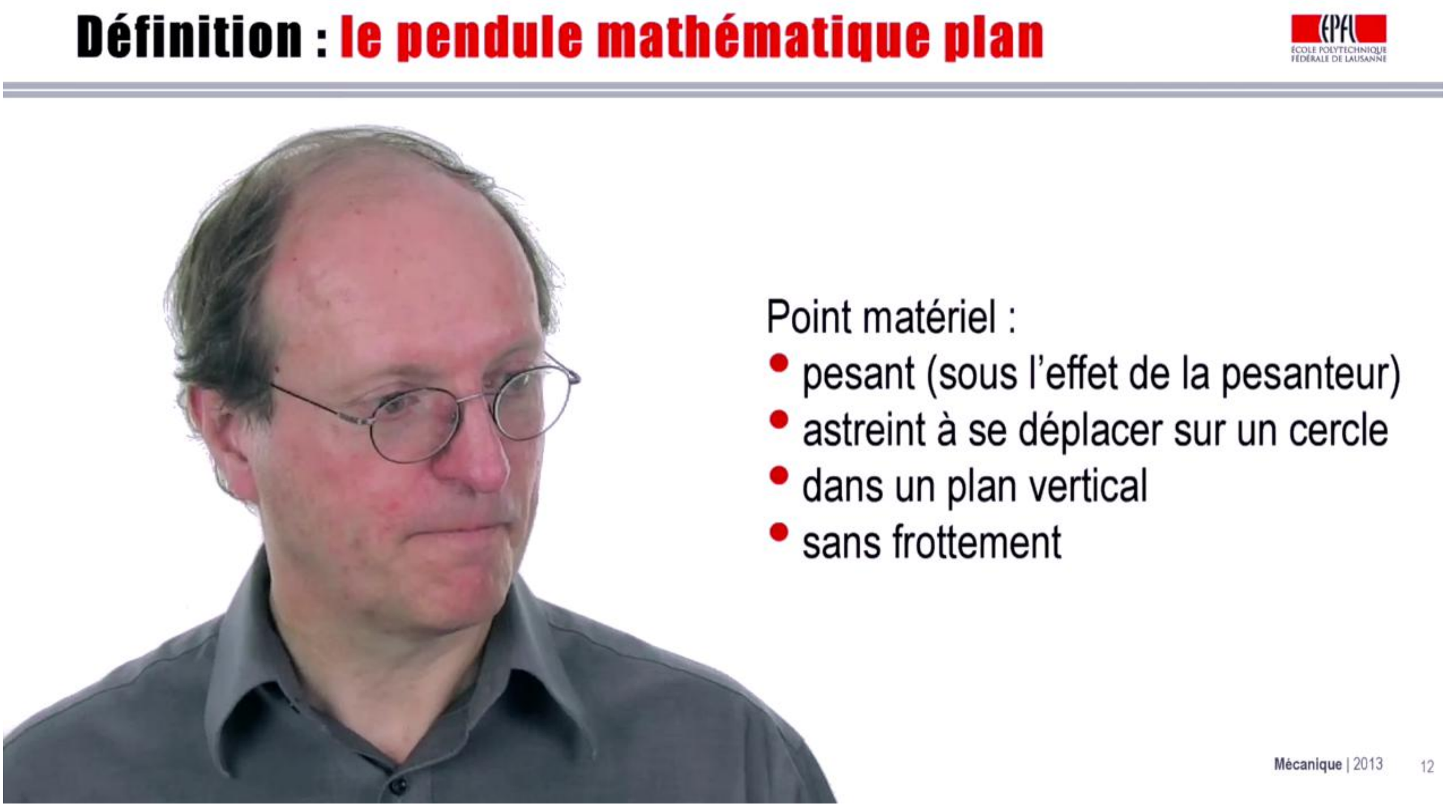


Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, je traite de problèmes de points matériels astreints à se déplacer sur une surface ou une ligne donnée. Ici, je vais regarder en détail un problème de ce type, le problème d'un pendule idéalisé, appelé le pendule mathématique. Le problème du pendule a son importance historique, puisque Galilée, déjà, avait observé le comportement des pendules. En particulier, il avait remarqué que la période d'un pendule ne dépend pas de la masse qu'on accroche au pendule. Un résultat que nous allons retrouver ici. Alors, je vais commencer par définir le pendule comme un problème de point matériel avec une contrainte géométrique. Je vais ensuite appliquer la marche à suivre que je préconise pour tous les problèmes de mécanique. On va obtenir des équations du mouvement, et on regardera le comportement de ces équations, ou si vous voulez, on regardera le comportement prédit par ces équations, lorsqu'on a de petites oscillations du pendule autour de l'équilibre. Ensuite, je montrerai comment aborder l'intégration de cette équation du mouvement, par une méthode fort utile en mécanique.

Notes

Summary

0m 04s



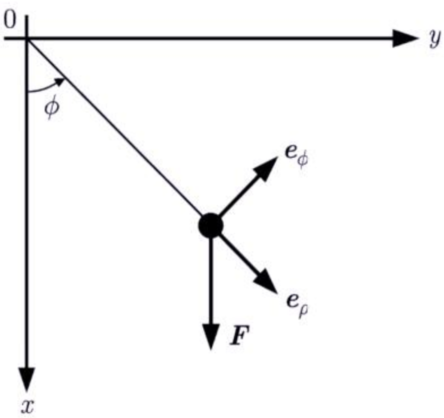
Alors, je commence par la définition de ce que je vais appeler le pendule mathématique plan. D'abord, on va considérer qu'on a un point matériel, on va supposer qu'il est sous l'effet de la pesanteur, on dira que c'est un point matériel pesant. On dit que ce point matériel est astreint à se déplacer sur un cercle, encore une fois, c'est une façon d'évacuer toutes sortes de détails sur les mécanismes qui assurent que le point matériel oscille à une distance constante d'un point du référentiel. On suppose que le mouvement a lieu dans un plan vertical, et enfin, qu'il n'y a pas de frottement.

Notes

Summary

1m 33s

Référentiel, coordonnées, repère



Coordonnées cylindriques :

$$(\rho, \phi, z)$$

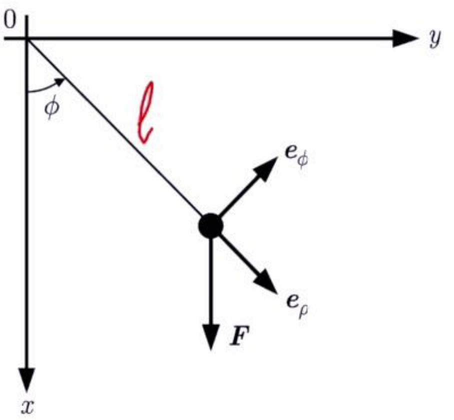
Mécanique | 2013 16

Je commence ma marche à suivre avec la définition du référentiel, pour un problème de pendule, il suffit de prendre l'auditoire ou le laboratoire où je fais mon expérience. Je matérialise mon référentiel par un système de coordonnées cartésiennes. je représente la force de la pesanteur, en la notant F, sans spécifier plus avant ce que vaut F, sinon qu'elle est verticale. J'aimerais décrire le mouvement de ce pendule, avec les coordonnées qui sont les plus commodes. Manifestement, le mouvement d'un pendule est caractérisé par l'oscillation ou la variation de cet angle, donc je vais me proposer d'utiliser les coordonnées cylindriques et utiliser l'angle phi des coordonnées cylindriques, pour repérer la position de mon pendule. Je recommande fortement de construire le système d'axes cartésiens de façon à ce qu'on ait toujours la définition standard des coordonnées cylindriques. Par exemple, l'angle phi doit être, d'après notre définition, l'écart par rapport à l'axe x, c'est pour ça que cet axe-là, je ne l'ai pas appelé z, je l'ai appelé x, pour avoir, encore une fois, mon angle phi qui apparaît ici, et qui décrit, de façon très commode, l'oscillation du pendule.

Notes

Summary

2m 22s



Coordonnées cylindriques :

$$(\rho, \phi, z)$$

Contraintes géométriques :

$$z = 0$$
$$\rho = \ell$$

Mécanique | 2013 17

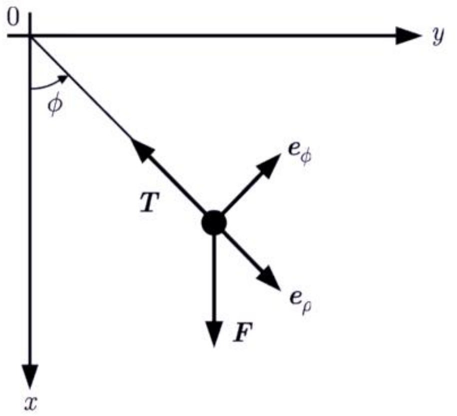
J'ai dessiné aussi, les vecteurs e rhô et e phi, du repère associé aux coordonnées cylindriques. Maintenant, dans ce problème-là, on a des contraintes géométriques. On va supposer qu'on reste dans un plan vertical, si x est vertical, z est horizontal, on n'a pas de mouvement dans la direction z, donc on a une contrainte sur z, z est nul en tout temps. Et rhô vaut la longueur du fil que j'ai notée l.

Notes

Summary

4m 05s

Bilan des forces



- Pesanteur
- Force de liaison

$$\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_\rho$$

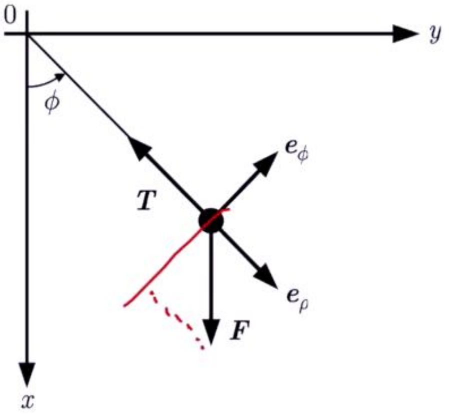
Je passe maintenant à la deuxième étape de notre marche à suivre, C'est l'établissement du bilan des forces. Alors, on a bien sûr la force de la pesanteur que j'ai appelée ici F. J'ai la force, si on avait un fil, manifestement, on aurait la force que le fil exerce, T. Si on avait plutôt dessiné l'arc de cercle ici, on aurait le même T, qui représenterait la force de réaction du cercle sur le point matériel. J'ai donc, la pesanteur et la force de liaison, les deux seules forces qui vont intervenir dans ce problème. La force de liaison, T, je vais l'écrire comme ceci. En l'écrivant comme cela, je me conforme à mon dessin, j'ai dessiné T dans ce sens, parce que mon intuition me dit que T est dirigé dans ce sens-là. Dans ce cas-là c'est évident, si on étendait le cercle jusqu'à la verticale vers le haut, on serait peut-être moins sûr du signe de T. Donc, je reviens à cette position-là, T est dirigé dans ce sens. Je vais supposer T positif et mettre un signe moins. Souvent, les étudiants sont troublés et se demandent dans quel sens ils doivent mettre T. Ce que je dis ici, c'est qu'il faut écrire le T ici, qui corresponde à ce qu'on a dessiné.

Notes

Summary

4m 41s

Bilan des forces



- Pesanteur
- Force de liaison

$$\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\boldsymbol{F} = F\left(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\,\boldsymbol{e}_\phi\right)$$

Mécanique | 2013 22

De cette manière, si, à la fin du calcul, on trouve que T est positif, ça veut dire qu'on avait raison, ce T était dans le bon sens, si à la fin du calcul, ou dans un certain régime et pour certaines positions, on trouve T négatif, T négatif, ça veut dire que la force T sera dans le sens de e rhô, dans l'autre sens. Donc ici, à ce stade de la résolution du problème, on ne fait que mettre ici une projection qui correspond à ce qu'on a dessiné, là. Pour la force de la pesanteur, à ce stade, je ne présume pas, je ne dis pas F égal mg, je vais juste écrire, F. Je dois projeter cette force sur le repère associé aux coordonnées cylindriques. Ici j'ai l'angle phi, donc j'ai cos phi dans la direction e rhô. Je dois avoir un sin phi, avec un signe moins, parce que la projection de F sera du côté opposé à la direction donnée par e phi. e phi est toujours dans le sens du phi croissant. Donc j'ai mis ici un un signe moins, mes signes sont justes par inspection du graphique, tant que mes angles sont aigus.

Notes

Summary

6m 19s

Cinématique

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\,\boldsymbol{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\,\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Contraintes géométriques (liaisons)

$$\rho = \ell \implies \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$z = 0 \implies \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

$$\boldsymbol{a} = \left(-\ell\dot{\phi}^2\right)\,\boldsymbol{e}_\rho + \left(\ell\ddot{\phi}\right)\boldsymbol{e}_\phi$$

Mécanique | 2013 28

Prochaine étape de ma marche à suivre : la cinématique. Ici, nous voulons utiliser les coordonnées cylindriques. Donc, je vais chercher dans le formulaire l'expression de l'accélération vectorielle projetée sur le repère des coordonnées cylindriques. Je dois appliquer les contraintes géométriques, d'une part, la coordonnée rhô est une constante qui vaut l, la longueur du fil. Donc ici, rhô point et rhô point point sont nuls. Ce terme-là est nul, ce terme-là est nul aussi. D'autre part, on est dans le plan vertical, donc z égal 0, z point point est nul, ce terme-là est nul. Il me reste deux termes à mon accélération vectorielle, et vous vous souvenez qu'on est sur un cercle, on a un terme en e rhô, c'est une accélération centripète, qui vaut l phi point carré, dirigée vers le centre du cercle, et le l phi point point est le long de e phi, e phi est tangent au cercle. On a une accélération tangentielle qui vaut l phi point point.

Notes

Summary

7m 49s

Equation du mouvement

Dynamique : $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{T} = m\boldsymbol{a}$

$$-m\ell\dot{\phi}^2 = F\cos\phi - T$$

$$m\ell\ddot{\phi} = -F\sin\phi$$

détermine le mouven

Remarque d'importance historique :
si le mouvement est indépendant de la masse, alors :

$$F = m\,g$$

Mécanique | 2013 33

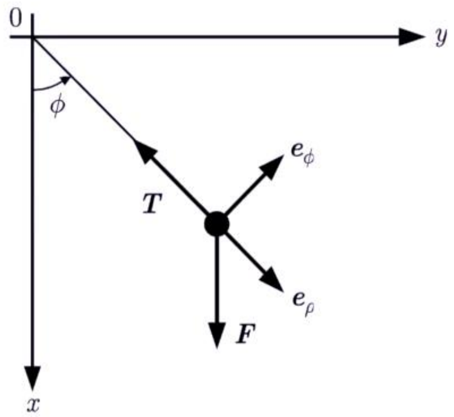
Maintenant, nous pouvons dériver les équations du mouvement. Nous allons utiliser la deuxième loi de Newton, F = ma. Ici on a deux forces, on a la pesanteur, on a la force de liaison, et voilà masse fois accélération. On a projeté toutes les grandeurs vectorielles ici, au préalable, donc, on est prêt à écrire les équations du mouvement, que voici. On a deux inconnues dans ces deux équations-là, il y a phi, la fonction phi de T, et il y a la fonction t de T. En principe, la pesanteur est connue, je fais maintenant juste cette remarque par rapport à l'observation de Galilée, Galilée a observé que la dynamique du pendule ne dépendait pas de la masse. Cette équation-là va nous donner la dynamique, le phi de T, si on veut que cette équation-là ne dépende pas de la masse, il faut que la masse tombe de l'équation. Il faut donc écrire F qui vaut m fois g, à ce moment-là, les m s'annulent des deux côtés du signe égal, il n'y a plus de masse dans cette équation-là, et on a ce qu'on voulait, une équation du mouvement qui est indépendante de la masse. Une fois qu'on a trouvé cette équation du mouvement, disons qu'on sache l'intégrer, on peut trouver phi de T. Phi de T on le met ici, et dans phi point. Et l'autre équation va nous donner T.

Notes

Summary

9m 15s

Petites oscillations autour d'un équilibre



$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

Petits angles : $\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\phi$

Oscillateur harmonique !

Pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

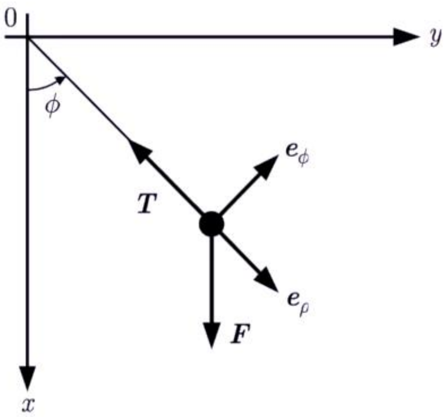
Je regarde maintenant les petites oscillations, prévues par cette équation du mouvement. Donc, j'imagine, que le pendule est ici en bas, et que donc phi est petit. Phi petit, on va modéliser phi petit en remplaçant le sinus phi par phi. Pour les petits angles, mon équation, à la limite des petits angles, mon équation du mouvement devient comme ceci. En attendant, je fais une pause pour vous donner le temps de reconnaître cette équation différentielle. Alors, cette équation différentielle, c'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. On a introduit l'oscillateur harmonique pour une masse accrochée à un ressort, on avait donc une équation différentielle de cette forme pour une coordonnée cartésienne, ici, on a une coordonnée angulaire, mais du point de vue mathématique, on a la même forme d'équation, donc on va dire qu'on a un mouvement équivalent. On a un oscillateur harmonique, dont la pulsation vaut oméga, donné par racine de g sur l. Dans l'oscillateur harmonique, on avait quelque chose du type x point point égal moins oméga carré, x. Et on avait appelé oméga la pulsation. Donc ici, on a oméga, qui vaut racine de g sur l.

Notes

Summary

10m 52s

Petites oscillations autour d'un équilibre



$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

Petits angles : $\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\phi$

Oscillateur harmonique !

Pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

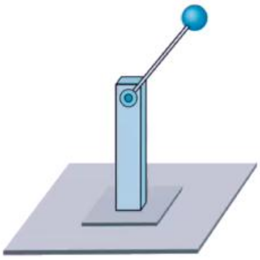
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

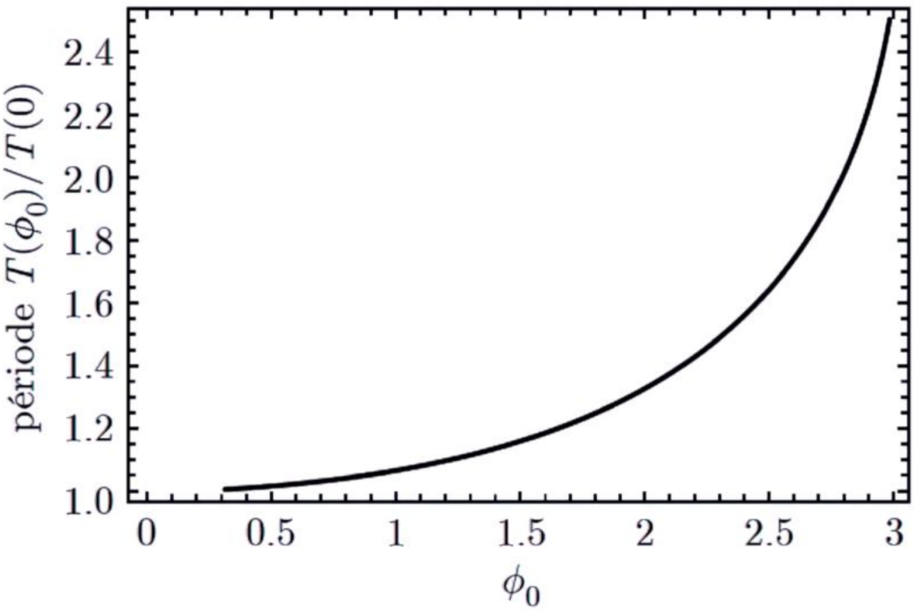
Je rappelle que la pulsation oméga, c'est 2 pi sur la période, donc on obtient, pour la période, 2 pi fois racine carrée de l sur g. On note que g est en mètres par seconde au carré, ici on a des mètres, la racine carrée nous donne des secondes, c'est bien l'unité d'une période.

Notes

Summary

12m 25s





Mécanique | 2013 42

Maintenant, je viens de considérer la limite des petits angles, qu'est-ce qui se passe aux grands angles? Alors, je peux imaginer un pendule qui est construit de la manière suivante: vous avez un point matériel, lié au point fixe par une barre rigide, on présume que la barre est légère, et qu'on peut ignorer sa masse. Quand on fait l'expérience, comme on le voit sur les vidéos, on voit très clairement que si on part de très haut, la période qu'on observe est beaucoup plus grande que la période qu'on a quand on a les petites oscillations autour de la position d'équilibre. Je peux faire un dessin utilisant le modèle théorique, j'ai dessiné ici l'amplitude phi 0 qui est l'amplitude de l'oscillation, donc, c'est l'amplitude initiale. Ici, je reporte la période, normalisée, par la période à la limite des petites oscillations. Donc ici, on a une petite oscillation, la fonction tend vers un, et ce qu'on voit, c'est que si on a de grandes oscillations, trois c'est voisin de pi, donc on est là en haut, on a, pratiquement, une période qui est deux fois plus grande. Donc c'est très clairement différent, la période du pendule mathématique dépend de l'amplitude qu'on donne à ce pendule.

Notes

Summary

12m 53s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\,\cos\phi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi}\Big) = 0$$

Si maintenant, on veut obtenir cette courbe-là, donc le comportement du pendule à n'importe quel angle, on doit repartir de l'équation du mouvement initial, qu'on avait trouvée donc dans le cas général, et on doit chercher à l'intégrer. On repère ici une équation différentielle qui a la forme suivante : ici on a une fonction de phi, et là on a la dérivée deuxième de phi. Dans un tel cas, on peut faire la manipulation suivante : je multiplie l'équation par phi point, et maintenant, quand je regarde ce terme-là, j'y reconnais la dérivée par rapport au temps de phi point carré, à un coefficient près. De même, ici j'ai moins sin phi, phi point, j'y reconnais la dérivée par rapport au temps de cos phi. C'est ce que j'ai écrit ici, avec les coefficients correctement placés. Maintenant, je vous mets en garde, il arrive souvent qu'un étudiant qui voit que ces deux dérivées sont égales, ait envie de dire que ce terme est égal à celui-ci. Ce n'est pas correct, il faut voir la chose comme ceci : vous avez d sur dt, de la dérivée de une demi de phi point carré, moins g sur l, cos phi. Ça, c'est nul. Donc je suis en train de dire que c'est ça qui est une constante. Donc il ne faut pas se tromper, si deux termes ont des dérivées égales, ça veut dire qu'ils sont égaux, à une constante près.

Notes

Summary

14m 28s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\,\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = \text{constante} = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2}_{0} - \underline{\frac{g}{\ell}\cos\phi_0}$$

Je l'écris comme ceci. Cette constante-là, ça doit être la valeur de une demi de phi point carré, moins g sur l, cos phi, à n'importe quel autre temps. En particulier au temps t égal 0, alors je vais noter la valeur de phi point au temps t égal 0, phi point indice 0. Et là, je vais mettre cosinus de phi 0, la valeur de phi, à t égal 0. Je suppose maintenant que, je lâche mon pendule d'un angle phi 0, mais avec une vitesse initiale nulle, donc je suppose que ce terme est nul, il ne me reste plus que ce terme-là, c'est ce que j'ai écrit ici.

Notes

Summary

16m 01s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\,\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = -\frac{g}{\ell}\,\cos\phi_0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{(\cos\phi - \cos\phi_0)}$$

$$dt = \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

Et maintenant, je peux finir l'intégration avec quelques manipulations algébriques. D'abord, je fais la chose suivante : j'écris phi point carré égal 2 g sur l, fois cos phi, moins cos phi 0. Ensuite je prends la racine carrée, alors je vais le faire, comme ceci. Phi point, ça vaut d phi sur dt. Je peux donc écrire dt égal, je passe le dt de ce côté-là du signe égal, d phi, sur la racine de 2g sur l, fois la racine de cos phi, moins cos phi 0. C'est ce que j'ai écrit à la ligne en dessous.

Notes

Summary

16m 52s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\,\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = -\frac{g}{\ell}\,\cos\phi_0$$

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

Equation horaire inversée

$\phi(t)$

$$t = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}}\left(\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\right)$$

Intégrale elliptique

Mécanique | 2013 51

J'ai le racine de 2g sur l qui vient ici, à gauche, je n'ai qu'une expression qui dépend du temps et ici, qu'une expression qui dépend de phi. Je peux maintenant intégrer, de la manière suivante, je vais intégrer entre le temps t égal 0, et un certain temps t, et de façon correspondante, j'intègre entre la valeur de phi, l'intégration est sur phi, j'intègre, depuis la valeur de phi quand t était égal à 0, c'était phi 0, et puis un certain phi, fonction de temps. L'intégrale du membre de gauche est triviale, j'ai donc t égal cette intégrale-là. Alors, j'ai intégré, mais il y a une petite difficulté, c'est que, normalement, ce qu'on appellerait l'équation horaire, ce serait phi de t, et on voit qu'ici, ce qu'on obtient, c'est t de phi. Je ne vais pas plus loin car il y a une difficulté, cette intégrale n'a pas une solution analytique simple, c'est ce qu'on appelle une intégrale elliptique. Donc on voit qu'on part d'un problème extrêmement simple, le pendule mathématique, et on tombe sur des difficultés au moment de l'intégration. Tout tableur, ou tout programme d'intégration peut calculer ceci, mais je ne peux pas en donner une expression analytique. Je peux cependant utiliser cette formule pour calculer la période.

Notes

Summary

17m 50s

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\,\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = -\frac{g}{\ell}\,\cos\phi_0$$

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

Equation horaire inversée

$\phi(t)$

$$\frac{T}{2} \cancel{t} = \int_{\phi_0}^{-\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}}\,\left(\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\right)$$

$\sim T(0)$

Intégrale elliptique

Mécanique | 2013 51

Si je vais de phi 0, à moins phi 0, j'ai fait un demi-battement, donc le temps, ici, va devenir la demi-période. On voit ici qu'on a des unités de temps, là, on retrouve un coefficient racine de l sur g qui était proportionnel à la période qu'on avait T à 0, c'est pas t égal 0, il y a des facteurs 2 pi et il y a cette racine de 2 qui est apparue, mais vous voyez pourquoi dans le dessin précédent, il était facile et naturel d'exprimer la période T pour une amplitude phi 0, en termes de la période pour une amplitude 0, ou voisine de 0. Cette méthode d'intégration peut être utilisée dans de grands nombres de cas parce que lorsqu'on fait de la mécanique, on a souvent une équation du mouvement qui a cette structure-là. Donc, ça peut être très, très utile. Voilà, j'en ai fini de l'exemple du pendule mathématique. Ce cours, je l'ai déclaré être un cours de savoir-faire, pour apprendre à résoudre des problèmes, il faut retrousser les manches et faire des problèmes par soi-même. J'arrête ma leçon ici, je vous invite à aller voir les séries d'exercices, où vous trouverez des problèmes avec des points matériels astreints à se déplacer sur des surfaces, ou des lignes particulières.

Notes

Summary

19m 29s