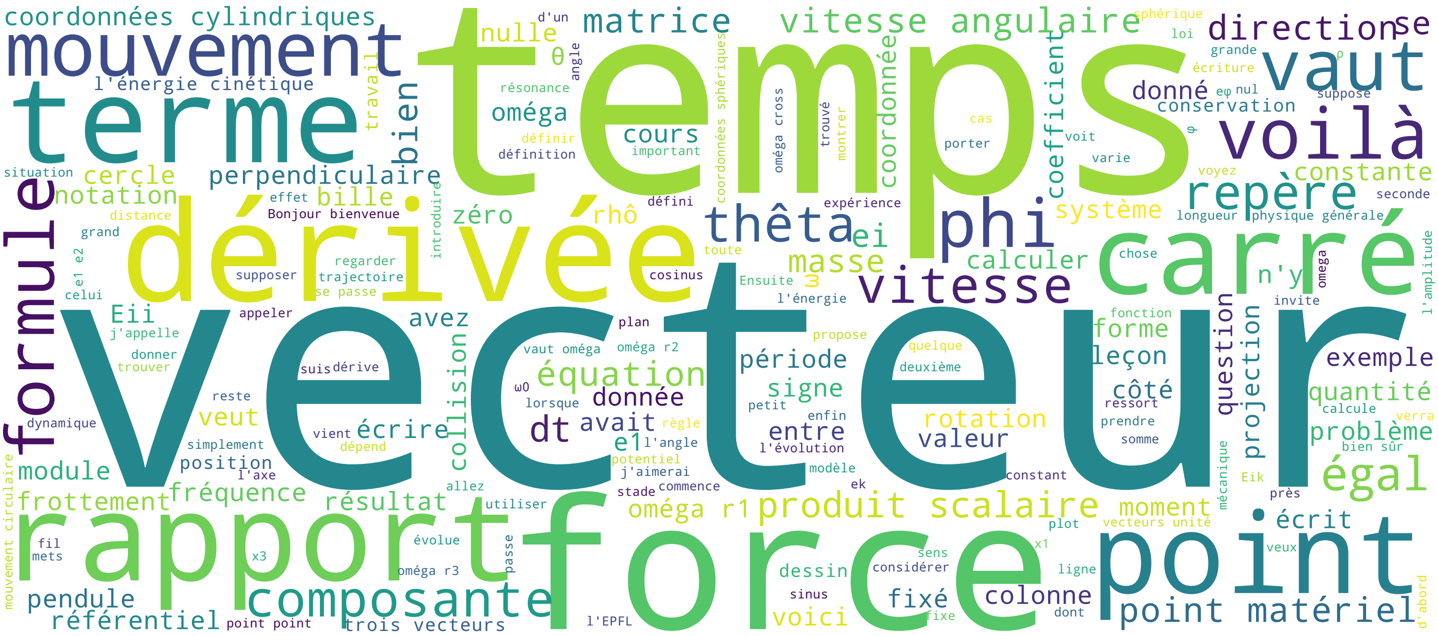
http://go.epfl.ch/traite-meca-1-8

Rotations

Mécanique, cours 8.1

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, j'aimerais aborder la question de décrire mathématiquement des rotations. Heureusement, pour ce qui concerne la dynamique ou la cinématique du point matériel, il suffira d'introduire un vecteur de vitesse angulaire pour décrire ce dont nous avons besoin. La question des rotations intervient maintenant parce que nous avons défini des repères associés aux coordonnées cylindriques et sphériques qui évoluent dans le temps, et nous devons voir comment calculer d'une façon générale les dérivées par rapport au temps des vecteurs du repère. On verra que, on doit introduire une matrice, mais que cette matrice a des propriétés particulières qui vont nous permettre de simplifier l'expression du problème, grâce à l'usage de la vitesse angulaire que nous allons définir. Cela va nous conduire à ce que j'appelle les formules de Poisson, formules que je vais utiliser souvent dans le reste du cours.

Notes

Summary

0m 04s

Evolution des vecteurs unités d'un repère

$$\left(A, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\right) \qquad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_1}{dt} = E_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad (\text{normal à } \hat{\boldsymbol{e}}_1)$$

Alors, examinons la question de l'évolution des vecteur unités d'un repère. J'imagine un repère défini par les vecteurs unités e1, e2, e3. Je vous propose d'imaginer une situation avec un A fixe. En fait, ces trois vecteurs sont des vecteurs libres, donc le fait que A soit fixe n'est pas très important, mais ça nous permet d'imaginer ces trois vecteurs opérant en mouvement autour du point A. Et ce mouvement est une rotation, comme on va le voir. Si j'applique la règle qu'on s'est déjà donnée, qu'on a observé lorsqu'on étudiait le mouvement circulaire uniforme, on a vu que, pour tout vecteur de norme constante, sa dérivée par rapport au temps est perpendiculaire à ce vecteur. Donc la dérivée de e1 par rapport au temps est perpendiculaire à e1. Ce que j'ai exprimé ici en disant que d'une manière très générale, la dérivée de e1 par rapport au temps a une composante selon e2 et e3. Une des composantes peut être nulle, mais, d'une manière générale, j'ai les deux possibilités. Les coefficients que je leur ai donnés, je les ai donné avec une notation particulière. Avec le deuxième indice qui se réfère au vecteur que je dérive par rapport au temps.

Notes

Summary

1m 15s

$$(A, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3) \qquad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_1}{dt} = E_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad (\text{normal à } \hat{\boldsymbol{e}}_1)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (\text{avec } E_{ii} = 0)$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \implies \frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) = 0$$

$$0 = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k + \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} E_{jk}\hat{\boldsymbol{e}}_j = E_{ki} + E_{ik}$$

La raison pour laquelle j'utilise cette drôle de notation, c'est parce que je vais maintenant construire une matrice, qui provient de la considération suivante: si je généralise cette loi que j'ai écrite pour le vecteur e1, je l'écris maintenant, cette loi d'évolution, pour le vecteur ei, i égal 1, 2, 3. J'ai ici des coefficients Eji qui interviennent, et je dois simplement prendre la précaution que Eii est nul. Ça, ça vient du fait que la dérivée de ei par rapport au temps est perpendiculaire à ei. Maintenant, je veux exprimer le fait que ces vecteurs sont orthogonaux les uns aux autres. J'écris : ei produit scalaire avec ek vaut ou bien 1, si k égal i, ou bien 0 si k est différent de i, c'est ce que signifie le symbole de Kronecker. Quel que soit le résultat de ce produit scalaire, il est indépendant du temps. Donc, je peux écrire que la dérivée par rapport au temps de ce produit scalaire est nulle. Maintenant, je vais opérer la dérivée, une fois sur le premier terme, une fois sur le deuxième terme. Ca me donne ceci : quand je fais porter la dérivée sur ei, j'applique cette formule, j'ai donc Eji fois ej, produit scalaire avec ek, quand je fais porter la dérivée sur ek, j'ai ei produit scalaire, avec alors, la dérivée par rapport au temps de ek, je l'obtiens avec cette formule, en remplaçant i par k. Donc ici j'ai Ejk.

Notes

Summary

2m 47s

$$(A, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3) \qquad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_1}{dt} = E_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad (\text{normal à } \hat{\boldsymbol{e}}_1)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (\text{avec } E_{ii} = 0)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ij}^{T}\,\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \implies \frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) = 0$$

$$0 = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k + \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} E_{jk}\hat{\boldsymbol{e}}_j = E_{ki} + E_{ik}$$

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad E^T = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une convention !

Ejk fois ej. Et maintenant, le produit scalaire ej ek est nul, sauf lorsque j vaut k. À ce moment-là, il reste Eki. C'est ce que j'ai écrit ici. De même de ce côté-là, quand ej produit scalaire avec... ei avec ej vaut 1 seulement lorsque i égal j. Donc ce j-là vaut i, et on a Eik. C'est Eik qui est ici. Donc j'arrive à la conclusion : Eki égale moins Eik. Ma matrice est antisymétrique. Si j'écris la matrice sous cette forme, en forme de tableau, j'ai, pour l'élément E1,2 ici, de ce côté-là j'aurai E2,1 qui vaut moins E1,2, c'est ce que j'ai indiqué. E1,3, moins E1,3, E2,3, moins E2,3 et bien sûr on a 0 sur la diagonale parce que si Eii doit être égal à moins Eii, il faut que Eii soit nul. Maintenant j'introduis une notation particulière, il n'y a pas grande raison apparemment, à ce point-là du calcul, d'utiliser cette notation, mais vous allez voir qu'elle est fort utile. Je décide d'appeler E1,2, oméga 3 moins E1,3 oméga 2, et E2,3 je l'appelle oméga1. C'est complètement arbitraire à ce stade, mais cette écriture-là va nous faire apparaître le vecteur de vitesse angulaire que j'aimerais introduire dans cette leçon. Il s'agit donc d'une convention d'écriture. C'est cette convention d'écriture qui impose qu'on utilise toujours des repères directs.

Notes

Summary

4m 30s

Définition : vecteur vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)}_{r} = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

Alors, si je considère maintenant un vecteur r fixé dans le repère. Attention : les vitesses se mesurent par rapport au référentiel. Le repère, par exemple le repère des coordonnées cylindriques et sphériques, bouge dans le temps. Il évolue dans le temps. Maintenant je peux convenir de considérer un vecteur r qui est fixé dans ce repère, ça ne veut pas dire que le repère est un référentiel. Alors, je vais écrire mon vecteur r, comme ceci, ça c'est mon vecteur r, et donc je suis en train de supposer que les composantes du vecteur r ne dépendent pas du temps. C'est comme ceci qu'on va exprimer le fait que r est fixé dans le repère. Donc, si le vecteur r évolue dans le temps, c'est parce que le repère évolue dans le temps. Donc quand je calcule d de r sur d de t, la dérivée se porte sur les vecteurs unités seulement. Ce que j'ai écrit ici.

Notes

Summary

6m 35s

Définition : vecteur vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i r_i \sum_j E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i E_{ji}\, r_i\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Maintenant, j'utilise la formule que j'ai donnée pour d de ei sur d de t, Ej fois Ej, somme sur j, je regroupe les termes en i. Il y en a un ici, il y en a un autre ici, je mets la somme sur i, le tout ensemble, et j'ai donc ici l'élément, la composante j de mon vecteur, dr sur dt est un vecteur, la composante j de ce vecteur c'est ceci, c'est le résultat du calcul d'un produit de matrice, la matrice Eji qui est donc la transposée de la matrice E que je viens de définir, c'est pour ça que j'ai ici tous les signes qui sont intervertis, fois le vecteur r, dont les composantes sont r1, r2, r3. Cette écriture-là est équivalente à celle-ci. Maintenant, si j'explicite les termes, les composantes du vecteur d de r sur dt, j'ai moins oméga 3 fois r2, plus oméga 2 fois r3, c'est ce terme-là, oméga 3 r1 moins oméga 1, r3, ici, moins oméga 2, r1, plus oméga 1, r2, là. Alors, arrivé à ce stade, vous comprenez pourquoi j'ai fait le choix de notation que j'ai fait, parce que si maintenant je définis un vecteur oméga avec comme composantes oméga 1, oméga 2, oméga 3, alors ce que je viens d'obtenir ici n'est rien d'autre qu'oméga cross r.

Notes

Summary

7m 45s

Définition : vecteur vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i r_i \sum_j E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i E_{ji}\, r_i\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

Mécanique | 2013 24

En effet, si je regarde la première composante de ce vecteur-là, donc si je voulais calculer le produit avec un déterminant e1, e2, e3, vous imaginez ici dans votre tête, le déterminant formé des trois colonnes, cette colonne-là, cette colonne-là et cette colonne-là, la première composante du vecteur vaut oméga 2 r3 moins oméga 3 r2. C'est ceci. La deuxième vous donne oméga 3 r1 moins oméga 1 r3. Elle est là. La troisième, oméga 1 r2 moins oméga 2 r1, la voici. Donc, j'ai trouvé d de r sur dt égale oméga cross r pour tout vecteur r fixé dans le repère. Je peux maintenant particulariser cette formule en prenant r1 égale 1, r2 nul, r3 nul. J'ai donc l'évolution de e1 dans le temps. d de e1 sur dt égal oméga cross e1. Même chose pour les vecteurs e2 et e3.

Notes

Summary

9m 32s

Propriété : formules de Poisson

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Mécanique | 2013 25

C'est ce que j'appelle les formules de Poisson. Pour ce repère, l'évolution des vecteurs du repère peuvent être décrits par ce oméga ici, et il y a le même oméga pour les trois vecteurs, i égal 1, 2, 3. J'ai d de ei sur dt, qui vaut oméga, produit vectoriel avec ei, oméga je vais appeler la vitesse angulaire.

Notes

Summary

10m 52s