ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Le pendule mathématique

Mécanique, cours 9.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-9

Video

Le pendule mathématique

- Contrainte géométrique
- Marche à suivre
- Petites oscillations
- Méthode d'intégration

Mécanique | 2013 6

Hallo, wilkommen zur Vorlesung "allgemeine Physik" der EPFL. In dieser Lektion, beschäftige ich mich mit Problemen, die aus Massepunkten bestehen. Diese sind bezwungen, sich auf einer Oberfläche oder einer Linie zu bewegen. Hier werde ich so ein Problem ganauer anschauen. Es handelt sich um ein ideales Pendel, auch "mathematisches Pendel" genennt. Das Pendel-problem besitzt eine historische Wichtigkeit denn Galileus hatte schon das Verhalten von Pendeln beobachtet. Er hatte z.B. gemerkt, dass die Periodendauer eines Pendels unabhängig ist von der Masse die am Pendel hängt. Dieses Ergebnis werden wir hier auch feststellen. Ich beginne also das Pendel als Problem mit einem gezwungenen Massepunkt zu betrachten. Ich werde dann die Methode anwenden, die ich ihnen für jedes Problem der Mechanik empfehle. So bekommen wir dann die Bewegungsgleichungen und werden ihres Verhalten anschauen, oder, anders gesagt, das Verhalten das von den Gleichungen vorhergesagt wird, wenn man kleine Oszillationen um den Ruhezustand hat. Danach zeige ich Ihnen wie man die Integration mit Hilfe einer sehr nützlichen Methode lösen kann.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : le pendule mathématique plan

Point matériel :

- pesant (sous l'effet de la pesanteur)
- astreint à se déplacer sur un cercle
- dans un plan vertical
- sans frottement

Mécanique | 2013 12

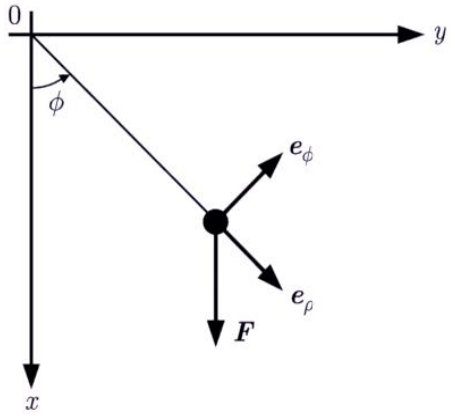
Ich beginne also mit der Definition von einem sogenannten mathematischen Pendel auf einer Ebene. Wir betrachten zuerst einen Massepunkt, auf dem die Schwerkraft wirkt. Wir nennen dies einen schweren Massepunkt. Wir behaupten, dass sich der Massepunkt auf einem Kreis bewegen muss. Dies erneut um eine ganze Menge von Details des Systems vergessen zu können, mit denen der Masspunkt mit einer konstanten Distanz zum Bezugspunkt oszilliert. Wir behaupten, dass die Bewegung auf einer vertikalen Ebene entsteht, und zuletzt, dass die Reibung gering bleibt.

Notes

Summary

1m 33s

Référentiel, coordonnées, repère



Coordonnées cylindriques :

(ρ, ϕ, z)

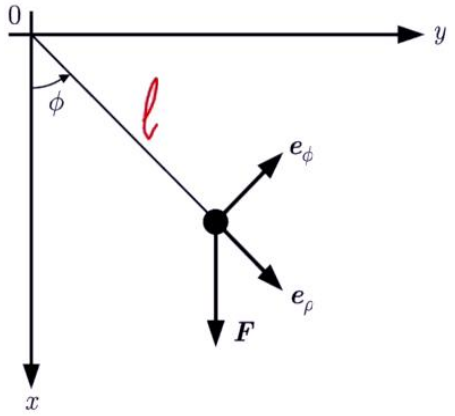
Ich beginne meine Methode an zu wenden. Ich definiere zuerst das Bezugssystem für ein Pendel-problem. Dafür reicht der Raum oder das Labor wo ich mein Experiment durchführe. Ich beschreibe mein Bezugssystem mit kartesischen Koordinaten. Ich zeichne hier die Schwerkraft, und nenne sie F, ohne zu sagen was sie für einen Wert hat. Sie ist einfach vertikal. Ich möchte die Bewegung dieses Pendels mit den besten Koordinaten die ich kenne beschreiben. Offensichtlich ist entsteht diese Bewegung aus eine Oszillation, oder Variation von diesem Winkel. Ich schlage also vor, die zylindrischen Koordinaten zu benutzen. Dafür brauche ich den Winkel Phi um die Position meines Pendels zu beschreiben. Ich empfehle Ihnen, immer ein kartesisches Achsensystem zu zeichnen, damit Sie dann immer die standard Definition der zylindrischen Koordinaten anwenden. Laut diese Definition, muss der Winkel Phi, z.B., der Winkel zur x-Achse sein. Deshalb habe ich diese Achse nicht z sondern x genennt. So habe ich also den Winkel Phi hier, der so die Oszillation des Pendels beschreibt. Praktisch. Ich habe auch die Einheitsvektoren e Rho und e Phi gezeichnet. die das Bezugssystem von den zylindrischen Koordinaten ergänzen.

Notes

Summary

2m 22s

Référentiel, coordonnées, repère



Coordonnées cylindriques :

$$(\rho, \phi, z)$$

Contraintes géométriques :

$$z = 0$$
$$\rho = \ell$$

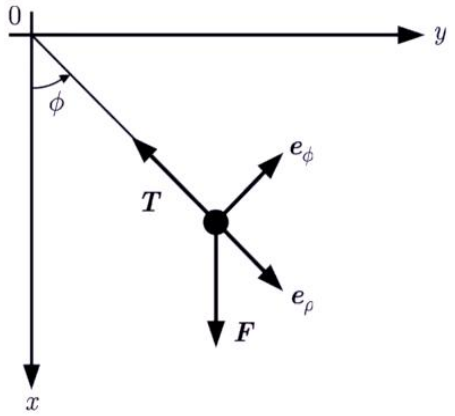
Nun, in diesem Problem hier, haben wir geometrische Zwänge. Wir behaupten, dass wir in der vertikalen Ebene bleiben. Ist x vertikal, dann ist z horizontal. Es entsteht keine Bewegung in der z-Richtung. Wir haben also einen Zwang auf z. Dieser ist die ganze Zeit null. Und Rho gilt die Länge des Fadens die l heisst.

Notes

Summary

4m 13s

Bilan des forces



- Pesanteur
- Force de liaison

$$\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_\rho$$

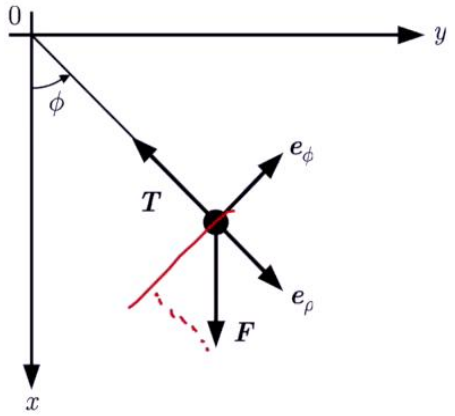
Ich komme nun zur zweiten Etape meiner Methode, bzw. die Bilanz der Kräfte. Wir haben natürlich die Schwerkraft die ich hier F genannt habe. Wenn wir hier einen Faden hätten, würde da eine Kraft herrschen, T. Wenn wir unseren Kreis hier hätten, hätten wir genau dieselbe Kraft T. Diese beschreibt die Reaktionskraft vom Kreis auf den Massepunkt. Ich habe also die Schwerkraft und die Verbindungskraft. Dies sind die zwei Kräfte die in diesem Problem eine Rolle spielen. Die Verbindungskraft T, die ich so schreibe. Da ich sie so geschrieben habe, um die Zeichnung zu respektieren, habe ich T in dieser Richtung gezeichnet. Ein weiterer Grund ist, dass ich es intuitiv ahne. In diesem Fall ist es einfach. Hätte man den Kreis bis ganz oben gebraucht, wäre man vielleicht vom Zeichen von T weniger sicher. Ich komme zu dieser Position zurück, T zeigt in diese Richtung. Ich behaupte, dass T positiv ist und schreibe hier ein Minuszeichen. Die Studenten sind da oft verwirrt und fragen in welche Richtung T wirklich zeigt. Ich antworte, dass man hier den T schreiben muss das zur Zeichnung passt. Dann, am Ende der Berechnung, wenn T positiv ist, heisst es, dass man Recht hatte, dass T in die gute Richtung zeigte.

Notes

Summary

4m 41s

Bilan des forces



- Pesanteur
- Force de liaison

$$\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\boldsymbol{F} = F\left(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\,\boldsymbol{e}_\phi\right)$$

Wenn am Ende der Berechnung, oder für gewisse Anfangsbedingungen, oder für gewisse Positionen, T negativ ist, heisst es, dass die Kraft T in die Richtung von e Rho wirkt, also in die andere Richtung. Zu diesem Punkt der Problemlösung, schreibt man da nur die Projektionen die zur Zeichnung passen. Für die Schwerkraft, gehe ich nicht davon aus, dass F gleich mg, ich schreibe nur F. Ich muss diese Kraft auf das Achsensystem von den zylindrischen Koordinaten projizieren. Hier ist der Winkel Phi. Ich habe also cos Phi in der Richtung e Rho. Ich werde einen sin Phi mit einem Minuszeichen haben, denn die Projektion von F wird in die Gegenrichtung von e Phi gemacht. e Phi zeigt immer in die Richtung mit der Phi grösser wird. Ich habe also ein Minuszeichen. Laut meine Zeichnung sind meine Zeichen richtig, solange die Winkel spitz sind.

Notes

Summary

6m 29s

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Contraintes géométriques (liaisons)

$$\rho = \ell \implies \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$z = 0 \implies \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

$$\boldsymbol{a} = \left(-\ell\dot{\phi}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\ell\ddot{\phi}\right)\boldsymbol{e}_\phi$$

Nächster Schritt meiner Methode : die Kinematik. Wir wollen hier die zylindrischen Koordinaten einsetzen. Ich suche also in meinem Formular wie man die vektorielle Beschleunigung schreibt, wenn diese auf das Achsensystem von diesen Koordinaten projiziert ist. Ich muss die geometrische Zwänge respektieren. Einerseits, die Komponente Rho ist eine Konstante die l gilt, bzw. die Länge des Fadens. Rho Punkt und Rho Doppelpunkt sind also hier null. Dieser Term ist null, sowie der da. Anderseits befinden wir uns in einer vertikalen Ebene, also z gleich 0, z Doppelpunkt ist null, dieser Term ist null. Es bleiben mir zwei Termen in meiner Beschleunigung, und Sie wissen, dass wir einen Kreis betrachten, und, dass der Term e Rho eine zentripetale Beschleunigung ist, die l Phi Punkt Quadrat gilt. Diese zeigt gegen das Zentrum und l Phi Doppelpunkt zeigt in die Richtung von e Phi. e Phi ist tangential zum Kreis. Die tangentiale Beschleunigung gilt l phi Doppelpunkt.

Notes

Summary

7m 49s

Equation du mouvement

Dynamique : $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{T} = m\boldsymbol{a}$

$$-m\ell\dot{\phi}^2 = F\cos\phi - T$$
$$m\ell\ddot{\phi} = -F\sin\phi$$

détermine le mouven

Remarque d'importance historique :
si le mouvement est indépendant de la masse, alors :

$$F = m\,g$$

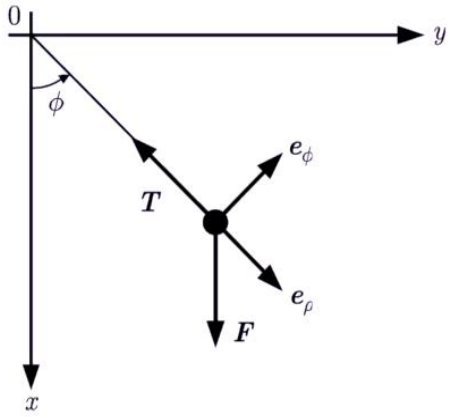
Wir können nun die Bewegungs- gleichungen schreiben. Wir setzen dafür das zweite newtonsche Gesetz ein, F = ma. Wir haben hier zwei Kräfte, die Schwerkraft, die Verbindungskraft, und hier die Masse mal die Beschleunigung. Man hat hier alle vektorielle Grössen schon projiziert, wir sind also bereit, die Bewegungs- gleichungen zu schreiben. Hier sind sie. Es stehen zwei Unbekannten in diesen Gleichungen. Die erste ist die Funktion Phi von T, und die zweite ist t von T. Normalerweise kennt man die Schwerkraft. Ich mache hier kurz eine Bemerkung über die Beobachtungen von Galileus. Galileus hatte gemerkt, dass die Dynamik eines Pendels unabhängig von der Masse ist. Diese Gleichung wird uns die Dynamik geben, das Phi von T. Um diese Gleichung von der Masse unabhängig zu machen, muss die Masse davon verschwinden. Man muss also F gleich m mal g schreiben. Auf beiden Seiten können wir somit die m vergessen, und so ist also diese Gleichung unabhängig von der Masse. Wir haben was wir wollten: eine Bewegungs- gleichung unabhängig von der Masse. Sobald man diese gefunden hat, behaupten wir sie integrieren zu wissen, kann man Phi von T finden. Phi von T setzen wir hier und in Phi Punkt ein. Dann gibt uns die zweite Gleichung T.

Notes

Summary

9m 15s

Petites oscillations autour d'un équilibre



$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

Petits angles : $\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\phi$

Oscillateur harmonique !

Pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

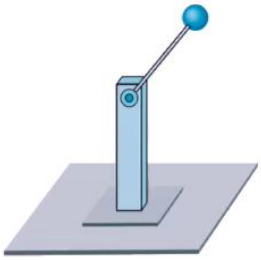
Ich beschäftige mich jetzt mit den kleinen Oszillationen, die von diese Gleichung vorhergesagt sind. Ich stelle mir also vor, dass das Pendel, hier hängt, und dass damit Phi klein ist. Um dies zu beschreiben, ersetzen wir sin Phi mit Phi. Für die kleinen Winkel, also für die Limes wenn der Winkel sehr klein wird, sieht meine Gleichung dann so aus. Ich möchte jetzt eine Pause machen, um Ihnen Zeit zu lassen, diese Gleichung zu erkennen. Diese differentielle Gleichung ist die, von einem harmonischen Oszillator. Wir kennen den harmonischen Ozillator für eine hängende Masse an eine Feder. Da hatten wir eine Differential-gleichung, die so aussah für eine kartesische Komponente. Hier ist es einen Winkel, aber mathematisch gesehen ist es eine ähnliche Gleichung. Wir sagen deswegen, dass dies eine äquivalente Bewegung ist. Wir haben einen harmonischen Oszillator mit Pulsation von Omega, die Wurzel von g über l gilt. Beim harmonischen Oszillator hatten wir etwas wie x Doppelpunkt gleich minus Omega Quadrat x. Und wir nannten die Pulsation Omega. Nun, hier haben wir Omega gleich Wurzel von g über l. Sie erinnern sich, dass Omega 2 Pi über die Periode. Man findet also für die Periode 2 Pi mal Wurzel von l über g. Man sieht, dass g in Metern mal Quadrat Sekunden angegeben ist hier sind die Metern, die Wurzel gibt uns Sekunden, welche effektiv die Einheit einer Periode sind.

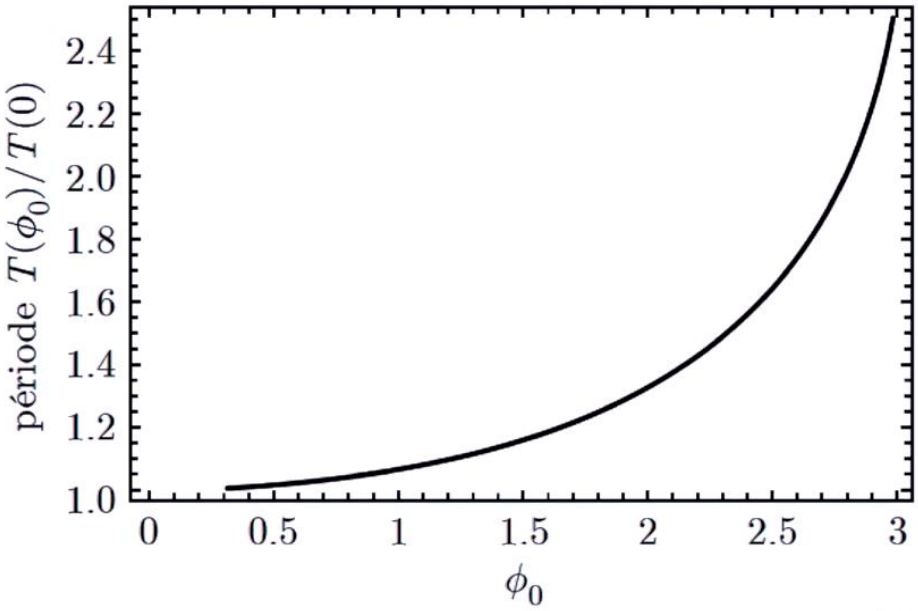
Notes

Summary

10m 52s

Expérience





Ich habe also gesehen was für kleine Winkel passiert. Was geschieht wenn sie gross sind? Ich kann mir so ein Pendel vorstellen: Sie haben einen Massepunkt, an den fixen Punkt mit einem steifen Stab verbunden. Man behauptet, dass der Stab leicht ist und vergisst also seine Masse. Wenn man das Experiment durchführt, wie man es auf den Videos sieht, sieht man ganz klar, dass wenn man sehr hoch geht, wird die beobachtete Periode viel grösser als die die wir für kleine Oszillationen hatte um die Ruheposition. Ich kann eine Zeichnung mit Hilfe eines Modells machen. Ich habe hier die Amplitude Phi 0 die die Amplitude der Oszillation ist, bzw. die initiale Amplitude. Hier habe ich die Periode über die Periode die wir für kleine Oszillationen hatten. Hier haben wir also eine kleine Oszillation und die Funktion gilt eins. Man sieht, dass bei den grossen Oszillationen, drei ist fast Pi, wir befinden uns also hier, da haben wir fast eine Periode die zwei mal grösser ist. Die Lage ist also total anders. Die Periode eines mathematischen Pendels ist von der Amplitude abhängig, die man diesem Pendel gibt. Will man jetzt diese Kurve hier haben, bzw.

Notes

Summary

12m 53s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\cos\phi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi\right) = 0$$

das Verhalten des Pendels für irgendeinen Winkel, muss man erneut von der ersten Bewegungsgleichung anfangen. Die hatte man für den generellen Fall gefunden und nun muss man sie integrieren. Wir erkennen eine Differentialgleichung die so aussieht : hier haben wir eine Funktion von Phi, und hier steht die zweite Ableitung von Phi. Für ein solchen Fall kann man so handeln : Ich multipliziere die Gleichung mit Phi Punkt, und damit erkenne ich, dass dieser Term die zeitliche Ableitung von Phi Punkt Quadrat ist, noch mit einem Koeffizient. Dasselbe hier, ich habe minus sin Phi, Phi Punkt welches die zeitliche Ableitung von cos Phi ist. Dies habe ich hier geschrieben, mit allen Koeffizienten am richtigen Ort. Ich muss Sie jetzt warnen, es kommt oft vor, dass wenn ein Student sieht, dass diese Ableitungen gleichwertig sind, möchte er sagen, dass dieser Term und der da auch gleichwertig sind. Das wäre falsch. Man müsste es so lösen : wir haben d über dt, von der Ableitung von Phi Punkt Quadrat durch zwei, minus g über l, cos Phi. Dies ist null. Was ich meine, ist, dass dies hier eine Konstante ist. Man muss sich da nicht irren : haben zwei Termen gleichwertige Ableitungen, heisst es, dass sie nur abgesehen einer Konstante gleichwertig sind.

Notes

Summary

14m 28s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell} \sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell} \sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi = \text{constante} = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2}_{0} - \frac{g}{\ell}\cos\phi_0$$

Ich schreibe es so. Diese Kontante da, muss den Wert von Phi Punkt Quadrat durch zwei minus g über l, cos Phi haben. Dies an jedem Zeitpunkt. Auch wenn t 0 ist. Ich schreibe also den Wert von Phi Punkt wenn t 0 ist : Phi Punkt 0. Und da habe ich Kosinus von Phi 0, der Wert von Phi wenn t 0 ist. Ich behaupte nun, dass ich mein Pendel mit einem Winkel Phi 0 loslasse. Dies ohne initiale Geschwindigkeit. Ich behaupte also, dass dieser Term null ist. Es bleibt mir nur noch diesen Term. Das habe ich hier geschrieben.

Notes

Summary

16m 01s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi = -\frac{g}{\ell}\cos\phi_0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\phi - \cos\phi_0\right)}$$

$$dt = \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

Nun kann ich diese Integration mit Hilfe von algebraischen Manipulationen beenden. Zuerst mache Ich folgendes : Ich schreibe Phi Punkt Quadrat gleich 2 g über l, mal cos Phi, minus cos phi 0. Dann nehme ich die Wurzel. Ich mache es so. Phi Punkt gilt d Phi über dt. Ich schreibe also, mit dt auf dieser Seite der Gleichung, dt gleich d phi über die Wurzel von 2g über l, mal die Wurzel von cos Phi, minus cos Phi 0. Dies habe ich auf der nächste Zeile geschrieben.

Notes

Summary

16m 52s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi = -\frac{g}{\ell}\cos\phi_0$$

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

Equation horaire inversée

$\phi(t)$

$$\frac{T}{2} = \int_{\phi_0}^{-\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}}\left(\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\right)$$

Intégrale elliptique

Die Wurzel von 2g über l kommt hier, links habe ich nur einen Ausdruck der von t abhängig ist. Und hier nur einen Ausdruck der von Phi abhängt. Nun kann ich so integrieren : ich integriere zwischen t gleich 0 und eine gewisse Zeit t, und entsprechend integriere ich hier integriere ich über Phi, vom Wert von Phi wenn t 0 ist, bzw. Phi 0, und ein gewisses Phi, Funktion der Zeit. Das Integral auf der linken Seite ist einfach, ich habe also t gleich dieses Integral. Gut, ich habe integriert, aber da gibt es eine Schwierigkeit. Nämlich, was wir als Zeit-Weg Funktion bezeichnen, ist normalerweise Phi von t. Und, was wir hier haben, ist t von Phi. Ich gehe nicht weiter, denn dieses Integral hat keine einfache analytische Lösung. Man nennt es ein elliptisches Integral. Wir beginnen also mit einem einfachen Problem, das Mathematische Pendel, und stossen auf Schwierigkeiten bei der Integration. Jedes Integration-Programm könnte dies berechnen, aber ich kann keine analytische Lösung schreiben. Ich kann allerdings diese Formel benutzen um die Periode zu berechnen. Gehe ich von Phi 0 bis zu Minus Phi 0, mache ich einen halben Zyklus. Also ist die Zeit hier eine halbe-Periode.

Notes

Summary

17m 50s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\phi = -\frac{g}{\ell}\cos\phi_0$$

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

Equation horaire inversée

$\phi(t)$

$\sim T(0)$

$$\frac{T}{2} = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}}\left(\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\right)$$

Intégrale elliptique

Wir sehen hier zeitliche Einheiten, hier gibt es einen Koeffizient Wurzel von l über g, der Proportional zur Periode war, T, die man bei 0 hatte. Dies ist heisst nicht t gleich 0. Es gibt Faktoren von 2 Pi und hier ist jetzt eine Wurzel von 2, aber Sie sehen auf dem Schema warum es einfach und logisch war die Periode T für eine Amplitude phi 0 mit Hilfe von der Periode für eine Amplitude von 0 oder fast 0 auszudrücken. Diese Art von Integration kann sehr oft gebraucht werden, denn, wenn es um Mechanik geht, hat man immer wieder eine Bewegungsgleichung mit einer solchen Struktur. Diese Methode ist also sehr, sehr nützlich. Nun sind wir am Ende des Beispiels vom Mathematischen Pendel. Ich habe gesagt, dass diese Lektion ein Know-How Kurs ist. Um Probleme lösen zu können, muss man hartnäckig sein und solche Beispiele selber lösen. Ich beende diese Lektion hier, und bitte Sie die Übungen anzuschauen. Da kümmern Sie sich um Probleme mit Massepunkten die bezwungen sind, sich auf einer Ebene zu bewegen oder auf gewissen Trajektorien.

Notes

Summary

19m 39s