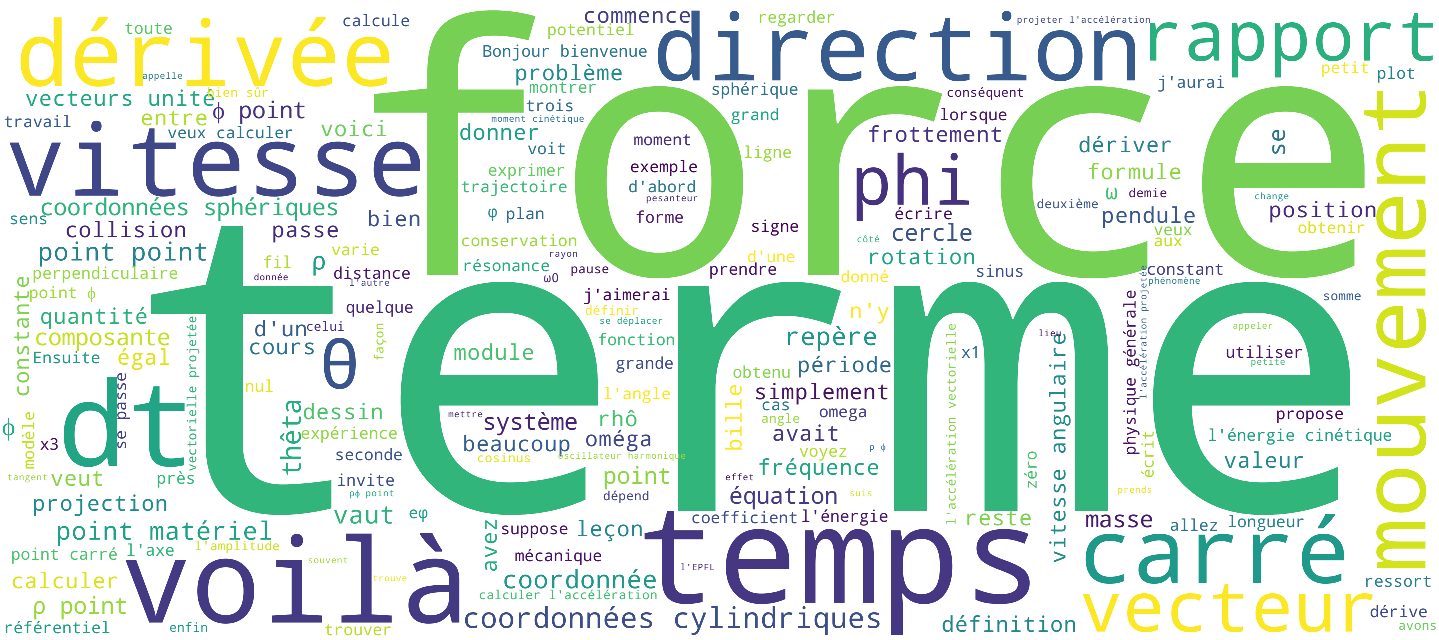
Accélération en coord. cylindriques et sphériques

Mécanique, cours 7.3

Jean-Philippe Ansermet

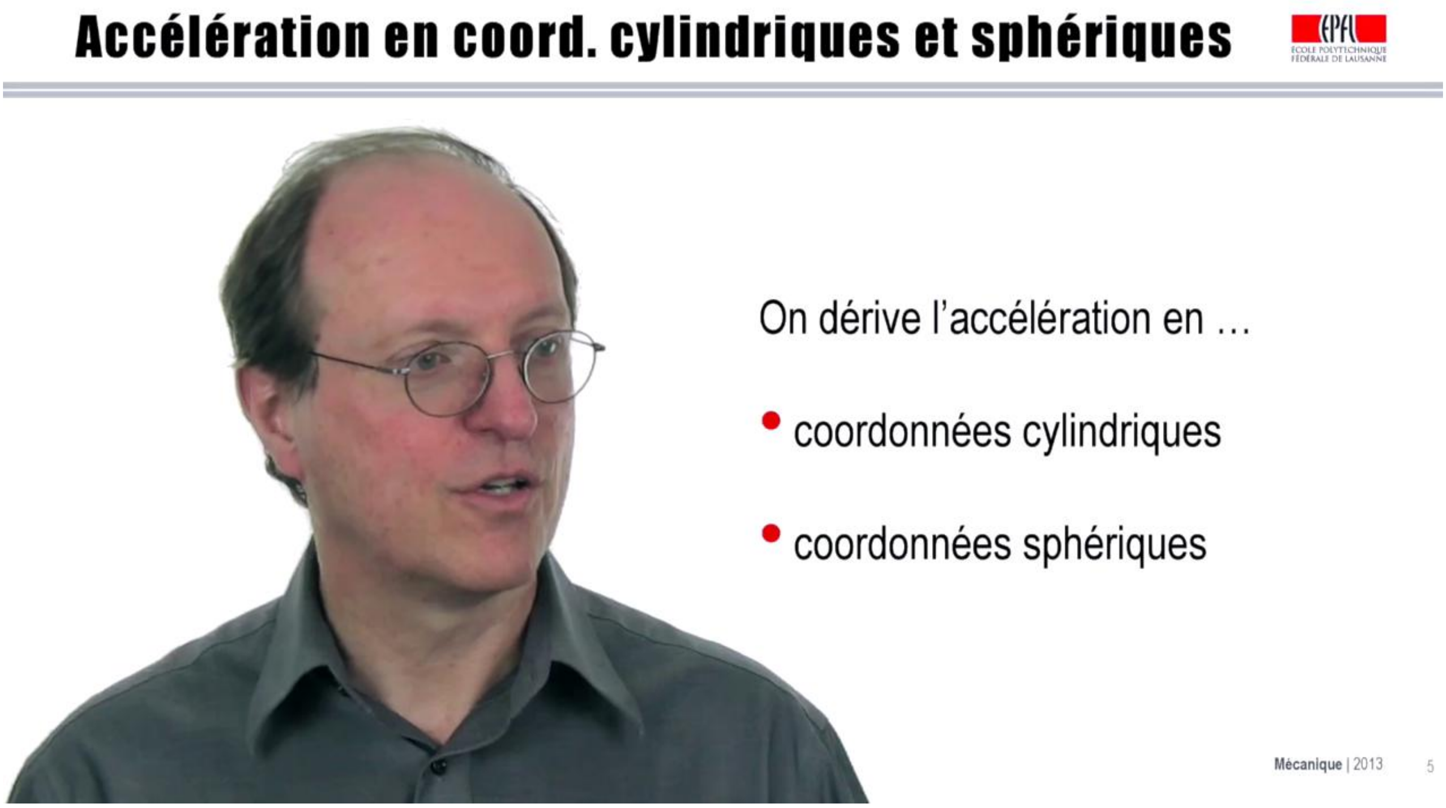
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-7



Search MOOC

Video

EPFL



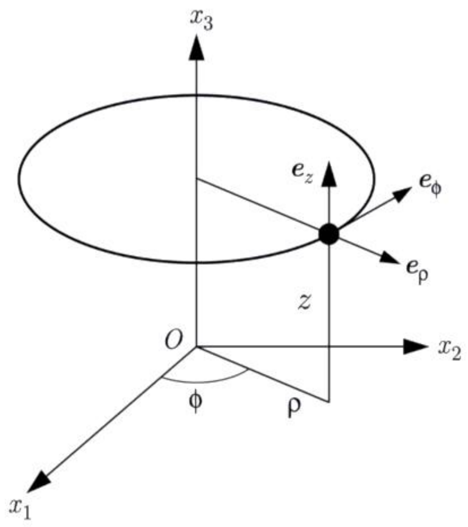
Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, j'ai introduit les coordonnées cylindriques et sphériques, et j'ai voulu montrer comment on va utiliser ces systèmes de coordonnées pour exprimer la cinématique du point matériel. Nous avons vu dans le précédent module comment exprimer la vitesse vectorielle projetée sur les repères associés à ces 2 systèmes de coordonnées. Il nous reste maintenant à projeter l'accélération du point matériel, l'accélération vectorielle projetée sur ces repères. On va considérer l'accélération comme la dérivée de la vitesse, exprimée en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

Notes

Summary

0m 04s

Accélération projetée sur le repère, c. cylindriques



$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

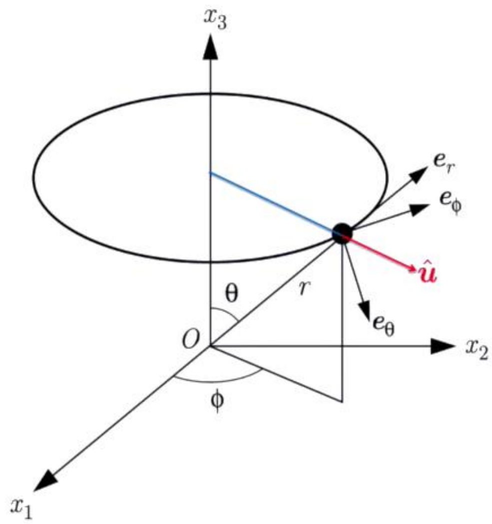
$$+\dot{\rho}\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} + \rho\dot{\phi}\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt}$$

Je commence avec les coordonnées cylindriques. Voici le dessin qui résume la définition des coordonnées cylindriques, *ρ*, *ϕ*, *z*, et les vecteurs unités associés, ***e****ρ*, ***e****ϕ*, ***e****z*. On a obtenu ceci pour la vitesse. Quand on va dériver la vitesse par rapport au temps, pour obtenir l'accélération, on aura, bien sûr, les composantes qu'on va dériver par rapport au temps; mais il faudra aussi dériver ***e****ρ* et ***e****ϕ* par rapport au temps. ***e****z*, il n'y a pas de soucis, ***e****z* reste toujours vertical, donc il a une dérivée nulle par rapport au temps. Alors, on a déjà obtenu *d* de ***e****ρ* sur *dt*, et *d* de ***e****ϕ* sur *dt*. Par conséquent, quand je veux calculer l'accélération, je calcule la dérivée de la vitesse, j'ai un *ρ point point*, ces 2 termes vont me donner *ρ point*, *ϕ point* et *ρϕ point point*, les voilà. Ce terme en *z point* va me donner *z point point*. Et maintenant, il y a la dérivée des vecteurs unités, comme ceci, avec *d* de ***e****ρ* sur *dt*, qui est donné ici, et *d* de ***e****ϕ* sur *dt*, là.

Notes

Summary

0m 56s



$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Mécanique | 2013 17

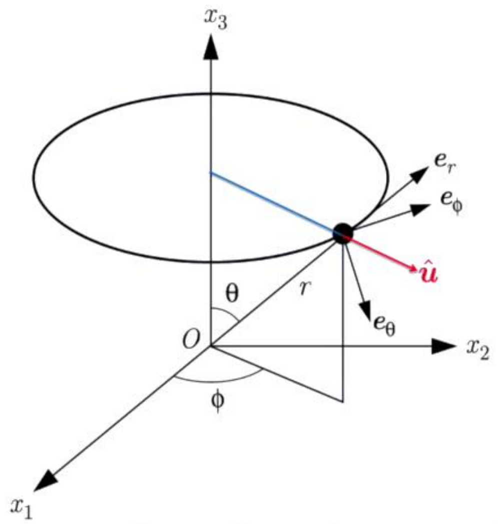
J'ai donc un terme en moins *ρϕ point carré*, dans la direction ***e**ρ*, j'ai un *ρ point ϕ point*, ici, et j'ai aussi un *ρ point ϕ point*, là. Je rassemble les termes, les voici. Dans la direction ***e**ρ*, dans cette direction là, j'ai un *ρ point point* et un moins *ρ ϕ point carré*. Dans la direction tangente au cercle, j'ai *ρ ϕ point point*, mais j'ai aussi *2 ρ point ϕ point*. Et simplement *z point point* dans la direction *z*. Je passe maintenant à l'accélération projetée sur le repère des coordonnées sphériques, les coordonnées *r*, *θ*, *ϕ*. Je vais projeter l'accélération vectorielle sur ***er***, ***e**θ*, ***e**ϕ*. Je pars de l'expression de la vitesse projetée sur le repère des coordonnées sphériques, ***er***, ***e**θ*, ***e**ϕ*. Encore une fois, quand je vais calculer la dérivée de la vitesse, j'aurai la dérivée des composantes, mais j'aurai aussi la dérivée des vecteurs unités. On l'a calculé, je répète nos résultats : voilà *d* de ***er*** sur *dt*, voilà *d* de ***e**ϕ* sur *dt*, avec ***u***, ici, qui a ces composantes là, *d* de ***e**θ* sur *dt*, on l'avait obtenu aussi.

Notes

Summary

2m 21s

Accélération projetée sur le repère, c. sphériques



$$v = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi + \dot{r}\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\phi$$

Et maintenant, si je veux calculer l'accélération, je prend la vitesse, je dérive par rapport au temps. On reprend notre souffle, parce qu'il y a beaucoup de termes. Voilà. On doit avoir un *r point point*, il est là. Ici on a 2 termes, on doit obtenir 2 termes, ils sont là. Ici on a 3 termes, on va donc obtenir la somme de 3 termes : un, deux, trois, ils sont là. *t* de ***er*** sur *2 θ*, on l'a ici. *d* de ***eθ*** sur *dt*, il est là. et le *d* de ***eϕ*** sur *dt*, on l'a obtenu comme ceci. Je vous invite à faire une pause, et essayez de rassembler les termes par vous-mêmes.

Notes

Summary

3m 54s

Vitesse et accélération, composantes

Coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Coordonnées sphériques

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta$$

Mécanique | 2013 23

Le résumé, le voici : c'est une page qui va vous donner un formulaire important pour la suite. En coordonnées cylindriques, on avait la vitesse et l'accélération projetées sur le repère des coordonnées cylindriques, ici. Pour les coordonnées sphériques, La vitesse, on l'avait obtenue, et maintenant, pour l'accélération il y a beaucoup de termes, je les note ainsi : ***ar*** pour la composante, l'accélération dans la direction *r*, ***aθ*** dans la direction *θ*, et ***aϕ*** dans la direction *ϕ*. Avec ceci, nous sommes prêts à faire de la mécanique en utilisant les coordonnées cylindriques ou sphériques.

Notes

Summary

4m 42s