ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Rotations

Mécanique, cours 8.1

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-8

EPFL

Rotations

- Evolution d'un repère
- Matrice
- Vitesse angulaire vectorielle
- Formules de Poisson

Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion möchte ich, den mathematischen Beschrieb der Rotationen einführen. Glücklicherweise wird, solange es um die Dynamik oder die Kinematik des Massenpunkts geht, die Definition eines Vektors der Winkelgeschwindigkeit reichen, um das Nötige zu beschreiben. Die Frage nach den Rotationen kommt jetzt auf, da wir die zylindrischen und sphärischen Koordinatensysteme, die sich mit der Zeit entwickeln, definiert haben. Nun müssen wir schauen wie wir auf allgemeine Weise die Ableitungen nach der Zeit der Vektoren des Systems Berechnen können. Wir werden sehen, dass wir eine Matrize einführen müssen aber dass diese Matrize spezielle Eigenschaften hat, die es uns erlauben werden das Problem zu vereinfachen. Dies ist möglich dank der Winkelgeschwindigkeit, die wir definieren werden. Dies wir uns zu den sogenannten Poisson Formeln, welche ich sehr oft benutzen werde, im weiteren Verlauf des Kurses.

Notes

Summary

0m 04s

Evolution des vecteurs unités d'un repère

$$(A, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \quad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = E_{21}\hat{e}_2 + E_{31}\hat{e}_3 \qquad (\text{normal à } \hat{e}_1)$$

Schauen wir uns also die Entwicklung der Einheitsvektoren eines Koordinatensystems an. Stellen wir uns ein Koordinantensystem vor, welches durch die Einheits- vektoren e1, e2, e3 definiert wird. Ich schlage vor, wir betrachten die Situation, in der A fix bleibt. Tatsächlich sind diese drei Vektoren frei sich zu bewegen. Dass wir nun A fixieren, ist nicht sehr wichtig aber es erlaubt uns, uns vorzustellen, dass diese drei Vektoren sich um den Punkt A rum bewegen. Und diese Bewegung ist eine Rotation, wie wir sehen werden. Wenn ich die Regel, die wir schon gefunden haben, als wir die gleichmässige Kreisbewegung studiert haben, anwende. Wir haben gesehen, dass, für alle Vektoren mit konstantem Betrag, die Ableitung nach der Zeit, senkrecht zu dem Vektor steht. Die Ableitung von e1 nach der Zeit ist also senkrecht zu e1. Was ich hier angegeben habe, entspricht, in sehr allgemeiner Weise, der Tatsache, dass die Ableitung von e1 eine Komponente entlang von e2 und e2 hat. Eine dieser Komponenten kann Null sein, aber im Allgemeinen gibt es beide Möglichkeiten. Die Koeffizienten die ich angegeben habe, habe ich mit spezieller Schreibweise geschrieben.

Notes

Summary

1m 15s

Evolution des vecteurs unités d'un repère

$$(A, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3) \qquad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_1}{dt} = E_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad (\text{normal à } \hat{\boldsymbol{e}}_1)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (\text{avec } E_{ii} = 0)$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \implies \frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) = 0$$

Der zweite Index steht für den Vektor, welchen ich nach der Zeit abgeleitet habe. Der Grund, aus welchen ich diese komische Schreibweise benutze, ist, weil ich jetzt eine Matrize konstruieren werde, welche auf folgende Überlegung zurück geht: wenn ich nun dieses Gesetz, dass ich für den Vektor e1 geschrieben habe, verallgemeinere und auf den Vektor e1, i gleich 1,2,3, anwende. Ich habe hier die Koeffizienten Eji, welche vorkommen und ich muss einfach aufpassen, dass Eii Null ist. Dies rührt daher, dass die Ableitung nach der Zeit von ei immer senkrecht zu ei steht. Jetzt möchte ich die Tatsache, dass diese Vektoren senkrecht zu einander stehen ausdrücken. Ich schreibe: das Skalarprodukt von ei mit ek ist gleich entweder 1, wenn k gleich i ist, oder dann 0 wenn k verschieden von i ist. Dies wird durch das Kronecker- symbol ausgedrückt. Was auch das Resultat dieses Skalarprodukts sein mag, es ist unabhängig von der Zeit. Ich kann also schreiben, dass die zeitliche Ableitung dieses Skalarprodukts gleich Null ist. Ich werde jetzt die Ableitung, einmal auf den ersten Ausdruck und einmal auf den zweiten Ausdruck an.

Notes

Summary

2m 41s

Evolution des vecteurs unités d'un repère

$$(A, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3) \quad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_1}{dt} = E_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad (\text{normal à } \hat{\boldsymbol{e}}_1)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (\text{avec } E_{ii} = 0) \qquad\qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ij}^T\,\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \implies \frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) = 0$$

$$0 = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k + \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} E_{jk}\hat{\boldsymbol{e}}_j = E_{ki} + E_{ik}$$

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad E^T = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt folgendes Resultat: Wenn ich die Ableitung auf ei anwende, ich brauche diese Formel hier, ich erhalte also: Eji mal ej Skalarprodukt mit ek, und wenn ich die Ableitung auf ek anwende, kriege ich: ei Skalarprodukt mit der zeitlichen Ableitung von ek, die man mit dieser Formel erhält. Man muss nur i mit k ersetzen. Ich habe also hier Ejk. Ejk mal ej. Das Skalarprodukt zwischen ej und ek ist gleich Null, ausser wenn j gleich k ist. In diesem Fall bleibt Eki. Dies ist hier geschrieben. Genauso geht das auf dieser Seite: das Skalarprodukt von ei mit ej ist gleich 1 wenn j gleich j ist. Dieses j hier ist also gleich i und hier haben wir Eik. Dasselbe Eik wie hier. Daraus folgt nun: Eki gleich minus Eik. Meine Matrize ist antisymmetrisch. Wenn ich die Matrize in dieser Form, als Tabelle, schreibe, so habe ich E1,2 hier und auf dieser Seite hätte ich E2,1, welches aber gleich minus E1,2 ist. Dies habe ich angegeben. E1,3, minus E1,3. E2,3, minus E2,3 und, wie gesagt, 0 auf der Diagonalen, da wenn Eii gleich minus Eii sein muss, muss Eii gleich null sein. Jetzt stelle ich eine spezielle Schreibweise vor: momentan gibt es keinen offensichtlichen Grund diese Notation zu benutzen, aber ihr werdet sehen, dass sie wirklich sehr nützlich sein wird.

Notes

Summary

3m 58s

Evolution des vecteurs unités d'un repère

$$(A, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3) \qquad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_1}{dt} = E_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad (\text{normal à } \hat{\boldsymbol{e}}_1)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (\text{avec } E_{ii} = 0) \qquad\qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E^T_{ij}\,\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \implies \frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) = 0$$

$$0 = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k + \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} E_{jk}\hat{\boldsymbol{e}}_j = E_{ki} + E_{ik}$$

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad E^T = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une convention !

Ich werde E1,2 Omega 3 nennen, minus E1,3 Omega 2 und E2,3 wird Omega 1 genannt. Dies ist völlig willkürlich im Moment, aber diese Schreibweise wird uns den Vektor der Winkel- geschwindigkeit geben. Und dies ist ja das Thema dieser Lektion. Es handelt sich also um eine Schreibregelung. Es ist die selbe Abmachung die verlangt, dass man immer rechtshändige Koordinatensysteme braucht.

Notes

Summary

6m 00s

Définition : vecteur vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i r_i \sum_j E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i E_{ji}\, r_i\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix}$$

Wenn ich mit jetzt einen Vektor r, welcher im Koordinatensystem fixiert ist, anschaue. Achtung: die Geschwindig- keiten werden mit dem Bezugssystem errechnet. Das Koordinatensystem, zum Beispiel zylindrisch oder sphärisch, bewegt sich mit der Zeit. Es verändert sich mit der Zeit. Ich kann jetzt also einen Vektor r der fixiert ist in diesem Koordinatensystem anschauen und das bedeutet nicht, dass dieses Koordinatensystem ein Bezugssystem ist. Ich schreibe r wie folgt: dies ist mein Vektor r, ich nehme also an, dass die Komponenten des Vektors r nicht von der Zeit abhängig sind. Damit vergewissern wir uns, dass r auf das Koordinatensystem fixiert bleibt. Wenn also der Vektor r sich bewegt, dann ist das, weil das Koordinatensystem sich bewegt. Wenn ich also d von r über d von t rechne, so gilt die Ableitung nur den Einheitsvektoren. Dies habe ich hier geschrieben. Ich brauche jetzt die Formel, die ich gegeben habe, für d von ei über d von t. Ej mal Ej, Summe über j. Ich gruppiere die Ausdrücke mit i. Hier hat es einen und hier einen anderen. Ich mache die Summe über i, alles zusammen, und ich habe hier also die Komponente j von meine Vektor, dr über dt ist ein Vektor, die j-Komponente dieses Vektors ist hier, es sit das Resultat einer Matrizenmultiplikation.

Notes

Summary

6m 35s

Définition : vecteur vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i r_i \sum_j E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i E_{ji}\, r_i\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Die Matrize Eji ist also die transponierte Matrize von E, welche ich gerade definiert habe. Deshalb sind alle Vorzeichen ausgetauscht. Mal den Vektor r mit den Komponenten r1, r2, r3. Diese Schreibweise hier ist gleichwertig mit der hier. Jetzt erkläre ich die Ausdrücke. die Komponenten des Vektors d von r über dt, ich habe Omega 3 mal r2, plus Omega 2 mal r3, dieser Ausdruck hier, Omega 3 r1 minus Omega 1 r3 hier, minus Omega 2 r1 plus Omega 1 r2 hier. Hier merkt ihr nun, wieso ich diese Notation gewählt habe. Es ist weil, wenn ich jetzt den Vektor Omega definiere, mit den Komponenten Omega 1, Omega 2, Omega 3, dann ist unser Resultat hier nichts anderes als Omega cross r. Tatsächlich, wenn wir die erste Komponente dieses Vektors hier anschaue, also wenn ich das Produkt mit einer Determinante, e1,e2,e3 ausrechnen will, stellt euch einfach vor, die Determinante besteht aus diesen drei Kolonnen, diese Kolonne hier, diese da und diese da. Die erste Komponente des Vektors ist gleich Omega 2 r3 minus Omega 3 r2. Das ist hier. Die Zweite ergibt Omega 3 r1 minus Omega 1 r3. Sie ist hier. Die Dritte, Omega 1 r2 minus Omega 2 r1, hier.

Notes

Summary

8m 20s

Définition : vecteur vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i r_i \sum_j E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i E_{ji}\, r_i\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

Ich habe also dr über dt, welches gleich Omega cross r ist, für jeden Vektor r der ans Koordinatensystem fixiert ist. Ich kann diese Formel jetzt auf den speziellen Fall anwenden, wo r1 gleich 1, r2 gleich Null und r3 auch gleich Null ist. Ich finde hier also die zeitliche Entwicklung von e1. d von e1 über dt gleich Omega cross e1. Das selbe gilt für e2 und e3.

Notes

Summary

10m 23s

Propriété : formules de Poisson

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Mécanique | 2013 25

Dies nenne ich die Poissonschen Formeln. Für dieses Koordinatensystem kann die zeitliche Entwicklung der Vektoren mit diesem Omega hier beschrieben werden und es ist das selbe Omega für die drei Vektoren, i gleich 1,2,3. Ich habe d von ei über dt gleich dem Vektorprodukt von Omega mit ei. Omega werde ich die Winkelgeschwindigkeit nennen.

Notes

Summary

10m 52s