ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-8

Vitesse angulaire

Mécanique, cours 8.2

Jean-Philippe Ansermet

EPFL

Vitesse angulaire

- Formules de Poisson : rotation
- Le vecteur vitesse angulaire
  - sa direction
  - son module
- Applications

Mécanique | 2013 7

Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion werden wir uns die Aufgabe stellen, die Rotationen zu beschreiben. Im speziellen werden wir uns für die Kinematik eines Massenpunkts interessieren, wenn Rotationen involviert sind. Wir haben gesehen, dass wir die zeitlichen Ableitungen der Einheitsvektoren eines Koordinatensystems, mit Hilfe einer einzigen Formel ausdrücken können. Diese Formel haben wir, Poissonsche Formeln genannt und wo ein Vektor $\boldsymbol{\omega}$ vorkommt, welchen wir Winkelgeschwindigkeit genant haben. Jetzt müssen wir die geometrische interpretation dieses Winkel- geschwindigkeits Vektors verstehen. Zuerst einmal werden wir sehen, dass die Poissonschen Formeln eine Rotation beschreiben. Dies wird uns erlauben festzustellen, dass der Winkelgeschwindigkeits Vektor, den wir definiert haben, in der Richtung der Rotationsachse liegt und dass sein Betrag nichts anderes ist als die skalare Winkelgeschwindigkeit, die wir schon definiert haben. Wir werden ein paar Beispiele machen, um mit diesem neuen Werkzeug vertraut zu werden.

Notes

Summary

0m 04s

Les formules de Poisson décrivent une rotation

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ $\quad \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0$ $\quad$ $\boldsymbol{\omega}$ définit une direction fixe

Les angles et les longueurs sont conservées

Ich fange mit den Poissonschen Formel an, die ich für alle Vektoren, die mit dem Koordinatensystem ***e1***, ***e2***, ***e3*** in Verbindung stehen, verallgemeinern kann. Dies gibt uns diese Formel hier. Die poissonschen Formeln im Falle eines Vektros, der mit ***e1***, ***e2***, ***e3*** verbunden ist. Mit der Winkelgeschwindigkeit ***ω***. Eine erste Feststellung: wenn ***r*** parallel zu ***ω*** ist, dann ist *d**r*** über *dt* gleich Null. Diese Gleichung hier beschreibt also eine Entwiklung der Vektoren ***r*** die zu dem Koordinatensystem gehören und lässt einen ganzen Haufen an Vektoren unberührt, nämlich die Vektoren entlang von ***ω***. In anderen Worten, für alle ***r***, welche parallel zu ***ω*** liegen, gilt, dass ***r*** sich nicht verändert. ***ω*** definiert also eine fixe Richtung, die nicht verändert wird durch die zeitliche Entwiklung, welche durch diese Gleichung beschrieben wird. Erste Feststellung: wir haben eine fixe Richtung. Jetzt werde ich zeigen, dass unter dieser Anwendung dieser Operation, die Winkel und Längen erhalten bleiben.

Notes

Summary

1m 17s

Les formules de Poisson décrivent une rotation

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ $\quad \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0$ $\quad$ $\boldsymbol{\omega}$ définit une direction fixe

Les angles et les longueurs sont conservées

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) = 0 \quad = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \quad (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2)$$

Ich schaue mir 2 Vektoren ***r1*** und ***r2***, welche ans Koordinatensystem gebunden sind, an und ich werde Beweisen, dass die Ableitung nach der Zeit von diesem Skalarprodukt gleich Null ist. Damit werde ich bewiesen haben, dass die Winkel und die Längen erhalten bleiben. Wieso? Weil, wenn ich ***r2*** = ***r1*** nehme, so erhalte ich den Betrag im Quadrat von ***r1*** und daraus folgt dass der Betrag im Quadrat eine Konstante ist, und damit auch der Betrag. Wenn ich nun ***r1*** und ***r2***, 2 Einheitsvektoren nehme, dann ist das Skalarprodukt gleich dem Cosinus des Winkels zwischen den 2, und folglich ist der Cosinus konstant und daher ist auch der Winkel zwischen den 2 Vektoren konstant. Dies habe ich hier geschrieben. Schauen wir uns diese Ableitung mal an, wir wenden die zeitliche Ableitung zuerst auf ***r1*** und danach auf ***r2*** an. Dies gibt uns diese 2 Ausdrücke. Hier *d* vin ***r1*** über *dt*, *d* von ***r2*** über *dt*. Für *d* von ***r1*** über *dt* werde ich diese Regel benutzen, so wie hier, und für *d* von ***r2*** über *dt* auch.

Notes

Summary

2m 33s

Les formules de Poisson décrivent une rotation

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ $\quad \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0 \qquad \boldsymbol{\omega}$ définit une direction fixe

Les angles et les longueurs sont conservées

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) = 0 \quad = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \quad (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2)$$

$$= -(\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2) = 0$$

L'évolution est caractéristique d'une rotation !

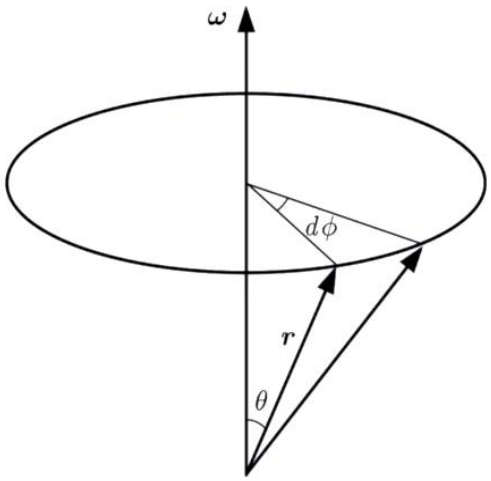
So, getan. Hier habe ich ein Spatprodukt: dies ist ein Vektorprodukt, das ergibt einen Vektor und da habe ich ein Skalarprodukt, also eine Zahl. Und dieses Spatprodukt, das habe wir gesehen, kann man als Determinante schreibe oder berechnen. In dieser Determinante komme die Komponenten von ***r1*** in die erste Kolonne und die Komponenten von ***ω*** in die Zweite und die von ***r2*** in die dritte Kolonne. Hier habe ich ***ω*** ^ ***r1***. Das Vektorprodukt ist als Determinante definiert. Wenn ich 2 Kolonnen austausche, ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Wenn ich also ***ω*** und ***r1*** vertausche, wie hier, dann ändert sich das Vorzeichen. Hier, in dem ersten Ausdruck, haben wir erneut ein Spatprodukt, welches wir als Determinante berechnen können. Jetzt kommt ***r1*** in die erste Kolonne, ***ω*** in die zweite, ***r2*** in die dritte, genau so wie hier. Es hat ein Minuszeichen. Wir haben 2 mal die selbe Determinante, einmal mit dem Vorzeichen + und einmal mit -, zusammen ergibt es also Null. Wir haben also bewiesen, dass diese Entwicklung hier, charakteristisch für eine Transformation ist, welche eine Richtung unberührt lässt und alle Winkel und Längen erhält, es handelt sich um eine Rotation.

Notes

Summary

3m 45s

Module du vecteur de vitesse angulaire



$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{\omega}|\,dt|\sin\theta|$$

$d\vec{r}$

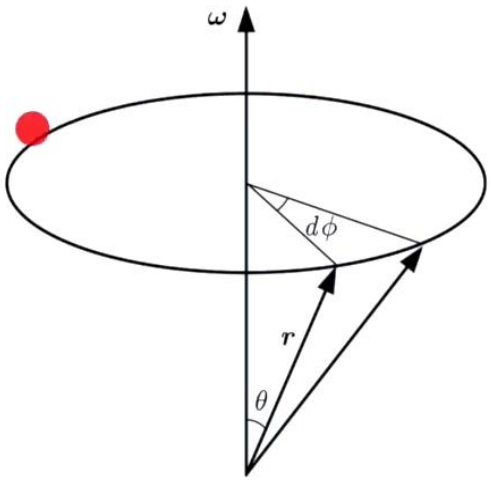
Jetzt müssen wir noch den Betrag von der Winkelgeschwindigkeit herleiten, den Betrag von $\boldsymbol{\omega}$. Ich werde eine geometrische Darstellung von der Vorhersage dieser Gleichung machen. Hier habt ihr den Vektor $\boldsymbol{\omega}$, der auf der Rotationsachse liegt. Hier ist ein Vektor $\boldsymbol{r}$. Diese Gleichung hier sagt nun: $d\boldsymbol{r}$ gleich $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ mal dt wenn ich also $\boldsymbol{r}$ zu einer Zeit $t + dt$ berechne, so erhalte ich eine Zeichnung, wie die hier. Hier ist $\boldsymbol{r}$ von $t + dt$ und hier $d\boldsymbol{r}$. Ich habe nun $d\boldsymbol{r}$, vorhergesagt von dieser Gleichung, das gleich, Entschuldigung, der Betrag von $d\boldsymbol{r}$, der gleich dem Betrag von $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ mal dt ist. Hier ist dt. Der Betrag von $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ ist gleich, das haben wir schon gesehen, dem Betrag von $\boldsymbol{\omega}$ mal dem Betrag von $\boldsymbol{r}$ mal dem Sinus des Winkels zwischen den 2. Auf der Zeichnung habe ich entschieden den Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{\omega}$ θ zu nennen. Also haben wir einen Sinus θ der hier erscheint.

Notes

Summary

5m 14s

Module du vecteur de vitesse angulaire



$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\left|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)\right| = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{\omega}|\,dt|\sin\theta|$$

$$\left|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)\right| = |\boldsymbol{r}|\,|d\phi||\sin\theta|$$

$$|\boldsymbol{\omega}| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = |\dot{\phi}|$$

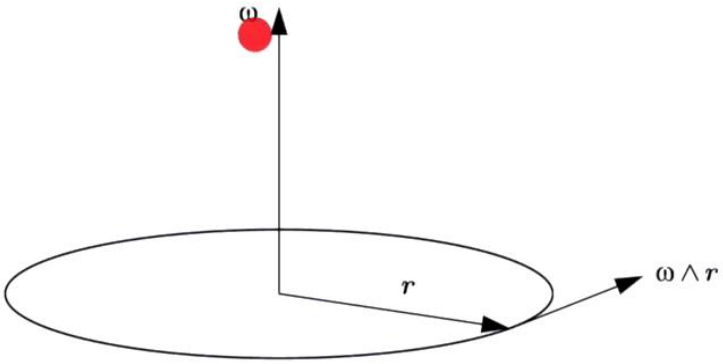
Jetzt können wir diese Zeichnung auf andere Art anschauen. Ich kann annehmen, dass das Ende des Vektors ***r*** auf einem Kreis um einen Winkel $d\phi$ sich gedreht hat. Die Trigonometrie sagt mir nun, das die Länge dieses Kreisbogens etwa gleich ***dr*** ist; Ich habe erneut mein ***dr*** hier, und ich suche den Betrag von ***dr***, dies ist ungefähr gleich der Länge von diesem Kreisbogen. Man muss diesen Radius kennen, der ist gleich dem Betrag von ***r*** mal dem Sinus von θ. Die Länge vom Kreisbogen ist gleich ***r*** sinθ mal $d\phi$, ***r*** sinθ mal $d\phi$, wie ich es hier geschrieben habe. Ich vergleiche diese 2 Ausdrücke. Ich sehe, dass $\boldsymbol{\omega}dt$ gleich $d\phi$ ist. Folglich ist der Betrag von $\boldsymbol{\omega}$ gleich dem Betrag von $d\phi$ über dt, das heisst, der Betrag von ϕ *Punkt* und diese ϕ *Punkt* hier, ist was wir skalare Winkelgeschwindigkeit genannt haben. Wir habe also das Resultat, dass der Betrag von diesem $\boldsymbol{\omega}$ nichts anderes als die skalare Winkelgeschwindigkeit, welche wir für diese Bewegung hier beschrieben haben, ist.

Notes

Summary

6m 49s

Application : mouvement circulaire uniforme



$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r})$$

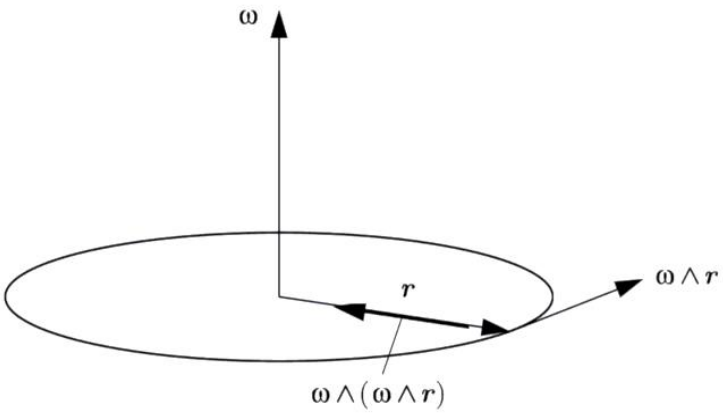
Schauen wir uns diese gleichmässige Kreisbewegung mal an. Hier ist die Flugbahn von einem Massenkpunkt, welcher eine gleichmässige Kreisbewegung macht. Diesmal habe ich die Zeichnung in 3D gemacht. Diese Bewegung hier entspricht einer Rotation mit der Achse hier. Ich habe also ein ***ω*** auf dieser Achse, ich zeichne dieses ***ω*** wie hier. Jetzt sagt mir meine Fomel, dass die Geschwindigkeit *d**r*** über *dt* gleich ***ω*** ^ ***r*** ist. Für eine Rotation. Ich habe also ***ω*** ^ ***r***, schauen wir uns die Zeichnung an, ich sehe, dass ***ω*** ^ ***r***, Recht-Hand-Regel, in dieser Richtung sein wird. So wie hier. Diese Formel hier, dank der Eigenschaft des Vektorproduktes wissen wir, dass ***v*** rechtwinklig zu ***r*** ist, da wir auf einem Kreis sind, ***v*** ist also eine Tangente von diesem Kreis, da ***ω*** ^ ***r*** rechtwinklig zu ***r*** ist. Ich kann jetzt die Beschleunigung berechnen und ich nehme and, dass ich eine gleichmässige Kreisbewegung habe. ***ω*** ist also konstant.

Notes

Summary

8m 17s

Application : mouvement circulaire uniforme



$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r})$$

$|\boldsymbol{\omega}| = \omega$ vitesse angulaire scalaire

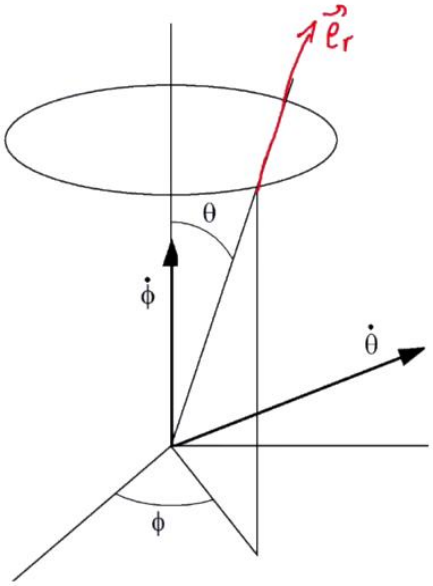
Nun, wenn ich die Beschleunigung berechne, rechne ich die Ableitung nach der Zeit von der Geschwindigkeit, ***ω*** ^ ***r*** aus. Ich habe also nur einen Ausdruck ***ω*** ^ (*d****r*** über *dt*). Bei *d****r*** über *dt* wende ich erneut die Formel an, ich habe ***ω*** ^ (***ω*** ^ ***r***). Hier müssen wir aufpassen die Klammer richtig zu machen, sonst ist dieser Ausdruck nicht definiert. Auf der Zeichnung sehen wir, ***ω***, Vektorprodukt mit ***ω*** ^ ***r*** ergibt einen Vektor in dieser Richtung, entgegen ***r***, dies ist die Zentripetalbeschleunigung. Hier habe ich einen sehr eleganten Ausdruck der Zentripetalbeschleunigung für eine gleichmässige Kreisbewegung. ***a*** = ***ω*** ^ (***ω*** ^ ***r***) Der Betrag von ***ω***, noch einmal, ist die skalare Winkelgeschwindigkeit, welche wir eingeführt haben als wir zu ersten mal die gleichmässige Kreisbewegung angeschaut haben.

Notes

Summary

9m 41s

Application : vitesses angulaires, c. sphériques



$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\phi} \wedge \hat{e}_r + \dot{\theta} \wedge \hat{e}_r$$

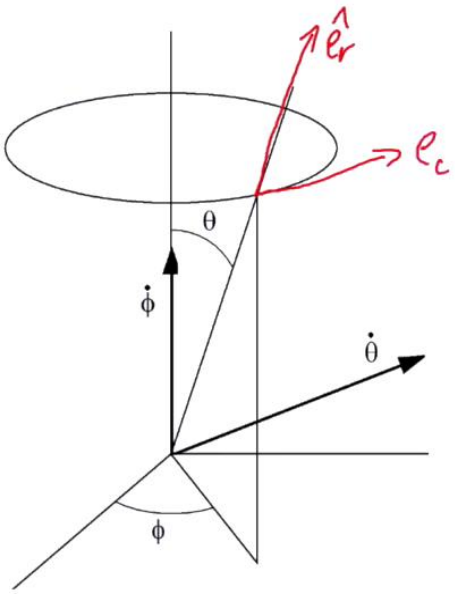
Ich gebe ein anderes Beispiel, hier sind 2 Winkel, welche die spherischen Koordinaten definieren. Es gibt noch diese Länge hier, aber was die Winkel betrifft, so haben wir diese 2 hier. Der Winkel ϕ beschreibt die Rotation um diese Achse, ich habe also eine Winkel-geschwindigkeit die zu dem Winkel ϕ gehört, nämlich ***ϕ Punkt***, ein Vektor, welche ich als ***ϕ Punkt*** auf diese Achse schreiben werde. Der Winkel θ definiert eine Rotation in der vertikalen Ebene, welche diese Geraden enthält, folglich ist die Rotationsachse senkrecht zu dieser Ebene, ungefähr in diese Richtung hier. Hier seht ihr den Vektor der Winkel- geschwindigkeit, welche zu θ gehört. Schauen wir uns, zum Beispiel, die zeitliche Entwicklung des Vektors ***er*** an. Ich erinnere euch daran, dass der Vektor ***er*** hier ist. Jetzt kann ich die Poissonschen Formeln benutzen, um zu sehen, dass die zeitliche Ableitung des Vektors ***er*** gleich ***ω*** ^ ***er*** sein muss, mit dem ***ω*** dieser Rotation gleich ***ϕ Punkt***, und das ***ω*** ^ ***er*** für die Rotation, welche durch θ definiert ist, ist also ***θ Punkt***.

Notes

Summary

10m 48s

Application : vitesses angulaires, c. sphériques



$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r + \dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$= \dot{\phi} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

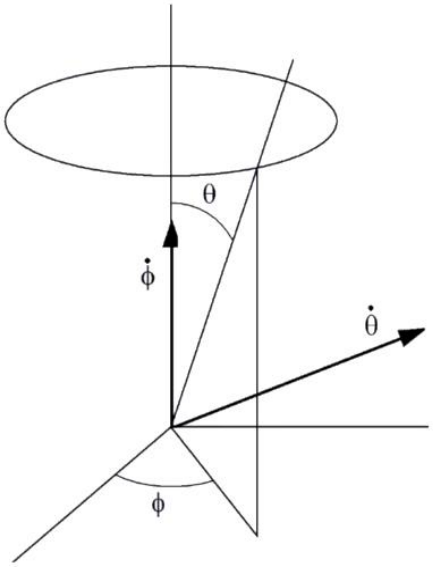
Wenn wir nun die Grafik anschauen, erhalten wir diese 2 Ausdrücke. Ich werde hier einen Vektor haben, welcher senkrecht zu ***er*** steht und senkrecht zu ***ϕ Punkt***, also senkrecht zu dieser Ebene hier. Dies ist in Richtung ***eϕ***, ihr erinnert euch, dass ***eϕ*** senkrecht zur vertikalen Eben stehet, welche diese Gerade enthält und diese hier. Ich erhalte also einen Ausdruck wie hier. Hier ist mein ***eϕ***. Was ist der Betrag dieses Vektors? Nun, es ist der Betrag von ***ϕ Punkt*** mal der Norm von ***er*** (dies ist gleich 1) mal dem Sinus des Winkels zwischen den 2, also Sinus *θ*. Dies habe ich hier. Für den anderen Ausdruck, schauen wir die Grafik an, ich habe mein ***er*** verloren aber ich zeichne es gerne nochmals, so, ***θ Punkt***, wir müssen rechnen: ***θ Punkt*** ^ ***er***, diesmal haben wir einen rechten Winkel. ***er*** gehört zur Ebene, welche diese Gerade enthält und diese hier. ***θ Punkt*** ist senkrecht. Noch einmal, ***θ point*** ist in Richtung ***eϕ***.

Notes

Summary

12m 17s

Application : vitesses angulaires, c. sphériques



$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r + \dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$= \dot{\phi} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \;\; + \dot{\theta} \, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

Folglich muss ***θ Punkt*** ^ ***er*** in Richtung ***eθ*** sein, ich erinnere daran, dass ***eθ*** in diese Richtung hier zeigt, was ich hier geschrieben habe. ***θ Punkt*** mal ***eθ*** Dies war eine andere Methode um *d* von ***er*** über *dt* zu erhalten, wir habe es mit einem Argument erhalten, welches noch nicht einmal die Poissonschen Formeln brauchte.

Notes

Summary

13m 38s

Vitesse angulaire

- Le vecteur de vitesse angulaire est sur l'axe de rotation
- Son module est la vitesse angulaire scalaire
- Si on a plusieurs rotations, on somme les vitesses angulaires

Ich fasse zusammen: wir wissen nun, dass der Vektor der Winkelgeschwindigkeit auf dieser Rotationsachse liegt, dass sein Betrag nichts anderes als die skalare Winkelgeschwindigkeit, welche wir schon gesehen haben, ist und dass, wenn wir mehrere Rotationen haben, das habt ihr sicherlich bemerkt, so reicht es ganz einfach die Vektoren der Winkelgeschwindigkeit zu summieren.

Notes

Summary

14m 07s