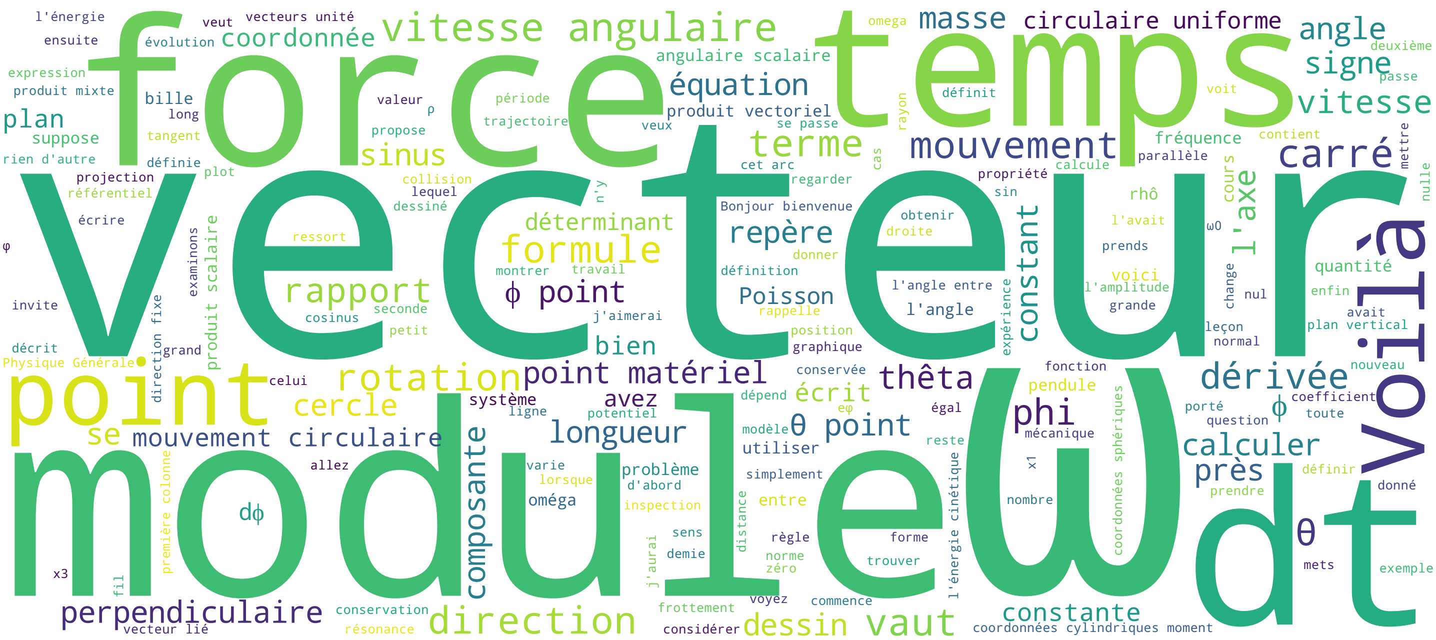
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-8

Vitesse angulaire

Mécanique, cours 8.2

Jean-Philippe Ansermet

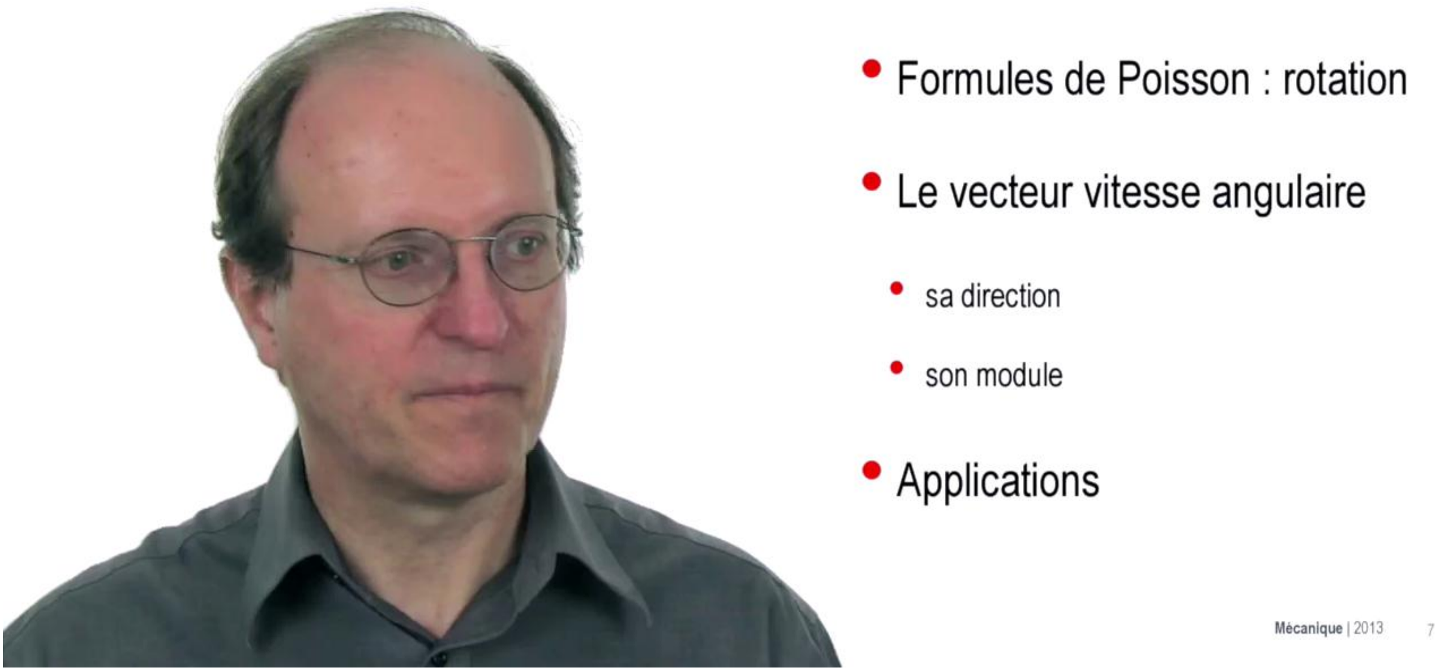


Search MOOC

Video

EPFL

Vitesse angulaire



Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, on aborde la question de décrire les rotations, en particulier la cinématique quand interviennent des rotations pour un point matériel. Alors, nous avons vu que nous pouvions exprimer les dérivées temporelles des vecteurs unités d'un repère à l'aide d'une seule expression, que nous avons appelée les formules de Poisson, qui faisaient intervenir un vecteur $\boldsymbol{\omega}$, appelé vitesse angulaire. Maintenant, nous devons comprendre l'interprétation géométrique de ce vecteur de vitesse angulaire. Alors, dans un premier temps, on va voir que les formules de Poisson décrivent une rotation. Ça va nous permettre de réaliser que le vecteur vitesse angulaire que nous avons définit est dans la direction de l'axe de rotation, et que son module n'est rien d'autre que la vitesse angulaire scalaire, que nous avions déjà définie. On vera quelques applications du formalisme, pour illustrer comment utiliser ce nouvel outil.

Notes

Summary

0m 04s

Les formules de Poisson décrivent une rotation

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1,2,3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ $\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0 \quad$ $\boldsymbol{\omega}$ définit une direction fixe

Les angles et les longueurs sont conservées

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) = 0$$

Je commence avec les formules de Poisson, que je peux généraliser à tout vecteur lié au repère ***e**1*, ***e**2*, ***e**3*, ça nous donne cette formule-là, les formules de Poisson, le cas d'un vecteur lié à ***e**1*, ***e**2*, ***e**3*. Avec ***ω*** la vitesse angulaire. Première observation, si ***r*** est parallèle à ***ω***, *d**r*** sur *dt* est nul. Donc cette équation-là décrit une évolution des vecteurs ***r*** appartenants au repère qui laisse toute une série de vecteurs inchangés, ce sont les vecteurs le long de ***ω***. En d'autres termes, pour tout ***r*** parallèle à ***ω***, ***r*** est constant, donc ***ω*** définit une direction fixe, inchangée par l'opération qui est décrite par cette équation d'évolution. Donc, première chose, on a une direction fixe. Maintenant, je vais montrer que, sous cette opération-là, les angles et les longueurs sont conservées. Je considère 2 vecteurs ***r**1* et ***r**2* liés au repère, et je vais vous prouver que la dérivée par rapport au temps de ce produit scalaire est nulle.

Notes

Summary

1m 17s

Les formules de Poisson décrivent une rotation

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ $\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0 \quad$ $\boldsymbol{\omega}$ définit une direction fixe

Les angles et les longueurs sont conservées

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) = 0 \quad = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \quad (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2)$$

Quand je l'aurai fait, j'aurai prouvé que les angles et les longueurs sont conservées. Pourquoi ? Parce que si je prend ***r2*** = ***r1***, j'aurai le module de ***r1*** au carré, et donc j'aurai trouvé que le module au carré est une constante, donc le module est constant. Si maintenant je prend ***r1*** et ***r2***, 2 vecteurs unités, le produit scalaire vaut le cosinus de l'angle entre les 2 vecteurs, et ici, j'ai que le cosinus est constant, donc l'angle entre les 2 vecteurs est constant. C'est ce que j'ai annoncé ici. Alors, examinons cette dérivée, on va porter la dérivée sur le temps, d'abord sur ***r1***, ensuite sur ***r2***, ça nous donne ces 2 termes. Voilà *d* de ***r1*** sur *dt*, *d* de ***r2*** sur *dt*. Pour *d* de ***r1*** sur *dt*, je vais utiliser cette règle, comme ceci, pour *d* de ***r2*** sur *dt* aussi, et voilà. Ici, j'observe un produit mixte : ça c'est un produit vectoriel, ça donne un vecteur, et là j'ai un produit scalaire, donc j'ai un nombre.

Notes

Summary

2m 45s

Les formules de Poisson décrivent une rotation

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1,2,3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ $\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0 \quad$ $\boldsymbol{\omega}$ définit une direction fixe

Les angles et les longueurs sont conservées

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) = 0 \quad = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \quad (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2)$$

$$= -(\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2) = 0$$

L'évolution est caractéristique d'une rotation !

Mécanique | 2013 19

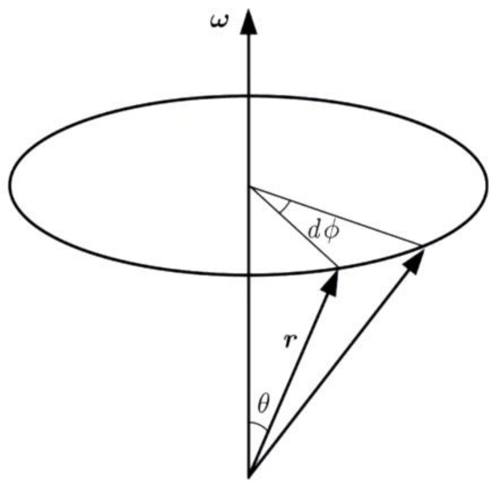
Et ce produit mixte, on l'avait vu, peut être écrit ou peut être calculé comme le déterminant, dans lequel je mets les composantes de ***r1*** sur la première colonne, les composantes de **ω** sur la deuxième colonne, les composantes de ***r2*** sur la troisième colonne. Ici, j'ai **ω** ^ ***r1***, le produit vectoriel est définit par un déterminant, si je croise 2 colonnes, je change le signe du déterminant, donc quand je croise **ω** et ***r1***, comme ceci, je change le signe. Et j'ai, de nouveau ici, dans le premier terme, un produit mixte que je peux calculer comme le déterminant, dans lequel je mets ***r1*** en première colonne, **ω** en deuxième, ***r2*** en troisième, exactement comme ici. Et j'ai un signe moins, j'ai 2 fois le même déterminant, une fois avec un signe +, une fois avec un signe -, donc c'est nul. Ainsi, j'ai prouvé que cette évolution-là est caractéristique d'une transformation qui laisse une direction fixe et tous les angles et les longueurs conservés, il s'agit d'une rotation.

Notes

Summary

3m 57s

Module du vecteur de vitesse angulaire



$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\underbrace{\left|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)\right|}_{d\vec{r}} = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{\omega}|\,dt|\sin\theta|$$

Mécanique | 2013 23

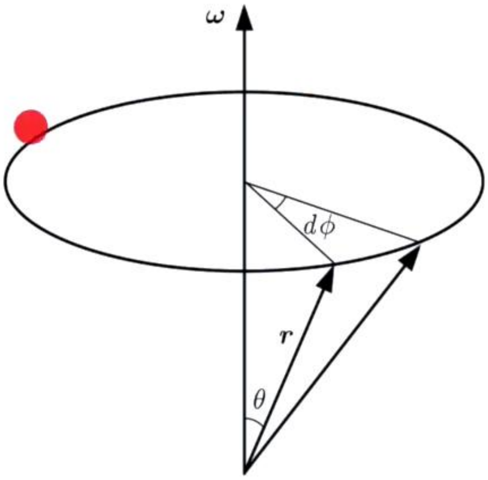
Maintenant, nous devons encore déterminer le module du vecteur de vitesse angulaire, le module de $\boldsymbol{\omega}$. Alors, je vais faire une représentation géométrique de ce que cette relation prédit. Vous avez ici le vecteur $\boldsymbol{\omega}$, qui est porté par l'axe de rotation, je suppose un vecteur $\boldsymbol{r}$, comme ceci. Et cette relation-là nous dit : $d\boldsymbol{r}$ vaut $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ fois dt. Donc si je calcule le $\boldsymbol{r}$ à un temps $t + dt$, j'aurai un dessin comme ceci, voici $\boldsymbol{r}$ de $t + dt$, et voici le $d\boldsymbol{r}$. Maintenant, j'ai $d\boldsymbol{r}$, prévu par cette équation-là, qui vaut, pardon, le module de $d\boldsymbol{r}$ vaut le module de $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ fois dt, voilà le dt, Le module de $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$, on l'a vu, c'est le module de $\boldsymbol{\omega}$ fois le module de $\boldsymbol{r}$ fois le sinus de l'angle entre les 2. Alors, sur le dessin, j'ai décidé d'appeler θ l'angle entre $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{\omega}$. Donc j'ai un sinus de θ qui apparait ici.

Notes

Summary

5m 14s

Module du vecteur de vitesse angulaire



$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\left|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)\right| = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{\omega}|\,dt|\sin\theta|$$

$$\left|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)\right| = |\boldsymbol{r}|\,|d\phi||\sin\theta|$$

$$|\boldsymbol{\omega}| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = |\dot{\phi}|$$

Mécanique | 2013 25

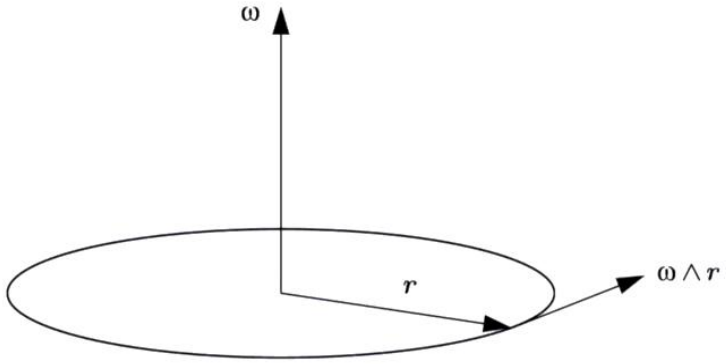
Maintenant, je peux regarder ce dessin d'une autre manière, Je peux considérer que l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{r}$ a tourné sur ce cercle d'un angle $d\phi$, Alors, la trigonométrie me dit que la longueur de cet arc, qui vaut à peu près $d\boldsymbol{r}$ aussi; j'ai de nouveau mon $d\boldsymbol{r}$, ici, et je cherche le module de $d\boldsymbol{r}$, c'est à peu près la longueur de cet arc. Il faut connaître ce rayon, ce rayon c'est module de $\boldsymbol{r}$ fois le sinus de θ. Et la longueur de l'arc, c'est $\boldsymbol{r}$ sinθ fois $d\phi$, $\boldsymbol{r}$ sinθ fois $d\phi$, c'est ce que j'ai écrit ici. Je compare ces 2 expressions, je vois que $\boldsymbol{\omega}dt$ vaut $d\phi$. Donc le module de $\boldsymbol{\omega}$ vaut le module de $d\phi$ sur dt, c'est-à-dire le module de ϕ *point*, et ce ϕ *point* là, c'est ce qu'on avait appelé la vitesse angulaire scalaire. Donc je viens d'obtenir que le module de ce $\boldsymbol{\omega}$ n'est rien d'autre que la vitesse angulaire scalaire, qu'on avait décrit pour ce mouvement-là.

Notes

Summary

6m 49s

Application : mouvement circulaire uniforme



$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r})$$

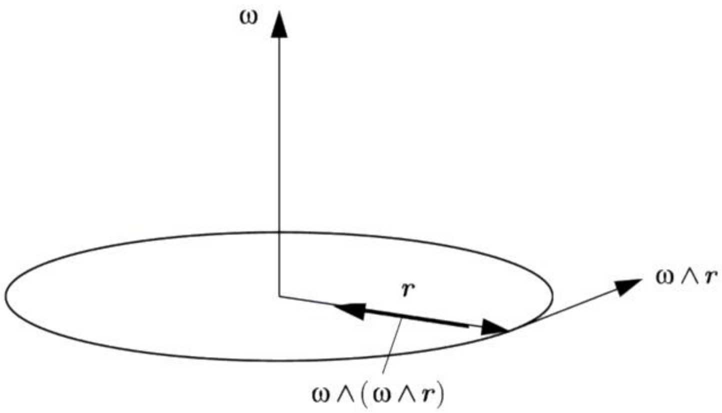
Regardons justement le mouvement circulaire uniforme. Voilà la trajectoire d'un point matériel, qui décrit un mouvement circulaire uniforme, cette fois-ci je fais un dessin en 3D. À ce mouvement-là correspond une rotation dont l'axe est ici. Donc j'ai un $\boldsymbol{\omega}$ porté par l'axe, j'ai dessiné le $\boldsymbol{\omega}$ comme ceci. Maintenant, ma formule me dit que la vitesse $d\boldsymbol{r}$ sur dt, c'est $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ pour une rotation; et j'ai donc le $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$, par inspection du dessin, je vois que le $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$, règle de la main droite, sera dans ce sens-là, comme ceci. Et cette formule, vu la propriété du produit vectoriel, on sait que $\boldsymbol{v}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{r}$, comme on est sur un cercle, on a donc $\boldsymbol{v}$ est tangent au cercle, puisque le $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{r}$. Je peux maintenant calculer l'accélération, et je suppose que j'ai un mouvement circulaire uniforme, donc $\boldsymbol{\omega}$ est constant. Alors, quand je calcule l'accélération, je calcule la dérivée par rapport au temps de la vitesse, $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$.

Notes

Summary

8m 17s

Application : mouvement circulaire uniforme



$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r})$$

$|\boldsymbol{\omega}| = \omega$ vitesse angulaire scalaire

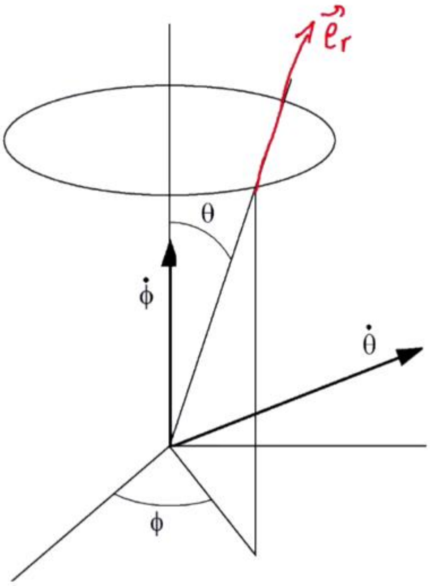
J'ai donc seulement un terme $\boldsymbol{\omega}$ ^ ($d\boldsymbol{r}$ sur dt). Pour le $d\boldsymbol{r}$ sur dt, j'applique à nouveau la formule, j'ai $\boldsymbol{\omega}$ ^ ($\boldsymbol{\omega}$ ^ $\boldsymbol{r}$). Il faut faire attention de mettre les parenthèses, sinon cette expression ne serait pas définie. Par inspection du dessin, $\boldsymbol{\omega}$, produit vectoriel avec $\boldsymbol{\omega}$ ^ $\boldsymbol{r}$ donne un vecteur dans cette direction-là, opposée à $\boldsymbol{r}$, c'est l'accélération centripète. Donc ici, j'ai une très élégante expression de l'accélération centripète pour le mouvement circulaire uniforme. $\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{\omega}$ ^ ($\boldsymbol{\omega}$ ^ $\boldsymbol{r}$) Le module de $\boldsymbol{\omega}$, encore une fois, c'est la vitesse angulaire scalaire qu'on avait introduite lorsqu'on avait regardé la première fois le mouvement circulaire uniforme.

Notes

Summary

9m 48s

Application : vitesses angulaires, c. sphériques



$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\phi} \wedge \hat{e}_r + \dot{\theta} \wedge \hat{e}_r$$

Mécanique | 2013 37

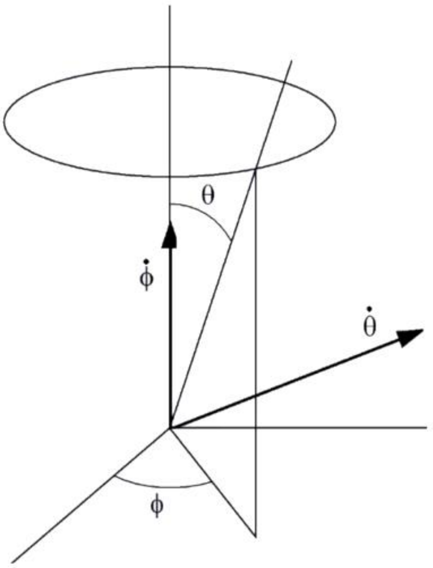
Je prends un autre exemple, voici les 2 angles qui définissent les coordonnées sphériques. Il y a encore cette longueur-là, mais pour ce qui est des angles, on a les 2 angles ici. L'angle ϕ décrit une rotation autour de cet axe, donc j'ai une vitesse angulaire associée à l'angle ϕ, qui est ***ϕ point***, un vecteur que je vais noter ***ϕ point***, porté par l'axe. L'angle θ définit une rotation dans le plan vertical qui contient ces droites, par conséquent l'axe de rotation est normal à ce plan, à peu près dans cette direction, comme ceci. Voilà le vecteur de vitesse angulaire associé à la rotation d'angle θ. Examinons par exemple l'évolution dans le temps du vecteur ***er***. Je vous le rappelle, le vecteur ***er*** est comme ceci. Maintenant, je peux utiliser les formules de Poisson, pour dire que la dérivée par rapport au temps du vecteur ***er*** doit être le ***ω*** ^ ***er***, avec le ***ω*** pour cette rotation-là, donc ***ϕ point***, et puis le ***ω*** ^ ***er*** pour la rotation définie par l'angle θ, donc c'est de ***θ point***.

Notes

Summary

10m 48s

Application : vitesses angulaires, c. sphériques



$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r + \dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$= \dot{\phi} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \;\; + \dot{\theta} \, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

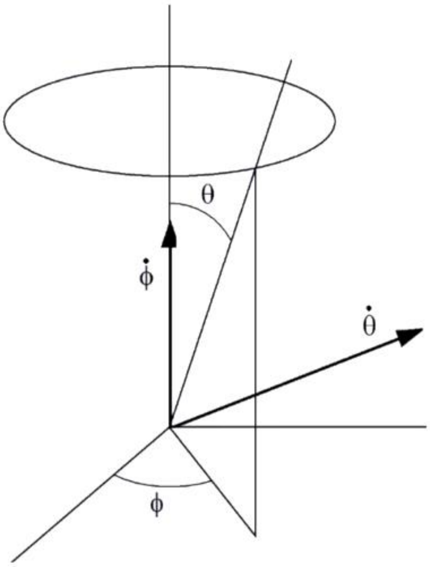
Par inspection du graphique, je peux obtenir ces 2 termes. Je vais avoir ici un vecteur qui est perpendiculaire à ***er***, et perpendiculaire à ***ϕ point***, donc perpendiculaire à ce plan-là. C'est donc dans la direction de ***eϕ***, vous vous souvenez que ***eϕ*** est normal au plan vertical qui contient cette droite et celle-là. J'aurai donc un terme comme ceci. Voilà mon ***eϕ***. Quelle est la norme de ce vecteur-là ? Et bien c'est la norme de ***ϕ point*** fois la norme de ***er*** (c'est 1) fois le sinus de l'angle compris entre les 2, donc sinus *θ*. C'est ce que j'ai ici. Pour l'autre terme, inspection du graphique, j'ai perdu mon ***er*** mais je le re-dessine volontiers, voilà ***θ point***, on doit faire ***θ point*** ^ ***er***, cette fois-ci, on a un angle droit, ***er*** appartient au plan qui contient cette droite, celle-ci et celle-là. ***θ point*** est perpendiculaire. Encore une fois, ***θ point*** est dans la direction de ***eϕ***. Par conséquent, ***θ point*** ^ ***er*** doit être dans la direction de ***eθ***, je vous rappelle que le ***eθ*** pointe dans cette direction-là, ce que j'ai écrit ici.

Notes

Summary

12m 17s

Application : vitesses angulaires, c. sphériques



$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r + \dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r$$

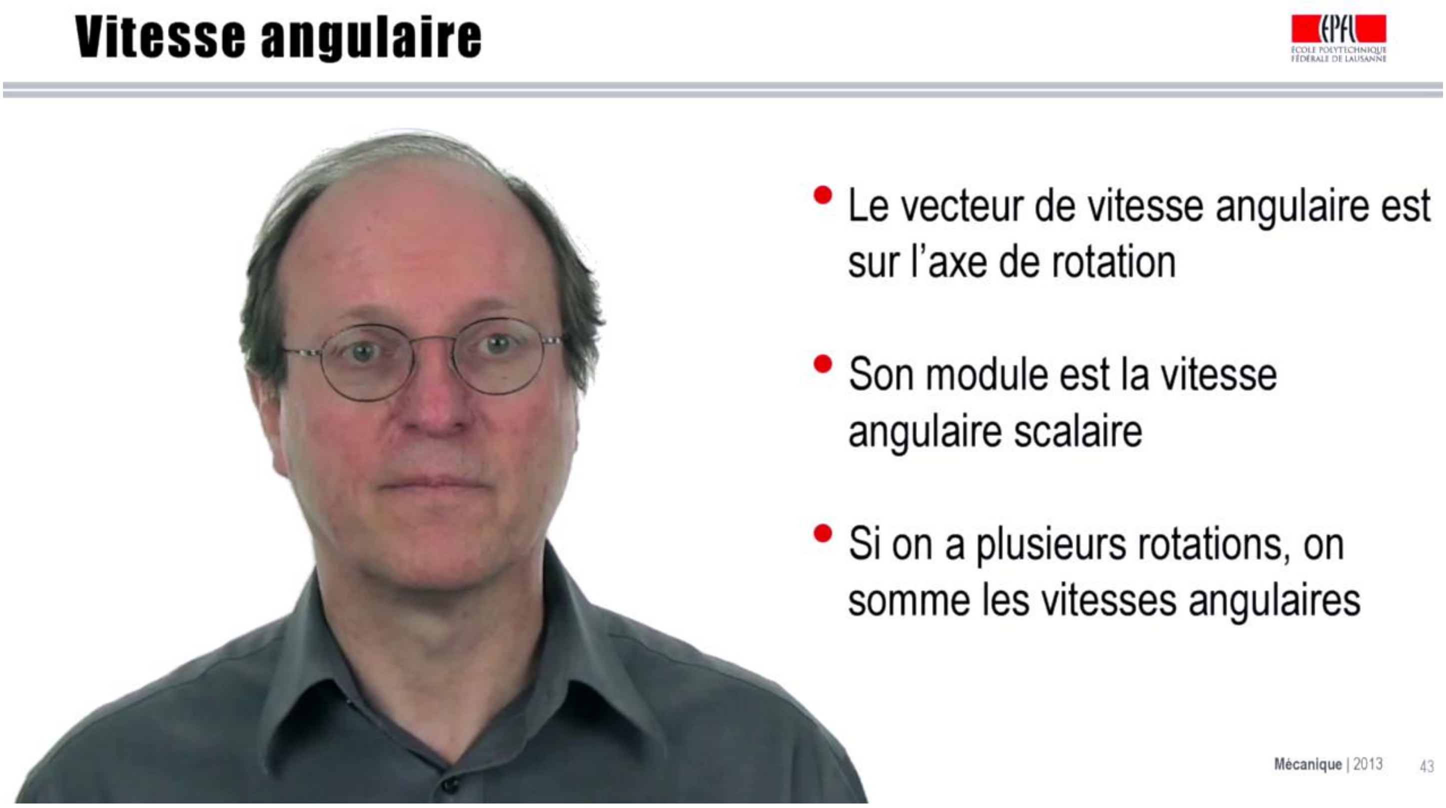
$$= \dot{\phi} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \;\; + \dot{\theta} \, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

θ point fois ***e****θ* Voilà une autre façon d'obtenir le *d* de ***er*** sur *dt*, on l'avait fait avec un argument qui n'utilisait pas encore les formules de Poisson.

Notes

Summary

13m 55s



Je résume : on a obtenu que le vecteur de vitesse angulaire est sur l'axe de rotation, que son module n'est rien d'autre que la vitesse angulaire scalaire qu'on avait déjà rencontré, et si on a plusieurs rotations, vous l'aurez remarqué, il suffit, très naturellement, de sommer les vecteurs de vitesse angulaire.

Notes

Summary

14m 07s