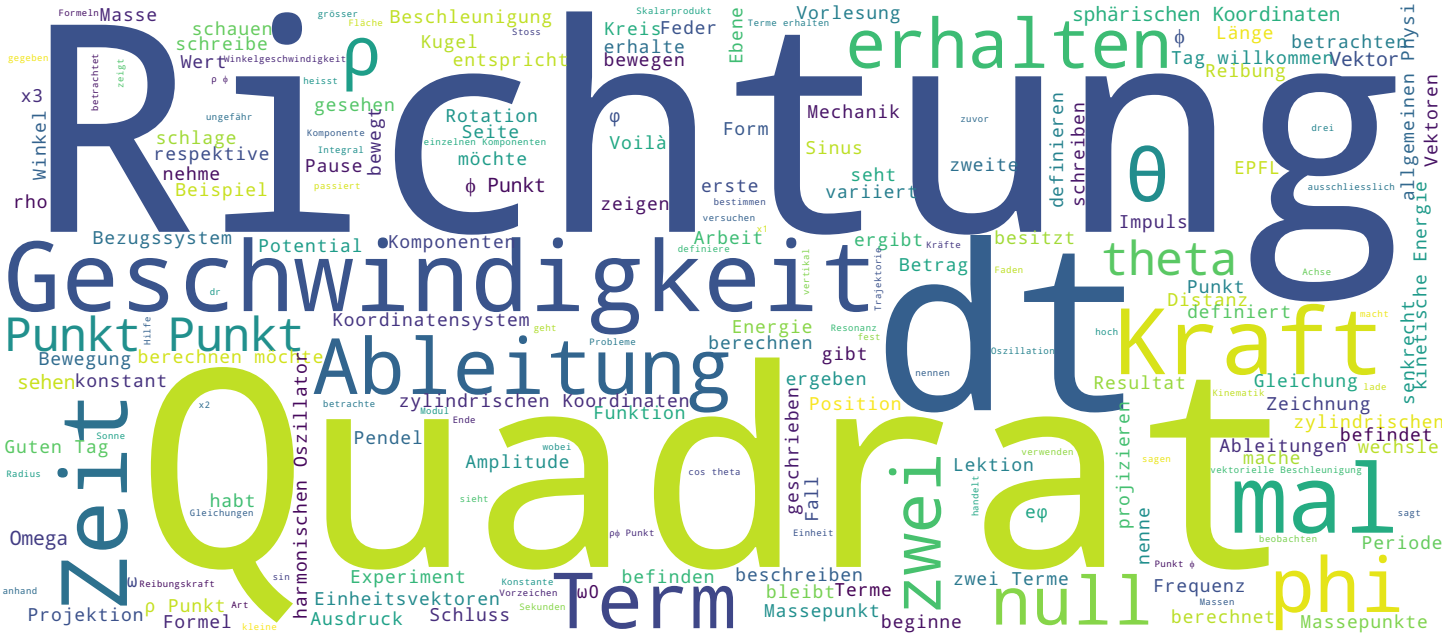
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Accélération en coord. cylindriques et sphériques

Mécanique, cours 7.3

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-7



EPFL

Accélération en coord. cylindriques et sphériques

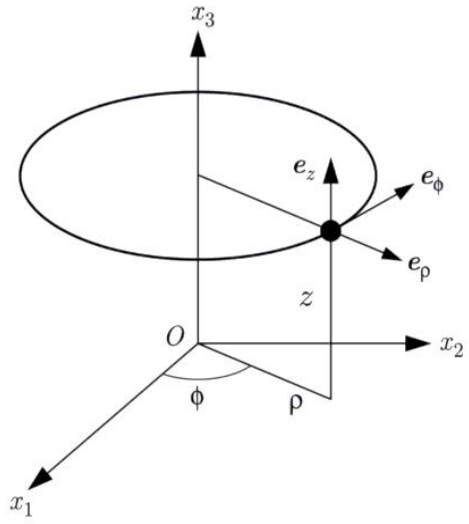
Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion habe ich die zylindrischen und sphärischen Koordinaten eingeführt. Des Weiteren wollte ich euch zeugen, wie man diese Koordinatensysteme nützt, um die Kinematik eines Massepunktes zu beschreiben. Im letzten Modul haben wir gesehen, wie sich die Projektion der Geschwindigkeit auf die beiden Koordinatensysteme ausdrücken lässt. Uns bleibt noch übrig, die vektorielle Beschleunigung des Massepunktes auf die beiden Koordinatensysteme zu projizieren. Wir werden die Beschleunigung als die Ableitung der in zylindrischen oder sphärischen Koordinaten ausgedrückten Geschwindigkeit betrachten.

Notes

Summary

0m 04s

Accélération projetée sur le repère, c. cylindriques



$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

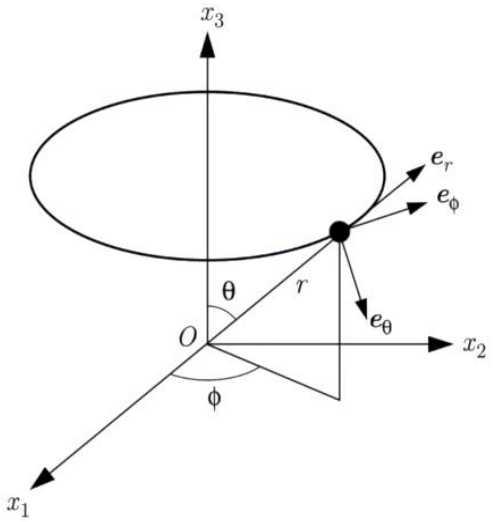
Ich beginne mit den zylindrischen Koordinaten. Hier die Zeichnung, welche die Definition der zylindrischen Koordinaten zusammenfasst: ρ, ϕ, z und die dazugehörigen Einheitsvektoren **e**ρ, ***e****ϕ*, ***e****z*. Für die Geschwindigkeit haben wir dies erhalten. Wenn wir, um die Beschleunigung zu erhalten, die Geschwindigkeit nach der Zeit ableiten, erhalten wir sicherlich die Ableitung der einzelnen Komponenten. Jedoch dürfen wir die Ableitung nach der Zeit von ***e****ρ* und ***e****ϕ* nicht vergessen. ***e****z* ergibt keine Probleme. ***e****z* bleibt immer vertikal und besitzt dadurch eine Ableitung nach der Zeit, welche null ist. Die beiden Terme ***de****ρ* durch *dt* und ***de****ϕ* und *dt* haben wir bereits berechnet. Deshalb, wenn ich die Beschleunigung ausrechnen möchte, berechne ich die Ableitung der Geschwindigkeit und erhalte ein *ρ Punkt Punkt*. Diese beiden Terme werden ergeben: *ρ Punkt*, *ϕ Punkt* und *ρϕ Punkt Punkt*. Dieser Term *z Punkt* wird ein *z Punkt Punkt* ergeben.

Notes

Summary

0m 56s

Accélération projetée sur le repère, c. sphériques



$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

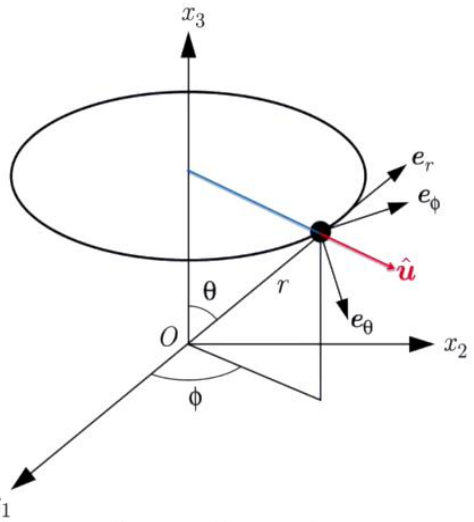
Nun hat es noch die folgenden Ableitungen der Einheitsvektoren: ***d*ρ** durch *dt*, welcher hier gegeben ist, und ***de*ϕ** durch *dt*, dort. Ich habe also einen Term minus *ρϕ Punkt im Quadrat* in der Richtung ***e*ρ**. Ich habe ein *ρ Punk ϕ Punkt* hier und habe auch ein *ρ Punkt ϕ Punkt* dort. Ich fasse die Terme zusammen. In der Richtung ***e*ρ**, dieser Richtung hier, habe ich ein *ρ Punkt Punkt* und ein minus *ρ ϕ Punkt im Quadrat*. In der zum Kreis tangentialen Richtung habe ich *ρ ϕ Punkt Punkt* und *2 ρ Punkt ϕ Punkt* In der Richtung *z* hat es ausschliesslich *z Punkt Punkt*. Ich wechsle nun zu der in sphärischen Koordinaten, *r*, *θ*, *ϕ*, ausgedrückten Beschelunigung. Ich werde die vektorielle Beschleunigung auf die Vektoren ***e*r**, ***e*θ**, ***e*ϕ** projizieren. Ich starte beim Ausdruck der auf sphärische Koordinaten, respektive auf ***e*r**, ***e*θ** und ***e*ϕ** projizierten Geschwindigkeit. Noch einmal, wenn ich die Ableitung der Geschwindigkeit berechnen möchte, erhalte ich die Ableitung der einzelnen Komponenten, jedoch auch die Ableitungen der Einheitsvektoren.

Notes

Summary

2m 09s

Accélération projetée sur le repère, c. sphériques



$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi + \dot{r}\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\phi$$

Diese haben wir bereits berechnet. Ich repetiere unsere Resultate: Voilà ***de****r* durch *dt*, hier ***de****ϕ* durch *dt* mit ***u***, was diese Komponenten hier besitzt und zum Schluss ***de****θ* durch *dt*. Und nun, wenn ich die Beschleunigung berechnen möchte, nehme ich die Geschwindigkeit und leite diese nach der Zeit ab. Wir wiederholen diese Prozedur. Voilà. Wir müssen ein *r Punkt Punkt* erhalten. Dieses ist hier. Hier sind zwei Terme. Wir müssen zwei Terme erhalten, welche hier sind. Hier haben wir drei Terme. Wir werden also die Summe dreier Terme erhalten. Eins, zwei, drei; sie sind hier. ***de****r* durch *dt* haben wir hier. ***de****θ* durch *dt* ist hier. Und zum Schluss, ***e****ϕ* durch *dt* haben wir so erhalten. Ich lade euch ein, eine Pause zu machen und zu versuchen, die Terme selbständig zusammen zu fügen.

Notes

Summary

3m 36s

Vitesse et accélération, composantes

Coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Coordonnées sphériques

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta$$

Die Zusammenfassung ist hier. Dies ist eine Seite, welche uns eine wichtige Formelsammlung für die Zukunft sein wird. Wir haben die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ausgedrückt im Achsenssystem der zylindrischen Koordinaten. Diese befinden sich hier. Für die sphärischen Koordinaten haben wir die Geschwindigkeit erhalten. Für die Beschleunigung hat es viele Terme. Ich notiere sie: ***ar*** für die Beschleunigung in der Richtung *r*. ***aθ*** in der Richtung θ und ***aϕ*** in der Richtung ϕ. Mit diesen Formeln sind wir bereit, die Mechanik mit zylindrischen und sphärischen Koordinaten zu praktizieren.

Notes

Summary

4m 42s